Asociațiunea pentru cultura și literatură poporului Român din Sibiu

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1924.

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".
3. Asupra ecuaţiei pitagorice $Z^2=X^2+Y^2$ . *Leonida A. Penenjchevici.*
4. Note Matematice: 1—4.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 115.
7. Probleme rezolvate: 3117, 3139, 3159, 3168, 3183.
8. Exerciţii: 1—11.
9. Probleme propuse: 3211—3220.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1924

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti, **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti, **G. Borneanu,** Cassier, Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre-Filaret.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 107, 12, 14, 27, 29, 31, 34, 40, 48, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 83, 85, 87, 90, 91, 92, 94, 95, 98, 200, 01, 03, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

A apărut și se poate procură dela redacția „Gazetei Matematice“, volumul:

**Lecțiuni de Algebră Superioară,** pentru cl. VIII Reală, ediția IV revăzută și adăogită, 1924, de N. ABRAMESCU.

Prețul volumului . . . lei 80,—

**Costul abonamentului la Revista „Gazeta Matematică“ pe anul XXX, este de lei 60.**

**Pentru a primi No. 2 şi următoarele ale Revistei, D-nii abonaţi sunt rugaţi să trimită costul integral al abonamentului sau, dacă au trimis numai o parte din acest cost, a-l completa.**

Cine este în stare să spună dela prima vedere câţi **„nouă“** câţi **„nouă“** şi câţi „9“ sunt această frază abracadabrantă? Soluţia este:

Sunt 2 ouă proaspete şi 9 vechi. Primele revin nouă şi celelalte vechi vouă.

G. PĂTRAŞCU

* * *

3. **Definiţiuni literare pentru expresiuni aritmetice.** Extragem dintr'un dicţionar francez:

**Proportion.** Rapport des quantités entre elles.

**Progression.** Suite de nombres ou de quantités dérivant successivement les unes des autres selon une même loi.

Ambele definiţiuni nu sunt exacte.

I. I.

* * *

4. **Tabla lui Pitagora.** In volumul **„File rupte“** al lui AL. VLĂHUŢĂ, la pagina 198, se poate citi următoarele:

„E o armonie de silabe în exprimarea oricărei legi universale, o brodeală ritmică până şi în tabla lui PITAGORA“.

N. G. SEGĂRCEANU.

* * *

5. **„Matematica în ziare.** Citesc într'un ziar de seară:

„La alegerile din Ceho-Slovacia guvernamentalii au fost complet învinşi In schimb comuniştii au obţinut cele mai multe locuri. Iată rezultatul techn ic

| | |
|---|---|
| Comuniştii | 60% |
| Partidul republican | 30% |
| Guvernamentalii | 20% |
| Restul Partidelor | 15% |

Ce frumoasă socoteală!!! Ce învingere a celor mai elementare principii de aritmetică!

B. BARBĂLATT.

* * *

6. **Numere rimate.** In Suplimentul dela No. 1 D-l I. I. dă un tablou de numere rimate dela 1 la 10, cu excepţiunea numărului 4. Următoarele versuri ale lui EMINESCU împlinesc această lipsă:

„Privitor ca la un teatru Tu în lume să te'nchipui, Joace unul şi pe patru, Totuşi tu ghici vei chipu-i".

DAVID GHEORGHE.

* * *

7. **Sollo!** Comandantul unei şcoli militare rămase foarte surprins că în timpul unei serbări întreaga orchestră a şcolii, afară de un singur violonist, încetă brusc cântatul. Supărat cerù imediat socoteală profesorului, amintindu-i şi de fapta că primeşte leafa în zadar dacă nu a putut să înveţe de cât pe unul ca să cânte. La afirmaţia profesorului că se cântase un „*Sollo*" colonelul răspunse grav:

„*Sollo, Sollo*, dar să cânte toţi!"

GR. ZAPAN.

* * *

8. **Tablele de logaritmi.** Comandantul unui liceu militar intrând în ora de matematici a cl. VI, când tocmai elevii dedeau teza pe ultimul bimestru, rămase foarte surprins constatând că toţi aveau cărţile deschise pe bănci.

„Bine Domnule profesor, ce însemnează asta? D-ta nu vezi că te fură în ochii D-tale? Toţi copiază după cărţi!"

„Nu, Domnule Colonel" răspunse profesorul, „acestea sunt table de logartimi. La calculele ce au de făcut, elevii aplică logaritmii pe care îi iau din table".

„Logaritmi, Nelogaritmi, trebuia să-i înveţe pe din afară!". răspunse Colonelul şi plecă supărat trântind uşa.

GR. ZAPAN.

* * *

9. **Toate numerele sunt nule.** Dacă se ridică la puterea a patra $(1+i)$ şi $(1-i)$, se constată că rezultatele sunt aceleaşi. Deci:

$$1 + i = 1 - i.$$

de unde se deduce imediat $i=0$, care ridicată la patrat ne dă $-1=0$, iar aceasta din nou la patrat, ne dă $1=0$. Deci un număr se formează din precedentul

mărindu-l fie cu 1, ca în şirul natural al numerelor, fie cu 0, în care caz se vede că toate numerele sunt egale, şi egale cu zero.

C. I. GEORGESCU.

* * *

10. **Determinarea infinitului.** Considerăm funcţiunile:

$$u = i \operatorname{arctg} ix \quad \text{şi} \quad v = \mathrm{L}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Luând derivatele acestor funcţiuni obţinem:

$$u = \frac{1}{x^2-1}, \qquad v = \frac{1}{1-x^2},$$

de unde $u' = v'$. Deci suma $(u+v)$ va fi constatată, adică;

$$i \operatorname{arctg} ix + \mathrm{L}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \mathrm{C}.$$

Făcând aci $x = 1$, obţinem:

$$i \operatorname{arctg} i + \infty = \mathrm{C},$$

sau

$$\infty = \mathrm{C} - i \operatorname{arctg} i.$$

C. E. GEORGESCU.

* * *

11. **Derivata unei factoriale,** Considerăm funcţiunea:

$$f = y.x! + x.y!.$$

Presupunem că $f$ este o funcţiune omogenă, de gradul $(m+1)$ şi aplicând teorema lui EULER, obţinem succesiv:

$$xf'_x + yf'_y = (m+1)f,$$

$$x\,[y(x!)' + y!] + y\,[x! + x(y!)'] = (m+1)\;(yx! + xy!),$$

$$(x!)' + (y!)' + (x-1)! + (y-1)! = (m+1)\;[(x-1)! + (y-1)!].$$

Făcând aci $x = y$, obţinem:

$$2(x!)' + 2(x-1)! = 2\,(m+1)\;(x-1)!,$$

$$(x!)' = m\,(x-1)!.$$

C. E. GEORGESCU.

* * *

12. **Pentru amatorii de geometria triunghiului.** Următoarele versuri ale lui SULLY PRUD'HOME vor încurajà pe cei ce se ocupă de geometria triunghiului:

„Je forme un triangle, ô, merveille! Le peuple des lois endormi S'agite avec lenteur, s'eveille Et se deroule à l'infini".

Avec trois lignes sur le sable, Je connais, je ne doute plus! Un triangle est donc préférable Aux mots sonores que j'ai lus?"

I. I.

* * *

13. **Un paradox geometric. Toate dreptele din spaţiu sunt coprinse în acelaş plan.** In adevăr, să considerăm epura unei drepte din spaţiu (*ab*, *a'b'*). Luăm pe epură simetrica dreptei *ab* faţă de linia de pământ, care tae pe *a'b'* în *m'*, ce se proiectează în *m* pe planul orizontal. Punctul (*m*,*m'*) este în primul plan bisector, deoarece el are cota egală cu depărtarea. Luăm la fel simetrica linii *a' b'* faţă de linia de pământ şi găsim punctul (*n*,*n'*), care are şi el depărtarea egală cu cota, şi care deci se găseşte tot în planul bisector al primului diedru. Deci dreapta noastră (*ab*, *a'b'*), care are două puncte în acel plan, va fi coprinsă într'însul în întregime. Şi cum această dreaptă a fost luată arbitrar, reese că toate dreptele din spaţiu se vor găsi coprinse în planul bisector al primului diedru.

B. Barbălatt.

* * *

14. **Bătaia dela Călugăreni,** La un concurs de istorie, un corespondent al *Gazetei* matematice a descris astfel această luptă:

„Mihaiu îşi *adună unităţile* în *număr* de *8000* de oameni şi trece podul; *inerţia masei* inamice este învinsă de *forţa vie* a armatei române. *aplicată* în *punctul* ei despre capătul podului, şi nici *una* din *forţele* care îi veneau în ajutor nu puteă *Echilibra* avântul armatelor lui Mihaiu, care ajunsese la *maximum* de *acţiune*. In acest timp, *serii convergente şi divergente* de împuşcături *scădeau numărul* duşmanilor din tabără. Victoria, această *funcţiune continuu crescătoare* de moral, stă de partea noastră. Insă din tabăra duşmanilor, o *masă* de Turci, condusă de Sinan, este *dirijată* spre Români. Aceştia se luptă eroic, dar le lipsea *numărul, coeficient real* al biruinţei. In cele din urmă, *excesul aritmetic* al musulmanilor asupra creştinilor făcu ca *rezultanta acestui sistem de forţe opuse* să treacă prin *zero* şi să se *dirigeze* de partea Turcilor. Armia noastră formă un *triunghiu variabil* care se mişcă *uniform*, având un *unghiu opus* inamicului iar *latura opusă alunecând* pe drumul ce duce înapoi către strâmtoare".

P. T. Ionescu.

* * *

15. **Mecanica postbelum.** La un curs de mecanică profesorul stabileşte ca ecuaţia generală a mişcării este $s=f(t)$, şi ca să vadă dacă a fost priceput de elevi, cere unuia să deă câtevă exemple de funcţiuni de timp. Elevul, care absolvise liceul înnainte de războiu, nu răspunde. Atunci profesorul îi cere să dea un exemplu de funcţiune de $x$. După multă ezitare elevul zice „Fie $3x+5$" Profesorul îi zice: *„Fie, acum dă-mi şi un exemplu de o funcţiune de timp"*. Elevul, după ce se gândeşte cam multişor, răspunde cam răstit: *„Cinci minute şi trei secunde"*.

G. B.

# GAZETA MATEMATICA

# GAZETA MATEMATICA

## FOAE LUNARA

DE

## MATEMATICI ELEMENTARE SI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XXX

15 SEPTEMBRIE 1924 — 15 AUGUST 1925

BUCURESTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE-FILARET

1924

# LISTA MEMBRILOR
# SOCIETAŢII „GAZETA MATEMATICA“

## DELEGAŢIUNEA PENTRU ANUL XXX *)

A. SALIGNY, GH. EM. FILIPESCU ŞI G. BORNEANU (CASSIER).

## PERSONALUL REDACŢIUNII.

I. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreaţiuni, diverse şi reclamaţiuni privitoare la tipărire.

G. ŢIŢEICA. Raportor.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea şi repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice.*

G. BORNEANU şi GH. ILIESCU. Membri delegaţi pentru corecturi şi imprimarea revistei.

I. IONESCU. Membru delegat pentru aritmetică elementară.

V. CRISTESCU. Membru delegat pentru geometrie elementară şi trigonometrie.

M. GHERMĂNESCU. Membru delegat pentru algebră elementară.

G. A. NICHIFOR. Membru delegat pentru geometria descriptivă.

CR. MATEESCU. Membru delegat pentru mecanica elementară.

MAIOR G. LITEANU şi E. ABASON. Membri delegaţi pentru geometria analitică şi cosmografie.

N. ABRAMESCU. Membru delegat pentru note de matematici superioare.

E. ABASON. Membru delegat pentru probleme propuse de matematici superioare.

M. GHERMĂNESCU. Membru delegat pentru exerciţii şi chestiuni de examen.

G. BORNEANU şi GH. ILIESCU. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.

E. ABASON, N. ABRAMESCU, LT. COL. G. BUICLIU, V. CRISTESCU, M. GHERMĂNESCU, CĂP. I. LINTEŞ, MAIOR G. LITEANU, CR. MATEESCU. O. ŢINO, GH. ZAPAN şi CĂPITAN GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

---

*) Societatea este administrată şi reprezentată de o delegaţie alcătuită din doi membri şi un cassier. (Art. 13 din Statute).

# MEMBRII

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1922, Mart. 1* | Abason E. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Serviciul de Studii şi Construcţii din M. L. P. Asistent la Şcoala Politechnică. — Strada Justinian, 20. Bucureşti. |
| 2 | 1907, Iulie 1 | Abramescu N. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. |
| 3 | 1913, Oct. 7 | Alaci V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.—Piaţa Doja, 12. Timişoara. |
| 4 | 1922, Noem. 4 | Angheluţă Th. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea din Cluj. |
| 5 | 1919, Sept. 12 | Anghelescu A. Doctor în Matematici.—Profesor agregat la Universitatea din Cluj. |
| 6 | 1921, Febr. 5 | Avramescu C. Inginer. — Str. Clopotarii Vechi, 15. Bucureşti. |
| 7 | 1924, Aug. 29 | Baidaff Ig. Bernardo. Doctor în Matematici. — Buenos Aires. |
| 8 | 1911, Febr. 20 | Banciu I. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Spiru Haret.—Str. Lucaci, 95. Bucureşti. |
| 9 | 1912, Aug. 28 | Beleş I. Inginer-Şef. — Director în administraţia centrală a Ministerului Lucrărilor Publice. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti.— Str. Regală 12. Bucureşti. |
| 10 | 1920, Ian. 10 | Borneanu George. Inginer. — Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre.—Str. Sf. Constantin, 31. Bucureşti. |
| 11 | 1920, Ian. 10 | Bratu Gh. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. Prodecan al Facultăţii de Ştiinţe. Profesor la Academia Comercială din Cluj.—Str. Brătianu, 29. Cluj. |
| 12 | 1910, Iunie 21 | Bruckner Victor. Inginer Inspector General.—Directorul serviciului podurilor C. F. R.— Str. Scaune, 33. Bucureşti. |
| 13 | 1920, Aug. 15 | Budeanu I. C. Inginer. — Societatea „Electrica". Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Berzei, 45. Bucureşti. |
| 14 | 1910, Apr. 3 | Buicliu Gh. I. Locot.-Colonel de Artilerie. — Ajutor al Comandantului Şcoalei Speciale a Artileriei. Profesor la Şcoala Specială a Artileriei, la Şcoala militară de Artilerie şi la Şcoala Politechnică din Timişoara. — Şcoala Specială a Artileriei. Timişoara. |
| 15 | 1924, Ian. 30 | Bunescu Al. Inginer. — Str. Progresului, 4. Bucureşti. |
| 16 | 1920, Ian. 10 | Buradescu Traian. Inginer.—Inspecţia II-a Întreţinere C. F. R. — Bulevardul Anastase Stolojan, 63. Craiova. |
| 17 | 1910, Oct. 25 | Bușilă D. C. Inginer.— Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Matei Milo, 2 bis. Bucureşti. |
| 18 | 1921, Mai 4 | Bușilă I. Inginer.—Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti.— Str. Esculap, 6 bis. Bucureşti. |
| 19 | 1914, Iulie 12 | Cambureanu V. Inginer. — Inspector principal la C. F. R. — Str. Sf. Sava, 16. Iaşi. |

*) Data admiterii.

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 1910, Aug. 3 | CAPRIEL DIGRAN. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Democraţiei, 37. Galaţi. |
| 21 | 1922, Noem. 4 | CAPRIEL I. Inginer. — Industriaş. — Str. Visarion, 5. Bucureşti. |
| 22 | 1920, Mart. 1 | CARAMAN E. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Vulturului, 20. Galaţi. |
| 23 | 1920, Ian. 10 | CAZACU N. C. Inginer. |
| 24 | 1914, Dec. 20 | CHIRICUŢĂ A. Inginer-Şef. — Şeful biroului technic al serviciului hidraulic. — Bulevardul Elisabeta, 87. Bucureşti. |
| 25 | 1920, Mart. 1 | CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer.—Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. Pantelimon, 34. Bucureşti. |
| 26 | 1921, Febr. 5 | CIOC M. Inginer.— Director la Creditul Technic.—Str. Marconi, 3. Bucureşti. |
| 27 | 1895, Sep. 15* (fondator) | CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Ministru al Industriei şi Comerţului. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti. |
| 28 | 1910, Apr. 3 | COSTINESCU DAN. Inginer.— Director technic al Fabricii de hârtie Letea. Bacău. |
| 29 | 1895, Sept. 15 (fondator) | CRISTESCU VASILE. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului technic din Direcţia Generală de Construcţii de C. F.— Str. 11 Februarie, 2. Bucureşti. |
| 30 | 1922, Noem. 1 | DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar „Mânăstirea Dealului". Târgovişte. |
| 31 | 1922, Martie 1 | DUMITRESCU ARG. D. Inginer. — Str. Dima Popovici, 18. Craiova |
| 32 | 1918, Ian. 28 | FELIX CORNELIU. Colonel în rezervă.—Str. G. D. Pallade, 72. Bucureşti. |
| 33 | 1909, Iulie 1 | FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director de Studii şi Lucrări la Societatea Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti.— Str. Vasile Lascar, 212. Bucureşti. |
| 34 | 1921, Mai 4 | GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. 11 Iunie, 92. Bucureşti. |
| 35 | 1914, Dec. 20 | GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Şef. — Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti. |
| 36 | 1906, Mart. 4 | GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General.— Directorul General al Serviciului Inbunătăţirilor Funciare.—Str. G. D. Pallade, 35. Bucureşti. |
| 37 | 1921, Febr. 5 | GEORGESCU N. N. Inginer. — Directorul Fabr. de Chibrituri—Cluj. |
| 38 | 1922, Aug. 31 | GHERMĂNESCU MIHAIL. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul Cantemir Vodă.— Str. Popa Nan, 71. Bucureşti. |
| 39 | 1913, Aug. 30 | GHEORGHIU MIRCEA. Inginer. — Comisiunea mixtă a Porţilor de Fier. — Orşova. |
| 40 | 1913, Aug. 30 | GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Şeful Serviciului technic din Direcţia Generală a Construcţiilor de Căi Ferate.—Str. Dionisie, 94. Bucureşti. |

*) Data fondării revistei „Gazeta Matematică". Societatea „Gazeta Matematică", a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

| | | |
|---|---|---|
| 41 | 1921, Mai 4 | Ghimuş A. D. Căpitan. — Comandamentul Şcoalelor şi Centrului de Instrucţie al Geniului. — Str. Vasile Lupu, 18. Bucureşti. |
| 42 | 1910, Iunie 2 | Grigorescu C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice.— Str. Plantelor, 42. Bucureşti. |
| 43 | 1920, Ian. 10 | Gutzu Victor. Inginer. — Directorul Manufacturei de Tutun. — Sf. Gheorghe. Judeţul Trei Scaune. |
| 44 | 1924, Ian. 30 | Ianculescu R. Inginer. Licenţiat în Matematici.— Subşef de Secţie în C. F. R. Direcţiunea Serviciului de Construcţii şi Poduri. — Str. Sublt. Magearu, 17. Focşani. |
| 45 | 1922, Mai 10 | Iliescu Gh. Inginer. — Subdirectorul Fabricelor de Chibrituri şi Timbre. — Fabrica de Chibrituri. Bucureşti. |
| 46 | 1895,Sept. 15 (fondator) | Ioachimescu Gh. Andrei. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Politchnică din Bucureşti.—Str. Buzeşti, 76. Bucureşti. |
| 47 | 1920, Ian. 10 | Ioanovici Aurel. Inginer. — Str. Dr. Felix, 41. Bucureşti. |
| 48 | 1922, Noem. 1 | Ionescu V. D. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Şcoala Normală Superioară. Paris. |
| 49 | 1895, Sept. 15 (fondator) | Ionescu I. Inginer Inspector General. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Preşedinte al Secţiunii Constructorilor. Membru în Consiliul technic superior al Lucrărilor Publice; în Consiliul permanent al Instrucţiunii Publice, pentru secţiunea industrială; în Comitetul de Direcţiune al Poştelor, Telegrafelor şi Telefoanelor; în Comitetul de Direcţiune al Construcţiunilor de căi ferate; Vice-preşedinte al Comisiunii interimare a Capitalei. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Căluşei, 23, Bucureşti. |
| 50 | 1912, Iunie 2 | Jijie Adam. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer Electrician.— Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina. |
| 51 | 1924, Ian. 30 | Kaufmann N. Inginer.—Subşef de Secţie la C. F. R. Comisia de recepţie a materialului de cale.—Hotel Oltenia. Str. Unirii, 5. Reşiţa. |
| 52 | 1905, Martie 1 | Lalescu Tr. Doctor în Matematici. Inginer electrician.— Profesor Universitar. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Deputat. — Str. Vasile Boerescu, 19. Bucureşti. |
| 53 | 1919, Sept. 12 | Linteş I. Căpitan din Aeronautică.— Str. Făgăraş, 14. Bucureşti. |
| 54 | 1921, Mai 4 | Liteanu I. Gh. Maior. — Regimentul de Artilerie Antiaeriană. Profesor la Şcoalele Militare de Geniu şi la Şcoala Militară de Cavalerie. Târgovişte. — Aleea Sebastopol, 27. Bucureşti. |
| 55 | 1913, Aug. 30 | Malcoci C. Inginer-Şef. — Subdirector General R. M. S. — Str. Francmazonă, 5. Bucureşti. |
| 56 | 1921, Febr. 5 | Mareş T. Inginer. — Direcţiunea generală de Studii, Construcţii şi Ape din Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Popa-Tatu, 21. Bucureşti. |
| 57 | 1922. Mai 10 | Mateescu Cr. Inginer. — Societatea „Electrica", Bucureşti.— Str. Maltopol, 12. Bucureşti. |

| | | |
|---|---|---|
| 58 | 1921, Febr. 5 | Mihalopol C. Inginer-Şef.— Str. Profesori, 6 bis. Bucureşti. |
| 59 | 1909, Iunie 1 | Mirea N. Şt. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la şcoala superioară de Arhitectură. — Str. Inundaţiei, 8. Bucureşti. |
| 60 | 1920, Ian. 10 | Mititelu C. Claudiu. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Subdirectorul Manufacturii de tutun „Belvedere". — Bucureşti. |
| 61 | 1920, Ian. 10 | Mititelu C. I. Inginer.—Bulevardul Elisabeta, 60. Bucureşti. |
| 62 | 1906, April. 1 | Moţoi I. Inginer.—Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Dionisie, 59. Bucureşti. |
| 63 | 1909, Noem. 1 | Năsturaş D. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Iulia Hajdeu. Bucureşti. |
| 64 | 1922, Martie 1 | Negretzu I. Inginer de Mine.—Antreprenor minier.—Str. Şerban Vodă, 170. Piteşti. |
| 65 | 1910, Mai 20 | Nichifor A. G. Doctor în Matematici.—Docent şi conferenţiar la Universitatea din Bucureşti. Inspector şcolar. — Str. Dimitrie Racoviţă, 32. Bucureşti. |
| 66 | 1922, Noem. 4 | Nicolau Th. M. Inginer.—Direcţiunea G-lă de Poduri şi Sosele. Ministerul Lucrărilor Publice.—Str. Militari, 20. Bucureşti. |
| 67 | 1920, Oct. 28 | Niculescu Cristea. Inginer-Şef.—Dărmăneşti. Jud. Bacău. |
| 68 | 1923, Iulie 4 | Niculescu Gh. Căpitan de Artilerie.—Strada G-ral Praporgescu, 3. Timişoara. |
| 69 | 1922 Martie 1 | Onicescu O. Doctor în Matematici. —Conferenţiar la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti.—Str. Clopotarii Vechi, 25. Bucureşti. |
| 70 | 1913 Oct. 7 | Orăşanu D. Cezar. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici.—Şef de divizie la Direcţiunea Generală a Construcţiilor de C. F. Profesor la Şcoala de Aerostaţie. Profesor la Şcoala de Topometrie. Membru în consiliul technic al Cadastrului. Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. Ştirbey Vodă, 45. Bucureşti. |
| 71 | 1910, Mai 20 | Orăşanu Gr. Licenţiat în Matematici.—Inspector şcolar. Profesor la Liceul din Ploeşti.—Str. Stănică Marin, 32. Ploeşti. |
| 72 | 1914, Dec. 20 | Panaitescu Sc. General de divizie în rezervă. — Membru corespondent al Academiei Române. Consilier la Banca Românească din Chişinău.—Chişinău. |
| 73 | 1924, Ian. 30 | Paşcanu S. Inginer. — Str. Domnească, 115. Galaţi. |
| 74 | 1911, Dec. 17 | Patriciu G. Titus. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala superioară de Comerţ şi Liceul Naţional.—Str. Lăpuşneanu, 2. Iaşi. |
| 75 | 1920, Oct. 28 | Philippide M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţiune pe Dunăre. — Bucureşti. |
| 76 | 1911, Aug. 11 | Popescu. Gh. Inginer Inspector General. — Director General al Societăţii Naţionale de Credit Industrial. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. General Praporgescu. Bucureşti. |
| 77 | 1922, Aug. 31 | Popescu Ion. Inginer. — Stradela General Lahovary, 5. Bucureşti. |
| 78 | 1910, Aug. 3 | Radu E. M. Inginer-Şef.—Director în Direcţia Generală de Studii şi Construcţii. Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti.— Str. Semilunii, 5. Bucureşti. |

| | | |
|---|---|---|
| 79 | 1920, Aug. 15 | Revici Teofil. Ingîner. — Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. D. Racoviţă, 14. Bucureşti. |
| 80 | 1895, Sept. 15 (fondator) | Roco M. Inginer Inspector General.—Str. General Angelescu, 68. Bucureşti. |
| 81 | 1914, Dec. 20 | Roşu V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic.—Str. Fracmazonă, 68. Bucureşti. |
| 82 | 1914, Dec. 9 | Saligny Anghel. Inginer Inspector General. — Membru al Academiei Române. Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. Basarabia, 10. Bucureşti. |
| 83 | 1904, Sept. 1 | Saligny M. Inginer Inspector General.—Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti.—Str. Basarabia, 10. Bucureşti. |
| 84 | 1920, Ian. 10 | Săpunaru S. Gh. Inginer. — Directorul Societăţi Clădirea Românească.—Str. Semicercului, 7. Bucureşti. |
| 85 | 1920, Aug. 15 | Şerbănescu C. Victor. Inginer.—Str. Berzii, 117—119. Bucureşti. |
| 86 | 1919, Sept. 12 | Sergescu P. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Traian din Turnu-Severin. — Rue de Blainville, 6. Paris. |
| 87 | 1921, Feb. 5 | Sfinţescu C. Inginer. — Directorul Serviciului Cadastrului dela Primăria Capitalei.—Sos. Kiseleff, 25. Bucureşti. |
| 88 | 1910, Aug. 3 | Smântânescu Aurel. Inginer-Şef.—Direcţia II-a de Poduri şi Şosele.—Str. Sf. Ştefan, 35. Bucureşti. |
| 89 | 1923, Iulie 4 | Stamatescu. I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti. |
| 90 | 1920, Ian. 10 | Stan D. Inginer.—Societatea Comunală a Tramvaelor Bucureşti.— Str. Câmpineanu, 34. Bucureşti. |
| 91 | 1900, Noem. 1 | Teodoreanu V. Profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi.—Str. Cuza-Vodă, 22. Iaşi. |
| 92 | 1911, Mai 18 | Teodorescu V. N. Inginer Inspector General. — Director General al Soc. Pietroşani.—Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti. |
| 93 | 1910, Mai 20 | Thierrin H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Scaune, 33. Bucureşti. |
| 94 | 1921, Aug. 31 | Ţino O. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul Gh. Şincai.— Str. Mihail Cornea, 80. Bucureşti. |
| 95 | 1895, Noem. 1 | Ţiţeica Gh. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Membru al Academiei Române. Profesor la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti.— Str. Dionisie, 82. Bucureşti. |
| 96 | 1919, Sept. 12 | Ulescu Al. Inginer.—Director la Creditul Technic Transilvănean.— Calea Victoriei, 23. Cluj. |
| 97 | 1914, Dec. 10 | Vardala I. Inginer Inspector General. — Director General al Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe apă.— Str. Dimineţii, 4. Bucureşti. |
| 98 | 1923, Mart. 26 | Vasilescu Gr. Inginer.—Comisia Europeană a Dunării. — Sulina. |
| 99 | 1920, Ian. 10 | Vasilescu C. I. Inginer. — Directorul Manufacturii de tutun „Iaşi". — Iaşi. |

| | | |
|---|---|---|
| 100 | 1924, Ian. 30 | Zamfirescu Gr. Inginer.—Str. Turturele, 5. București. |
| 101 | 1920, Sept. 28 | Zapan Gh. Licențiat în drept. Avocat.—Str. Nisipari, 10. București. |
| 102 | 1921, Mai 4 | Zapan Gr. Căpitan-aviator (observator). Inginer hotarnic. Profesor la Școala Ofițerilor observatori din avion. — Centrul de Instrucție al Aviației. Tecuci. |

# PREMIILE ŞI ALTE DISPOZIŢIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU

## CURSUL ANULUI 1924—1925.

*(1 Septemvrie 1924 — 31 August 1925)*

In conformitate cu dispoziţiunile art. 11 din regulamentul general al fondurilor «Gazetei Matematice», subsemnaţii membri ai comisiunei pentru controlarea gestiunei acestor fonduri şi pentru privegherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnaţi în adunarea generală care a avut loc în ziua de 31 August 1923, aducem la cunoştinţă următoarele:

1) Din venitul anual al fondului SPIRU C. HARET, conform regulamentului pentru administrarea lui, publicat în «Gazeta Matematică» Vol. XXVI pag. 108, urmează să se cumpere cărţi de matematici pure şi aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, varietăţi şi curiozităţi matematice, aparate şi modele matematice, etc.), care să se doneze bibliotecilor şcolare dela şcoli secundare sau corespondenţilor merituoşi, elevi ai acestor şcoli. Cărţile se vor distribui între începutul anului şcolar şi vacanţa Crăciunului.

In baza hotărîrei luate de Adunarea generală dela 29 August 1924, cărţile de felul celor enumărate mai sus, cumpărate din venitul anului expirat, s'au destinat să se doneze liceului real din Cernăuţi.

2) Din venitul fondului LT. COL. G. TĂNĂSESCU, al cărui regulament a fost publicat în Gazeta Matematică, Vol XXVIII, pag. 19, urmează să se dea cărţi de matematică, primului clasificat la concursurile anuale ale «Gazetei Matematice».

3) Premiul bienal INGINER H. CAPRIEL, în valoare de 500 lei, pentru lucrări de matematici superioare sau pure aplicate, se acordă lucrărilor ce se vor prezentà Societăţei de către: Studenţii Universităţilor, Elevii Şcoalei de Poduri şi Şosele sau de către elevii Şcoalelor de Artilerie, Geniu şi Marină din ţară.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică», anul XVII, pag. 361.

Subiectul lucrărei pentru premiul pe anul 1926 va fi anunţat în «Gazeta Matematică» anul XXX, numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările trebuesc trimise Societăţei cel mai târziu pânăla 1 Mai 1926, iar rezultatul se va publică în numărul din Septembrie 1926 al «Gazetei Matematice».

Premiul este indivizibil, şi'n cazul când nu se va mai găsi nici o lucrare meritorie, se va ţine un nou concurs.

4) Premiul VASILE CONTA în valoare de 200 lei, alimentat din fondurile «Gazetei Matematice», se acordă exclusiv pentru lucrări de filozofie matematică.

Regulamentul acestui premiu s'a publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIX, pag. 14.

Autorul trebue să fie român şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Lucrările trebuesc prezentate pânăla 1 Iulie al fiecărui an, şi în cazul când pânăla această dată nu s'a primit nicio lucrare, se va aşteptă data de 1 Iulie anul următor şi aşà mai departe.

Comisiunea care va examinà lucrările prezentate după 1, 2, 3, etc. ani, va propune pentru premiere una sau două lucrări dintre cele mai bune, cu totalul sumelor strânse an cu an pânăla acea dată, sumă care, dacă intervalul e mai mare de 1 an, se va puteà divide între lucrările alese. Comisiunea va puteà însă să nu recomande niciuna din lucrurile prezentate.

Raportul Comisiunei însărcinată cu cercetarea lucrărilor se va supune desbaterilor adunărei generale extraordinare în cursul lunei Octombrie, iar rezultatul se va publică în numărul din noembrie al «Gazetei Matematice».

5) «Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare» în valoare de 200 lei, se acordă pentru cea mai bună publicaţiune de matematică aplicată la ştiinţele militare apărută în cursul fiecărui an.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» Anul XXIII pag. 9.

Autorul publicaţiunei trebue să fie român sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an. In cazul când nu se găseşte nicio lucrare de premiat, sau în cazul când autorul lucrărei premiate nu voeşte a primì suma de 200 lei, ea se va da uneia din revistele în care se publică şi chestiuni de ştiinţă matematică aplicate şi la ştiinţele militare.

Comisiunea însărcinată cu examinarea publicaţiunilor militare apărute prin reviste sau cărţi speciale, pânăla 1 Septembrie anul trecut, precum şi manuscrisele ce s'ar aduce la cunoştinţa societăţei pânăla acea dată, va întocmi un raport ce se va supune desbaterilor Adunărei Generale extraordinare în cursul lunei Ianuarie.

Premiul se va anunţà în numărul ce apare în luna Martie şi se va acordà lucrărei premiate după apariţia numărului.

6) Din fondul ANGHEL SALIGNY, destinat tipărirei bibliotecei technice a «Gazetei Matematice», nu s'au putut tipări lucrările primite spre publicare, din cauza costului ridicat al tiparului şi al legatului, venitul fondului nefiind suficient pentru acoperirea cheltuelilor. In asemenea condiţiuni, publicarea s'a amânat pentru mai târziu, când sperăm că condiţiunile economice se vor îmbunătăţi.

7) Din fondurile Bibliotecei Gazetei Matematice, se va retipări în cursul anului:

*Culegerea de probleme de Aritmetică.*

COMISIUNEA PENTRU PREMII:
ION A. BELEŞ,
IOAN BUŞILĂ.

## ASUPRA ECUAŢIEI PITAGORICE

$$Z^2 = X^2 + Y^2.$$

Se ştie că soluţia ecuaţiei pitagorice:

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad (1)$$

adică găsirea în numere întregi a unui patrat egal cu suma altor două patrate, este dată de:

$$z = u^2 + v^2, \qquad x = 2uv, \qquad y = u^2 - v^2, \qquad (2)$$

în care $u$ şi $v$ sunt numere întregi arbitrare.

Nu îmi propun a face aci un studiu teoretic al acestei chestiuni, destul de cercetată, ci a face oarecare observaţiuni de ordin practic pentru a găsi oricâte soluţii, urmând mai mult o cale experimentală, care se ştie că a condus chiar la teoreme de teoria numerelor, nedemonstrate încă până azi.

Observăm, mai întâiu, că formulele (2) nu conțin toate soluțiile. Astfel, avem egalitățile:

$$15^2=12^2+9^2;\quad 35^2=21^2+28^2:\quad 195^2=117^2+156^2=48^2+189^2;$$

fără ca 15; 65; 195 să fie sumă a două patrate, cum cere (2) pentru $z$. Observăm însă că egalitățile precedente se pot împărți respectiv cu $3^2$, cu $7^2$, cu $3^2$ și că ne rămân alte numere pitagorice:

$$5^2=4^2+3^2;\quad 5^2=4^2+3^2;\quad 65^2=29^2+52^2=16^2+61^2;$$

iar 5 și 65 corespund ecuației (2) pentru $z$, căci sunt respectiv suma patratelor lui 2 și 1, sau lui 8 și 1. Formulele (2) dau soluțiuni de numere pitagorice prime între ele. Din acestea, se mai obțin altele luând echimultipli ale lor, sau, cu alte cuvinte, găsim toate soluțiile înmulțind numerele din membrul al doilea al formulelor date sub (2) cu un întreg $m$, adică luând:

$$z=m\,(u^2+v^2),\qquad x=2muv,\qquad y=m\,(u^2-v^2).$$

Soluțiile, care corespund lui $m=1$, le voiu numi soluții *fundamentale*, iar pe celelalte soluții *derivate*. Chestiunea se reduce la a găsi soluțiile fundamentale, căci din acestea făcând $m=2;\ 3;\ 4;\ 5;\ldots$ găsim toate soluțiile derivate.

Soluțiile fundamentale dau numere prime între ele, și cum $x$ este totdeauna pereche, reese că $z$ și $y$ vor trebui să fie nepereche. Nu putem ajunge la acest rezultat decât luând pe $u$ și $v$ în (2) de paritate diferită, adică pe $(u-v)$ un număr nepereche.

Diferența $(u-v)$ poate fi dar unul din șirul numerelor nepereche 1; 3; 5;.... Vom zice că o soluție fundamentală intră în *grupa* de ordinul $n$, dacă diferența $(u-v)$ este $(2n-1)$. In grupa I vor intra pentru $u$ și $v$ numerele consecutive, în grupa II, numerele care diferă cu 3, etc. Iată aci toate soluțiile care au $z$ sub 200, aranjate pe grupe:

| Grupa | I | | | | | | | | II | | | | | | | | III | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | 85 | 113 | 145 | 181 | 17 | 29 | 45 | 65 | 89 | 117 | 149 | 185 | 37 | 53 |
| $x$ | 4 | 12 | 24 | 40 | 60 | 84 | 112 | 144 | 180 | 8 | 20 | 36 | 56 | 80 | 108 | 140 | 176 | 12 | 28 |
| $y$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 15 | 21 | 27 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 35 | 45 |

| Grupa | III | | | | IV | | | | V | | | | VI | | VII | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 73 | 97 | 125 | 157 | 193 | 65 | 85 | 109 | 137 | 169 | 101 | 125 | 153 | 185 | 145 | 173 | 197 |
| $x$ | 48 | 72 | 100 | 132 | 168 | 16 | 36 | 60 | 88 | 120 | 20 | 44 | 72 | 104 | 24 | 52 | 28 |
| $y$ | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 63 | 77 | 91 | 105 | 119 | 99 | 117 | 135 | 153 | 143 | 165 | 195 |

Din acest tablou, se desprind mai multe observaţiuni:

1. Valorile lui $z$ din fiecare grupă au diferenţele de ordinul al doilea constante şi anume 4.

2. Dacă, în fiecare grupă, lăsăm la o parte prima valoare a lui $z$, şi sporim pe celelalte cu o aceeaşi constantă, găsim valorile lui $z$ din grupa următoare. Constantele sunt 4; 8; 12; 16.... formând o progresiune aritmetică cu raţia 4.

3. Valorile lui $z$ şi $x$ în grupa de ordinul $n$ diferă cu $(2n—1)^2$. In prima grupă ele sunt deci consecutive.

4. Diferenţele dintre valorile consecutive ale lui $y$ în fiecare grupă sunt aceleaşi, şi anume dublul numerelor nepereche 1; 3; 5;....

Aceste observaţiuni ne permit a prelungi tabloul de mai sus oricât de mult, prin calcule foarte uşoare.

Din examinarea tabloului, se constată că $z$ este de anumite forme, şi anume:

*a)* Numere prime de forma $(4m + 1)$, ca de exemplu 5; 13; 17; 29;....

*b)* Patratele acestor numere.

*c)* Numere compuse având factorii primi numai de forma $(4m+1)$.

*d)* Un mic număr de soluţii la care unii din factorii de acest fel sunt la patrat, ca 45; 117; 125; 153;.... Unor asemenea valori ale lui $z$ nu corespund soluţii fundamentale şi trebuiesc scoase din tabloul de mai sus.

* * *

Din cele expuse până aci, putem scoate un mijloc de a descompune un număr în o sumă de două patrate, dacă acel număr este un număr prim de forma $(4m + 1)$ sau are cel puţin un factor prim de această formă. Altfel de numere nu se pot descompune în sumă de două patrate.

Pentru a se uşură descompunerea, vom formă două şiruri de numere corespondente. Primul şir conţine diferenţele dintre valorile lui $z$ din grupa I şi primul termen 5 al acestei grupe. Al doilea

şir se formează scăzând din primii termeni ai grupelor I, II, III, IV.... pe termenii succesivi ai primului şir, adică $5-0=5$; $17-8=9$; $37-20=17$;.... Scriem dedesuptul şirului al doilea şi grupa care a dat naştere acestui din urmă şir. Avem tabloul:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 8 | 20 | 36 | 56 | 80 | 103 | 140 | 176 | 216 | 260 | 308 | 360 | 416 | 476 | 540 | 608 |
| B | 5 | 9 | 17 | 29 | 45 | 65 | 89 | 117 | 149 | 185 | 225 | 269 | 317 | 369 | 425 | 485 | 549 |
| Grupa | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | XIII | XIV | XV | XVI | XVII |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 680 | 756 | 836 | 920 | 1008 | 1100 | 1196 | 1296 | 1400 | 1508 | 1620 | 1736 | 1856 | 1080 | | |
| B | 617 | 689 | 765 | 845 | 929 | 1017 | 1109 | 1215 | 1315 | 1419 | 1527 | 1639 | 1775 | 1875 | | |
| Grupa | XVIII | XIX | XX | XXI | XXII | XXIII | XXIV | XXV | XXVI | XXVII | XXVIII | XXIX | XXX | XXXI | | |

Cu ajutorul acestui tablou, găsim toate soluţiile pentru $z$ din orice grupă, dacă luăm numărul din şirul B, de deasupra numărului de ordine al acelei grupe şi îl adunăm cu numărul din şirul A scris deasupra şi cu toate numerele ce urmează în acest şir după el. Aşă, de exemplu, găsim numerele din grupa V adunând pe numărul 45 din şirul B succesiv cu 56; 80; 108; 140;....

Să ne propunem a găsi descompunerile lui $425^2$. Acest număr nu se găseşte în şirul A şi deci nu face parte din grupa I. Scădem din 425 numerele şirului B şi constatăm că $425-9=416$ se află în şirul A grupa II, că $425-65=360$ este în grupa VI, că $425-117=108$ se află în şirul A grupa VIII şi că mai departe de grupa X nu trebuie căutate soluţii. Deci, avem soluţii în grupele II, VI şi VIII. Obţinem valorile lui $x$ scăzând din 425 patratele $3^2$, $11^2$, $15^2$, şi obţinem 416; 304 şi 200. Ultima valoare nefiind primă cu 425 nu ne dă soluţiune fundamentală; ea se deduce din soluţia fundamentală a grupei II: 17; 8; 15 înmulţită cu 25. Să căutăm şi celelalte soluţii derivate ale lui 425. Observăm că 425 se poate descompune în $5\times85$; $85\times5$; $25\times17$; $17\times25$. Pentru ultima, corespunde valoarea lui $x$ găsită mai sus, 200. Pentru prima, înmulţim cu 85 soluţia cunoscută 5; 4; 3; pentru a doua, vedem din tabloul precedent că 85 se poate formă adunând 5 cu 80, sau 29 cu 56, cu care găsim pe $x$ egal cu 340 şi 180. Pentru descompunerea $25\times17$, găsim pe aceeaşi cale că $x$ este 408. Cu modul acesta, avem toate descompunerile:

$$425^2=420^2+65^2=416^2+87^2=408^2+119^2=340^2+225^2$$

$= 304^2 + 297^2 = 200^2 + 375^2 = 180^2 + 385^2$.

Valorile lui $y$ s'au găsit pe baza proprietății enunțate a lor, sau prin extragere de rădăcini.

Mai luăm alt exemplu. Fie numărul 1021. Il găsim în grupa X. Valoarea lui $x$ o aflăm scăzând pe $19^2$ și este 660. Se găsește că $y$ este 779.

Este interesant de observat acì că descompunerile în factori ca $5 \times 85$ și $85 \times 5$ nu sunt echivalente, ca și la numerele ideale ale lui KUMMER. Trebuie dar ținut seama de acest fapt, pentru a nu se pierde soluții.

(Va urmă). LEONIDA A. PENENJCHEVÌCI.
(Cetatea Albă).
(21 mai 1924).

## NOTE MATEMATICE

1. *Zece Matematici diverse.* (A se vedeà *Gazeta Matematică* Anul XXVII pag. 150).

1. **Afacerilor.** *I. Edgerton & W. Bartholomew.* — Bussines mathematics. New-York. 1921.
2. **Aplicată.** *Journal de mathematiques pures et appliquées.*
3. **Elementară.** *J. Tropfke.*— Geschichte der Elementar Mathematik. Berlin. 1921.
4. **Financiară.** *F. Insolera.*— Lezioni di matematica financiaria. Turin. 1921.
5. **Industrială.** *W. Farnsworth.* Industrial mathematics. New-York. 1921.
6. **Inginerească.** *H. Egerer.*—Ingenieur-Mathematik. Berlin. 1922.
7. **Practică.** *J. Turner.*—Practical mathematics. Londra. 1922.
8. **Pură.** Vezi No. 2.
9. **Reală.** *G. Beck.* — Real mathematics. Londra. 1922.
10. **Superioară.** *G. Ferroux.* — Mathématiques supérieures. Paris. 1921.

(Va urmà) I. IONESCU.

2. *Asupra calculării sumei puterilor asemenea a primelor* n *numere.* Fie:

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots\ldots + n^m.$$

Pentru a găsi pe S, plecăm dela identitatea:

$$n(n+1) - (n-1)\,n = 2n.$$

Facem aci $n = 1, 2, 3, \ldots n$ şi adunăm. Rezultă:

$$n(n+1) = 2S_1$$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\,n(n+1).$$

Pentru a găsi pe $S_2$ plecăm dela identitatea:

$$n(n+1)(n+2) - (n-1)\,n(n+1) = 3n^2 + 3n.$$

Facem aci $n = 1, 2, 3, \ldots n$ şi adunăm. Găsim:

$$n(n+1)(n+2) = 3S_2 + 3S_1 = 3S_2 + \tfrac{1}{2}\,3n(n+1)$$

$$S_2 = \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(2n+2).$$

Pentru a găsi $S_3$, plecăm dela identitatea:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) = 4n^3 + 12n^2 + 8n.$$

Facem aci $n = 1, 2, 3, \ldots n$ şi avem:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 4S_3^3 + 12S_2 + 8S_1,$$

şi înlocuind $S_1$, $S_2$ găsim:

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

G. I. Grofşoreanu.

3. *Asupra problemei 684.* (G. M. Vol. VIII pag. 232).

La prima soluţie dată acestei probleme se calculează şi limita expresiei:

$$y_n = L^n\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n,$$

când $n \to \infty$. Voiu căutà să dau o soluţie mai uşoară pentru aflarea acestei limite.

Nedeterminarea fiind de forma $1^{\infty}$, iar expresiunea fiind de forma $u^n$, putem scrie:

$$\lim u^n = \lim \left[ (1 + u - 1)^{\frac{1}{u-1}} \right]^{n(u-1)} = e^{\lim n\,(u-1)}$$

şi deci problema se reduce la aflarea limitei expresiei:

$$z_n = \frac{\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}{\frac{1}{n}},$$

sau

$$z_n = \frac{\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}.$$

Dacă trecem la limită găsim o nedeterminare de forma 0/0, deci aplicând regula lui L'HOSPITAL în raport cu $1/n$, avem:

$$\lim z_n = \lim \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} = -\frac{1}{2},$$

deci

$$\lim y_n = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

M. ADAM.
Constanţa.

4. *Asupra unor identităţi.*

Fie polinomul:

$$x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+bc+ca)\,x - abc = (x-a)\,(x-b)\,(x-c),$$

în care, dacă facem $x = 1$, obţinem identitatea:

$$\sum c\,(b-1) + 1 - abc = (1-a)\,(1-b)\,(1-c). \qquad (1)$$

Dacă în (1), facem:

$$a = y/x^2, \quad b = z/y^2, \quad c = x/z^2,$$

obţinem :

$$\sum x^3 (z - y^2) + xyz (xyz - 1) = (x^2 - y)(y^2 - z)(z^2 - x) \quad (2).$$

(Cours d'Algèbre, B. Niewenglowski, vol. I pag. 38).

Dacă în (1), facem

$$a = \beta/\alpha, \quad b = \gamma/\beta, \quad c = \alpha/\gamma,$$

obţinem

$$\sum \alpha^2 (\gamma - \beta) = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha), \qquad (3)$$

sau

$$\sum \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

(Culegere de probleme, Algebră, IV, 28).

Dacă în (3), punem :

$$\alpha = \operatorname{cotg} a, \quad \beta = \operatorname{cotg} b, \quad \gamma = \operatorname{cotg} c,$$

obţinem :

$$\sum \cos^2 a \sin(b-c) \sin b \sin c + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0. \quad (4)$$

(Gazeta Matematică, prob. 3059).

Iar dacă punem :

$$\alpha = \operatorname{tg} a, \quad \beta = \operatorname{tg} b, \quad \gamma = \operatorname{tg} c,$$

găsim :

$$\sum \sin^2 a \sin(b-c) \cos b \cos c + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0. \quad (5)$$

(Gazeta Matematică, XXIX, pag. 109).

Dacă în (1) facem :

$$a = \gamma/\alpha, \quad a = \alpha/\beta, \quad c = \beta/\gamma,$$

obţinem :

$$\sum \alpha\beta (\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha), \qquad (6)$$

din care deducem :

$$\sum \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1 \qquad \sum \frac{1}{a(a-b)(a-c)} = \frac{1}{abc}.$$

(Culegere de probleme, Algebră, IV, prob. 26 şi 24).

Dacă în (1), facem înlocuirea lui $a$ prin $(-a)$ etc., şi apoi facem aceeaşi schimbare ca la (3), obţinem :

$$\sum \alpha^2 (\beta + \gamma) + 2\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha), \qquad (7)$$

în care făcând schimbarea :

$$\alpha = a - b, \qquad \beta = b - c, \qquad \gamma = c - a,$$

obţinem :

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

(Cours d'Algèbre, B. Niewenglowski, vol. I pag. 38).

S'ar puteà continuà cu aflarea identităţilor, fie făcând alte înlocuiri mai sus, fie luând un polinom de grad superior lui trei.

M. Adam.

## BIBLIOGRAFIE.

**Foaia matematică.** Anu I. No. 8. Aust 1924. Chişinău. Asupra teoremei ortopolului şi isopolului, ne B. M. Barbălatt.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul IV No. 6. August 1924. Timişoara. Aflarea directă a maximului unui produs şi minimului unei sume, de V. Alaci.

Ioan Dumitriu. Exerciţii şi probleme de Algebră elementară. Partea I. Timişoara. 1924. Preţul 40 lei. De vânzare la „Cartea Românească" Sucursala Timişoara, str. Eugen de Savoya No. 7, şi la autor, Arad, str. Bucur No. 5.

## CERERI.

115. Ce unităţi de măsură vechi româneşti au mai rămas în uz în Transilvania, Bucovina şi Banat ?

I. I.

## PROBLEME REZOLVATE.

PROBLEMA 3117. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{a(x-1)^2+x(a-1)^2-2(1-x+ax-a)\sqrt{ax}}{a(x+1)+x(a+1)^2-2(1+x+ax+a)\sqrt{ax}}=ax.$$

MAIOR GH. I. LITEANU.

Soluție dată de D-l ALEX. TAUBER (Botoșani).
Ecuația dată se poate scrie succesiv:

$$\left[\frac{\sqrt{a}(x-1)-\sqrt{x}(a-1)}{\sqrt{a}(x+1)-\sqrt{x}(a+1)}\right]^2=ax$$

$$\left[\frac{(\sqrt{ax}+1)(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{ax}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{a})}\right]^2=ax.$$

Putem simplifică cu $(\sqrt{x}-\sqrt{a})$, și în acest caz, pentru $x=a$, avem o soluție pentru ecuația dată, numai dacă

$$\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2=a^2.$$

Simplificând și extrăgând rădăcina pătrată, avem

$$\frac{\sqrt{ax}+1}{\sqrt{ax}-1}=\pm\sqrt{ax}.$$

De unde, deducem:

$$a(\sqrt{x})^2-2\sqrt{a}\sqrt{x}-1=0 \quad \text{și} \quad ax+1=0$$

$$\therefore \qquad \sqrt{x}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \quad \text{și} \quad x=-\frac{1}{a},$$

sau rădăcinile

$$x_{1,2}=\frac{(1\pm\sqrt{2})^2}{a} \quad ; \quad x_3=-\frac{1}{a},$$

ce verifică ecuația dată.

Soluții analoage s'au primit dela D-nii: M. ADAM, B. M. BARBĂLATT, GH. I. BOGDAN, O. BOLGIU, N. BOTEA, O. BURȘTIN, R. CĂDERE, L. CĂLDĂRARU, I. COȘEREANU, V. GABRIELESCU, EUG.

D. Georgescu, C. Giurumescu, O. Ianculescu, Gh. Ionescu-Zane, P. Katz, G. Mateescu, Gh. Mihoc, A. Novac, D. G. Niculescu, Al. Opran, N. N. Popescu, Edg. Russu, C. Schönfeld, N. Segârceanu, M. I. Simionescu, W. Solomon, M. Stamatiu-Pitești, D. M. Teodorescu, V. Vârlan, L. Weiss.

S'au primit soluții și dela D-nii: Tr. Angelescu, N. P. Arcadian, G. Basacov, D. Blumenfeld, M. H. Brătescu-Danubiu, C. I. Ciorănescu, V. Cosniță, Th. Diaconescu, Șt. Epure, O. M. Floroscu, Chiriac Georgescu, Marius Georgescu, I. N. Georgescu-Val, Gh. Ghimicescu, F. Goldstein, M. Goldstein, I. L. Grigorescu, G. Huzureanu, Dima Iliescu, I. P. Iliescu, Paul I. Ionescu, J. Th. Lăzărescu, Șt. Fl. Lăzărescu, M. Mendelsohn, R. Mihăilescu, I. M. Miu, Fl. Negretzu, E. Pălărieru, Aurel Panaitescu, M. S. Pătroianu, Marin Dem. Popescu, I. Th. Popovici, Șt. Rădulescu, B. Reinhorn, S. Ringler, Osias M. Schächter, Ern. Schlifca, I. A. Sergheiev, Gh. D. Simionescu, C. Stănculescu, Marin Ștefan, I. St. Teodorescu, N. Teodorescu, Tr. Udrisky, M. A. Vasilescu, I. C. Vasiliu, Laurențiu Vlațiu, Boris Vulpanovici, Al. Zamfirescu.

---

PROBLEMA 3139. *Să se demonstreze că, în orice triunghiu, avem relațiunea*

$$\frac{p+a}{p-a}+\frac{p+b}{p-b}+\frac{p+c}{p-c}=\frac{8R}{r}-1,$$

*notațiunile fiind cele obișnuite.*

Marin A. Rădulescu.

I. Soluție dată de D-nii: Marin Ștefan (Constanța) și Eug. Pălărieru (București).

Pornim dela relațiunea

$$ar_a+br_b+cr_c=2p(2R-r),$$

stabilită de D-l V. Cristescu, în «G. M.», vol. XXVI, pag. 156.

Impărțind această relațiune cu

$$S=r_a(p-a)=\ldots.=pr,$$

avem

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{2(2R-r)}{r}.$$

Inmulţind cu doi ambele părţi şi adunând apoi în ambele părţi numărul trei, obţinem:

$$\frac{2a}{p-a}+1+\frac{2b}{p-b}+1+\frac{2c}{p-c}+1=\frac{8R-4r}{r}+3$$

$$\therefore \qquad \frac{p+a}{p-a}+\frac{p+b}{p-b}+\frac{p+c}{p-c}=\frac{8R}{r}-1,$$

tocmai relaţiunea din enunţ.

II. Soluţie dată de D-l MARIN ŞTEFAN (Constanţa).

Pornim dela relaţia

$$2pr_a+2pr_b+2pr_c=2p(4R+r),$$

pe care împărţind-o cu

$$S=r_a(p-a)=\ldots.=pr,$$

obţinem

$$\frac{2p}{p-a}+\frac{2p}{p-b}+\frac{2p}{p-c}=\frac{2(4R+r)}{r}.$$

Scăzând în ambele părţi ale acestei egalităţi, trei unităţi, avem

$$\frac{p+a}{p-a}+\frac{p+b}{p-b}+\frac{p+c}{p-c}=\frac{8R+2r}{r}-3=\frac{8R}{r}-1,$$

adică relaţiunea din enunţul problemei.

III. Soluţie dată de D-nii: ION TH. POPOVICI (Liceul Mihai-Viteazul) şi AUREL G. PANAITESCU (Liceul Brăila).

Plecăm dela relaţiunile cunoscute:

(1) $$r_a+r_b+r_c=4R+r.$$

(2) $ar_a+br_b+cr_c=2p(4R-r)$ (probl. 2762 de D-nul V. CRISTESCU, «G. M.», vol. XXVI, pag. 156).

Relaţiunile (1) şi (2) pot fi scrise respectiv:

(3) $$\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}=\frac{4R}{r}+1.$$

(4) $$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{4R}{r}-2.$$

Adunând relaţiunile (3) şi (4), parte cu parte, se obţine tocmai relaţiunea din enunţul problemei.

Au rezolvat foarte bine problema, trimiţând una sau mai multe soluţii, ce se bazează pe amândouă sau pe una din relaţiunile (1) şi (2), D-nii: M. I. Adam, Tr. Angelescu, N. Arcadian, D. Blumenfeld, M. C. Bogdan, L. Brüll, Oct. Burstin, R. Cădere, C. I. Ciorănescu, I. Gh. Constantinescu, Gh. Cosmovici, I. N. Dragomir, Şt. Epure, Marius Georgescu, Mauriciu Gheller, Gh. Ghimicescu, C. Giurumescu, E. Gulian, Gh. Huzuneanu, Angelo Ionescu, Ilie Ionescu-Brezuica, Ioan I. Ionescu, Paul Ionescu, Symon Katz, V. M. Lăzărescu, V. I. Lepădatu, I. I. Marinescu, Ad. Novac, Gh. I. Oprescu, M. I. Pătroianu, Ov. Popea, Dorin Popescu, Marin Dem. Popescu, Ide-Arie S. Schächter, Gh. D. Simionescu, Petre Spacu, M. I. Stamatiu, Gh. Stănculescu, Marin Ştefan, Ion N. Suşelescu, Alex. Tauber, G. G. Tudorache, A. Urzică, V. Vârlan, I. C. Vasiliu, Laurenţiu Vlaţiu, Leon Weiss, S. Weiss.

IV. Soluţie dată de D-l Marin Ştefan (Constanţa).

Din relaţia cunoscută

$$r_a = p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A,$$

deducem

$$r_a + a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = (p+a)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A \quad \text{şi}$$

$$r_a - a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = (p-a)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A$$

$$\therefore \quad \frac{p+a}{p-a} = \frac{r_a + a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A}{r_a - a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A}.$$

Cum $\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = (r_a - r)/a$, rezultă

$$(1) \qquad \frac{p+a}{p-a} = \frac{2r_a - r}{r}.$$

In mod analog

$$(2) \quad \frac{p+b}{p-b} = \frac{2r_b - r}{r} \quad \text{şi} \quad (3) \quad \frac{p+c}{p-c} = \frac{2r_c - r}{r}.$$

Adunând relaţiile (1), (2) şi (3), obţinem:

$$\sum \frac{p+a}{p-a} = \frac{2\Sigma r_a - 3r}{r} = \frac{8R-r}{r} = \frac{8R}{r} - 1.$$

In acelaş mod, plecând dela relaţia $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = r/(p-a)$, D-l MARIN ŞTEFAN, punând-o sub forma

$$2\frac{p}{r}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{2p}{p-a} = \frac{p+a}{p-a} + 1,$$

ajunge la relaţia

$$\sum\frac{p+a}{p-a} = \frac{2p}{r}\sum\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - 3$$

şi ţinând seamă că

$$\sum\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sum\frac{r_a}{p} = \frac{4R+r}{p},$$

se ajunge la relaţiunea din enunţ.

Au rezolvat foarte bine problema, servindu-se de relaţiunele dintre $p$, $r$, $r_a$...., tang sau cotang unghiurilor A,...., precum şi de relaţia $\Sigma r_a = 4R + r$, D-nii: N. G. BOTEA, M. H. BRĂTESCU-DANUBIU, GH. V. CAZAN, V. COŞNIŢĂ, P. MIRESCU, ŞT. FL. LĂZĂRESCU, M. MENDELSOHN, S. I. RINGLER, G. STĂNCIULESCU, D. M. TEODORESCU, M. A. VASILESCU, S. WEISS.

V. Soluţie dată de D-nii: MARIN GH. DUMITRESCU, M. I. ADAM, EM. BERCOVICI, ŞT. BOJU-ROSETEL, GH. GRADING, ŞT. FL. LĂZĂRESCU, NICOLAE NICOLESCU, B. REINHORN.

Aducând la acelaş numitor partea întâia a relaţiunei date şi făcând reducerile, obţinem

$$\sum\frac{p+a}{p-a} = \frac{p}{S^2}[p^3 - p(ab+bc+ca) + 3abc].$$

Dar se ştie că

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$$

şi $$abc = 4Rs.$$

Prin urmare

$$\sum\frac{p+a}{p-a} = \frac{8Rsp - p^2r^2}{S^2} = \frac{8Rp - S}{S} = \frac{8Rp - pr}{pr} = \frac{8R}{r} - 1.$$

Au rezolvat foarte bine problema, aducând partea întâia la acelaş numitor şi ţinând seama de relaţiile $abc = 4Rs$; $a+b+c=2p$; sau verificând că ambele părţi ale relaţiunei date conduc prin dife-

rite înlocuiri la o aceeaşi expresiune; D-nii: AD. NOVAC, REISS BEIMBARDT, P. BLEIWEISS, GH. P. BOGDAN, N. G. BOTEA, L. CĂLDĂRARU, CONSTANTIN-IOAN V. ARGHIR, N. N. CONSTANTINESCU, IONEL N. COSTĂCHESCU, AL. A. DUMITRESCU, ALEX. ENE, M. I. FOCŞENEANU, MARCUS FROIM, EUG. D. GEORGESCU, MARCEL GOLDSTEIN, GH. D. IONESCU-ZANE, ROMEO MIHĂILESCU, GH. MIHOC, AL. MLADENOVICI, DUM. S. NICULESCU, AL. OPRAN, EMILIAN POPP, ED. C. RUSSU, DUMITRU SAMOILĂ, OZIAS M. SCHÄCHTER, MIRCEA G. STAVRAT, AL. B. TOMESCU, V. ZAGHER.

Alte soluţii s'au primit dela D-nii: TR. UDRISCHY, M. I. SIMIONESCU, FILIP GOLDSTEIN, G. GROFŞOREANU, I. L. GRIGORESCU, TR. TUNARU, V. DORNEANU, I. VLADEA, I. ST. TEODORESCU.

In ultimul timp, s'au primit soluţii dela D-nii: DIMA ILIESCU, ION MIU, AURELIU STOICA, BORIS VULPANOVICI şi AL. ZAMFIRESCU.

*Notă.* D-nii: MARIN ŞTEFAN, ST. FL. LĂZĂRESCU, L. WEISS şi N. P. ARCADIAN, au trimis şi un şir de relaţiuni analoage, dat atât din lipsă de spaţiu, cât mai ales din cauză că unele din acele relaţiuni nu sunt exacte, regretăm că nu le putem publică şi rămâne ca D-lor să le verifice şi să le trimită spre publicare ca exerciţii.

MAIOR GH. I. LITEANU.

---

PROBLEMA 3159. *Fie* R *raza cercului circumscris unui triunghiu* ABC *şi* $d_a$, $d_b$, $d_c$ *porţiunile din diametrele cercului circumscris, cuprinse între vârfuri şi laturile opuse* a, b, c. *Să se demonstreze relaţiunile:*

$$\frac{a^2}{d_a}+\frac{b^2}{d_b}+\frac{c^2}{d_c}=6R,$$

$$\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}=\frac{2}{R}.$$

MIRCEA ADAM.

Soluţie dată de D-nul IOAN N. DRAGOMIR (Absolvent al Lic. Cantemir Vodă).

Fie A' punctul unde diametrul AO taie a doua oară cercul circumscris şi $A_1$ punctul de intersecţie al lui AO cu latura BC.

Avem $\sphericalangle BAA' = 90^0 - \sphericalangle BA'A = 90^0 - C$ şi tot astfel $\sphericalangle CAA' = 90^0 - B$.

In triunghiul $BAA_1$ avem atunci

$$AA_1 : \sin B = BA_1 : \cos C \qquad \therefore \quad BA_1 = d_a \cos C : \sin B. \tag{1}$$

Analog triunghiul $CAA_1$ ne dă

$$CA_1 = d_a \cos B : \sin C. \tag{2}$$

Adunând (1) cu (2), parte cu parte, obţinem:

$$a = d_a \left( \frac{\cos C}{\sin B} + \frac{\cos B}{\sin C} \right). \tag{3}$$

In acelaş mod, găsim două expresii analoage pentru $d_b$ şi $d_c$. Formula (3) ne dă imediat

$$\frac{a^2}{d_a} = \frac{a \cos B}{\sin C} + \frac{a \cos C}{\sin B}.$$

Avem deci:

$$\sum \frac{a^2}{d_a} = \frac{1}{\sin A}(b \cos C + c \cos B) + \frac{1}{\sin B}(c \cos A + a \cos C) + \frac{1}{\sin C}(a \cos B + b \cos A)$$

$$\therefore \quad \sum \frac{a^2}{d_a} = \frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} = 3 \times 2R = 6R,$$

ceeace demonstrează prima relaţie propusă.

Formula (3) ne mai dă

$$\frac{1}{d_a} = \frac{1}{a}\left( \frac{\cos C}{\sin B} + \frac{\cos B}{\sin C} \right) = \frac{1}{2R}\left( \frac{\cos C}{\sin A \sin B} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} \right).$$

Avem deci

$$\sum \frac{1}{d_a} = \frac{1}{2R} \sum \left( \frac{\cos C}{\sin A \sin B} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} \right) = \frac{2}{2R} \sum \frac{\cos C}{\sin A \sin B}.$$

Se ştie însă că [1]) $\sum \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$; deci

$$\sum \frac{1}{d_a} = \frac{2}{R}.$$

---

1) *Culegere de Probleme*, Trigonometria, XVII. 21, p. 395.

II. Soluție dată de D-nii: EMIL ȘTEFĂNESCU, MARIN ȘTEFAN, ȘTEFAN T. EPURE, N. P. ARCADIAN, FILIP GOLDSTEIN, P. A. MIRESCU, TRAIAN UDRISKY, NICOLAE I. NICOLESCU, ALEXANDRU TAUBER.

Fie $A''$ piciorul înălțimei ce pleacă din A. In triunghiul dreptunghic $AA_1A''$ unghiul $A_1AA''$ fiind egal cu $\pm(B-C)$, avem

$$d_a = \frac{h_a}{\cos(B-C)} = \frac{2R\sin B \sin C}{\cos(B-C)} \tag{4}$$

și, în același mod, găsim două expresii analoage pentru $d_b$ și $d_c$.

Formula (4), ne dă:

$$\frac{a^2}{d_a} = \frac{a^2\cos(B-C)}{2R\sin B \sin C} = \frac{2R\sin^3 A \cos(B-C)}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Avem deci

$$\sum \frac{a^2}{d_a} = \frac{2R}{\sin A \sin B \sin C} \sum \sin^3 A \cos(B-C).$$

Ținând însă seamă de relația [2]):

$$\sum \cos^3 \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}(B-C) = 3\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C,$$

care are loc și când înlocuim unghiurile A, B, C prin $(\pi - 2A)$, $(\pi - 2B)$, $(\pi - 2C)$ a căror sumă este tot $\pi$, găsim că

$$\Sigma \sin^3 A \cos(B-C) = 3\sin A \sin B \sin C$$

și, prin urmare,

$$\sum \frac{a^2}{d_a} = 6R.$$

Pentru a demonstră a doua relație, observăm că formula (4), ne dă

$$\frac{1}{d_a} = \frac{\cos B \cos C + \sin B \sin C}{2R\sin B \sin C} = \frac{1}{2R}(\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + 1)$$

$$\therefore \sum \frac{1}{d_a} = \frac{1}{2R} \sum (\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + 1) = \frac{1}{2R}(3 + \sum \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C)$$

---

2) A se vedea *Gazeta Matematică*, Vol. XXIX, problema 3099, p. 154.

Se ştie însă [1]) că $\sum \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C = 1$ ; deci :

$$\sum \frac{1}{d_a} = \frac{2}{R}.$$

III. Soluţie dată de D-nii: Marin Ştefan, I. I. Marinescu, Ion Vasiliu, Const. I. Ciorănescu, Gh. D. Simionescu, Gh. Huzuneanu, N. G. Botea, Paul I. Bleiweiss, Dorin Popescu, Paul I. Ionescu, Mircea A. Vasilescu, Gh. D. Ionescu-Zane, Benedict A. Reinhorn, Leon M. Brüll, Leon Căldăraru, Ovidiu G. Popea, C. Giurumescu, Marius Georgescu, Eugen Georgescu, Adrian Novac, Mihai Ch. Bogdan, Octav H. Burstin, S. Tudorache, David M. Blumenfeld, Ion Th. Popovici.

Se ştie [2]) că porţiunea din diametrul cercului circumscris cuprinsă între vârful A şi latura BC este dată de formula

$$d_a = \frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{\sin 2B + \sin 2C} = \frac{2S}{R(\sin 2B + \sin 2C)}.$$

Avem deci

$$\sum \frac{a^2}{d_a} = \frac{R}{2S} \sum a^2(\sin 2B + \sin 2C) = \frac{R}{2S} \sum (a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A).$$

Avem însă [3]):

$$a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = c^2 \sin 2A + a^2 \sin 2C = 4S$$

şi, înlocuind în relaţia precedentă, obţinem prima expresie cerută.

A doua expresie se poate scrie :

$$\sum \frac{1}{d_a} = \frac{R}{S}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = \frac{4R}{S} \sin A \sin B \sin C$$

$$\therefore \quad \sum \frac{1}{d_a} = \frac{2}{R}, \text{ căci se ştie că } S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

*Observaţii.* 1. D-nii : Emil Ştefănescu, Marin Ştefănescu, N. P. Arcadian şi Ovidiu G. Popea arată că partea a doua a problemei este o consecinţă imediată a următoarei teoreme de geometrie :[4])

---

1) A se vedea : *Culegere de Probleme*, Trigonometria, XVII, 11, p. 394.

2) *Culegere de Probleme*, Trigonometria, XIX, 30, pag. 404.

3) *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, Ex. 90, pag. 478.

4) A se vedea : F. G. M. *Exercices de Géométrie*, sixième édition, Théorème 165, pag. 75.

*Dacă trei drepte* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, *eşite din vârfurile unui triunghiu şi mărginite la laturile opuse, se taie într'un acelaş punct* O, *avem relaţiunea*

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=2. \qquad (5)$$

Dacă O este centrul cercului circumscris, atunci AO=BO=CO=R şi relaţia de mai sus nu este decât cea de a doua relaţie propusă.

2. După propunerea problemei, D-nul MIRCEA ADAM ne arată că partea a doua a problemei a mai fost propusă în *Gazeta Matematică*, Vol. XII, pag. 170, ca exerciţiu sub No. 40, de D-nul N. ABRAMESCU şi rezolvată acolo tot cu ajutorul relaţiei (5) de mai sus.

---

PROBLEMA 3168. *In ce caz ecuaţiile:*

$$x^m+px^n+q=0, \qquad x^m+qx^n+p=0,$$

*în care* p *diferă de* q, *au o rădăcină comună?*

I. IONESCU.

Scăzând ecuaţiile date, avem:

$$(p-q)(x^n-1)=0$$

şi cum $(p-q)$ nu poate fi 0, trebuie ca:

$$x^n-1=0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii binome sunt date de

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}. \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1).$$

Din cauză că $x^n=1$, ecuaţiile se reduc la:

$$x^m+p+q=0,$$

$$\therefore \qquad x^m=-(p+q).$$

$$\therefore \qquad [-(p+q)]^n=x^{mn}=(x^n)^m=1.$$

Aceasta este condiţiunea ca ecuaţiile date să aibă o rădăcină comună.

Astfel, când $m=2$, $n=1$ găsim $p+q+1=0$ şi rădăcina comună este 1.

Dacă $m = 3$, $n = 2$ găsim $p + q \pm 1 = 0$ şi rădăcina comună este 1 sau $(-1)$.

Dacă $m = 5$, $n = 3$ găsim $p + q + 1 = 0$, sau $p + q + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = 0$.

E. ŞTEFĂNESCU.

O soluţie ingrijită, dar cu o mică eroare, a fost dată de D-l A. TAUBER.

Au dat condiţia ca 1 să fie soluţia comună, D-nii: M. H. BRĂTESCU-DANUBIU, E. PĂLĂRIERU, M. ADAM, I. M. MIU, E. ILIESCU, M. MLADENOVICI, C. CIORĂNESCU.

Celelalte soluţii erau eronate, sau prea complicate.

---

PROBLEMA 3183. *Un număr de patru cifre, împărţit cu suma cifrelor lui, dă câtul 334 fără rest. Care sunt numerele care satisfac această condiţie? Să se examineze şi cazul când împărţirea dă un rest.*

E. ŞTEFĂNESCU.

Să considerăm cazul general când împărţirea dă un rest R, care va fi nul pentru prima parte a problemei. Fie $m$, $s$, $z$, $u$, cifrele numărului căutat. Vom avea:

$$1000m + 100s + 10z + u = 334(m+s+z+u)+R, \qquad R < m+s+z+u.$$

De aci, scoatem:

$$666m = 234s + 324z + 333u + R,$$

$$333(2m - z - u) = 234s - 9z + R. \qquad (1)$$

Numerele 333 şi 234 se divid cu 9. Trebuie dar ca R să se dividă cu 9. Să punem dar:

$$t = 2m - z - u, \qquad R = 9r \qquad r < \tfrac{1}{4}(m+s+z+u). \qquad (2)$$

Vom avea:

$$37t = 26s - z + r,$$

$$z = 26s - 37t + r \qquad (3)$$

şi înlocuind pe $t$ în (2), avem:

$$u = 2m - 26s + 36t - r. \qquad (4)$$

Egalitățile (3) și (4) rezolvă problema ținând seamă de ultima condițiune (2) și de faptul că cifrele $m$, $s$, $z$, $u$ nu pot trece peste 9 și că $m$ nu poate fi 0. Pe de altă parte, cum suma cifrelor nu poate trece peste $4 \times 9 = 36$, reese din (2) că $r < 4$. Deci nu putem avea decât $r = 0$; 1; 2; 3 la care corespund după (2) pentru R valorile 0; 9; 18; 27.

Din cauză că $0 \leqslant z \leqslant 9$ și $0 \leqslant r \leqslant 3$, deducem din (3):

$$-3 \leqslant 26s - 37t \leqslant 9. \qquad (5)$$

Cum $0 \leqslant s \leqslant 9$, să dăm lui $s$ aceste valori și să vedem dacă găsim pentru $t$ valori care să satisfacă această condițiune. Pentru aceasta, să facem primii multipli de 26 și pe cei apropiați ai lui 37. Avem tabloul:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s =$ | 0 ; | 1 ; | 2 ; | 3 ; | 4 ; | 5 ; | 6 ; | 7 ; | 8 ; | 9; |
| $26s =$ | 0 ; | 26 ; | 52 ; | 78 ; | 104 ; | 130 ; | 156 ; | 182 ; | 208 ; | 234; |
| $t =$ | 0 ; | 1 ; | 2 ; | | 3 ; | 4 ; | | 5 ; | 6 ; | 7; |
| $37t =$ | 0 ; | 37 ; | 74 ; | | 111 ; | 148 ; | | 185 ; | 222 ; | 259. |

Se vede de aci că nu vom puteà lua decât: $s = 0$, $t = 0$; $s = 3$, $t = 2$; $s = 6$, $t = 4$; $s = 7$, $t = 5$.

In aceste cazuri, relațiile (3) și (4) dau:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s =$ | 0 ; | 3 ; | 6 ; | 7 , |
| $z =$ | $r$ ; | $r + 4$ ; | $r + 8$ ; | $r - 3$ , |
| $u =$ | $2m - r$ ; | $2m - r - 6$ ; | $2m - r - 12$ ; | $2m - r - 2$, |
| S = | $3m$ ; | $3m + 1$ ; | $3m + 2$ ; | $3m + 2$ , |

în care $S = m + s + z + u$ este suma cifrelor.

Să dăm acum valori lui $r$, adică lui R.

a) *Restul este 0.* Se vede că $s = 7$ dă $z < 0$ pentru $R = r = 0$. Celelalte ne dau:

$s=0$, $z=0$, $u=2m$; $s=3$, $z=4$, $u=2m-6$; $s=6$, $z=8$, $u=2m-12$.

Pentru ca $u$ să aibă valori admisibile, trebuie ca să avem respectiv:

$$0 < m < 5, \qquad 2 < m < 8, \qquad 5 < m,$$

care dau următoarele 13 soluții: 1002; 2004; 3006; 4008; 3340; 4342; 5344; 6346; 7348; — 6680; 7682; 8684; 9686.

b) *Restul este 9.* Pentru $R = 9$, avem $r = 1$. Se vede că lui $s = 7$ îi corespunde $t < 0$. Celelalte dau:

$s=0, z=1, u=2m-1$; $s=3, z=5, u=2m-7$; $s=6, z=9, u=2m-13$.

Cum $S > 9$, reese că trebue să luăm respectiv:

$$3 < m, \qquad 2 < m, \qquad 2 < m.$$

Pentru ca $u$ să fie pozitiv sau nul și mai mic ca 10, trebue:

$$1 \leqslant m \leqslant 5, \qquad 4 \leqslant m \leqslant 8, \qquad 7 \leqslant m,$$

care dau următoarele 10 soluții: 4017; 5019; — 4351; 5353; 6355; 7357; 8359; — 7691; 8693; 9695.

c) *Restul este 18.* Pentru $R = 18$, avem $r = 2$. Se vede că lui $s = 6$ îi corespunde $z > 9$ și lui $s = 7$, $z < 0$. Celelalte valori ne dau:

$s = 0,\ z = 2,\ u = 2m - 2$; $\qquad s = 3,\ z = 6,\ u = 2m - 8$.

Cum $S > 18$, reese că trebue să avem respectiv:

$$7 < m, \qquad 6 < m.$$

Pentru ca $u$ să iasă de o cifră, trebue:

$$1 \leqslant m \leqslant 5, \qquad 4 \leqslant m \leqslant 8.$$

In primul caz, nu avem soluții; putem lua $m = 6; 7; 8$ care ne dă 3 soluții: 6364; 7366; 8368.

d) *Restul este 27.* Pentru $R = 27$, avem $r = 3$. Cum $S > 27$, se vede că în cazul $s = 0$, ar trebui să luăm $m > 9$. Cazul $s = 6$ conduce la $z > 9$. Celelalte ne dau:

$s=3,\ z=7,\ u=2m-9$; $\qquad s=7,\ z=0,\ u=2m-5$.

Pentru ca să avem $S > 27$, nu putem lua decât $m = 9$, care dă $u = 9$ în primul caz și $u > 9$ în al doilea. De acî, o singură soluție: 9379.

Problema admite dar următoarele 27 soluțiuni, în ordinea mărimii lor:

*1002; 2004; 3006; 3340; 4008; 4017; 4342; 4351; 5019; 5344; 5353; 6346; 6355; 6364; 6680; 7348; 7357; 7366; 7682; 7691; 8359; 8368; 8684; 8693; 9379; 9686; 9695.*

I. I.

Au găsit numai soluţiile fără resturi, D-nii: L. GENAZZINI, M. DRĂGHICEANU, O. BRAIEŞTER, DAVID GHEORGHE, P. BLEIWEISS, I. MIU, N. ARCADIAN, N. BOTEA.

Au dat: 9 soluţii fără rest, D-l E. PĂLĂRIERU şi 4 D-l I. ŢIGOIU.

## EXERCIŢII.

1. Să se găsiască forma numerelor a căror sumă divizată prin suma rădăcinilor lor patrate, dă drept cât o rădăcină, iar rest cealaltă rădăcină.

STĂNCULESCU I. CONST.

R. Inlocuind în relaţia: $D = I \times C + R$, avem,

$$x+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

$$\therefore \quad y=\sqrt{y}(\sqrt{x}+1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{y}=\sqrt{x}+1,$$

adică numerele sunt patrate de numere consecutive.

2. Un număr este $\not\equiv 41$ când suprimându-i ultima cifră şi scăzând din numărul rămas de 4 ori cifra suprimată, rezultatul este $\not\equiv 41$.

ALEXANDRU TAUBER.

R. Insemnând cu N numărul şi cu $u$ ultima lui cifră, avem:

$$\frac{N-u}{10} - 4u \not\equiv 41$$

$$\therefore \quad N-41u \not\equiv 41 \qquad \therefore \quad N \not\equiv 41.$$

3. Să se arate că expresiunea:

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}},$$

este raţională.

CONSTANTIN I. GEORGESCU.

R. Dacă:

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=x,$$

$$x^3=(9-4\sqrt{5})+(9+4\sqrt{5})+3\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\sqrt{9+4\sqrt{5}}.x,$$

$$\therefore \quad x^3-3x-18=0,$$

$$\therefore \quad (x-3)(x^2+3x+6)=0. \qquad (1)$$

Ecuaţia (1) dă o singură rădăcină reală:

$$x=3,$$

deci:

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=3.$$

4. Fie $A_1$, $B_1$, $C_1$, punctele unde înălțimile unui triunghiu ABC taie a doua oară cercul circumscris și H ortocentrul. Perpendiculare duse în $B_1$ și $C_1$ pe $BB_1$ și $CC_1$ se taie în M. Să se arate că M se găsește pe înălțimea AH și că A este centrul cercului circumscris patrulaterului $HB_1MC_1$.

Ion M. Miu.

R. Se știe că laturile AC, AB ale triunghiului, împart segmentele $HB_1$, $HC_1$ în două părți egale, etc.

5. Fie D, E, F punctele de contact ale cercului înscris unui triunghiu cu laturile BC, CA, AB. Să se arate că triunghiurile ABC și DEF sunt ortologice

N. P. Arcadian.

R. Perpendicularele scoborîte din A, B, C pe laturile EF, FD, DE concură în centrul cercului înscris I, căci triunghiurile AEF, IEF, etc. sunt isoscele.

6. Dacă I, $I_a$, $I_b$, $I_c$, sunt centrele cercurilor tritangente unui triunghiu ABC, $h_a$, $h_b$, $h_c$, înălțimile triunghiului și R raza cercului circumscris, avem relațiunea:

$$I I_a \cdot \overline{AI}/h_a + I I_b \cdot \overline{BI}/h_b + I I_c \cdot \overline{CI}/h_c = 4R.$$

Ion Th. Popovici.

R. Avem $I I_a = a/\cos\frac{1}{2}A$, $AI = (p-a)/\cos\frac{1}{2}A = bc\cos\frac{1}{2}A/p$, $1/h_a = a/2S$, etc. Deci:

$$\sum I I_a \cdot \overline{AI}/h_a = \sum \frac{a^2 bc}{2pS} = \sum \frac{2aR}{p} = \frac{2R}{p}\sum a = 4R.$$

7. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt[m]{\alpha+\beta+x}}{\beta x} + \frac{\sqrt[m]{\alpha+\beta+x}}{\alpha x} + \frac{\sqrt[m]{\alpha+\beta+x}}{\alpha\beta} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\gamma}.$$

Samoilă Dumitru.

R. Aducând partea I la același numitor și scriind

$$\sqrt[m]{\alpha+\beta+x} = (\alpha+\beta+x)^{\frac{1}{m}} \text{ avem:}$$

$$\frac{\alpha(\alpha+\beta+x)^{\frac{1}{m}} + \beta(\alpha+\beta+x)^{\frac{1}{m}} + x(\alpha+\beta+x)^{\frac{1}{m}}}{\alpha\beta x} = \frac{x^{\frac{1}{m}}}{\gamma},$$

$$(\alpha+\beta+x)^{\frac{1}{m}}(\alpha+\beta+x) = \frac{\alpha\beta x \cdot x^{\frac{1}{m}}}{\gamma},$$

$$\therefore \quad (\alpha+\beta+x)^{\frac{m+1}{m}} = \frac{\alpha\beta x^{\frac{m+1}{m}}}{\gamma}.$$

Avem $$\frac{\alpha+\beta+x}{x}=\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^{\frac{m}{m+1}}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\alpha+\beta}{\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^{\frac{m}{m+1}}-1}.$$

8. Să se verifice identitatea:

$$(a_1+a_2+...+a_n)(x_1+x_2+...+x_n)+(a_1+a_2+...+a_{n-1}-a_n)(x_1+...$$
$$...+x_{n-1}-x_n)+...+(-a_1+a_2+...+a_n)(-x_1+x_2+...+x_n)=(n-3)$$
$$(a_1+...+a_n)(x_1+...+x_n)+4(a_1x_1+...+a_nx_n)$$

GR. C. MOISIL.

R.

$$E=\sum_1^n a_i\sum_i^n x_j+\sum_{k=1}^{k=n}\left[\sum_{l=1}^{l=n}a_l-2a_k\right]\left[\sum_{p=1}^{p=n}x_p-2x_k\right],$$

$$E=\sum_1^n a_i\sum_i^n x_j+\sum_{k=1}^{k=n}\left(\sum_{l=1}^n a_l\sum_{p=1}^n x_p-2a_k\sum_{p=1}^n x_p-2x_k\sum a_p+4a_kx_k\right),\ \text{dar}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k\sum_{p=1}^n x_p\right)=\sum_{k=1}^n\left(x_k\sum_{p=1}^n a_p\right)=\sum_{k=1}^{k=n}a_k\sum_{p=1}^{p=n}x_p,\ \text{deci:}$$

$$E=\left(n-3\right)\sum_1^n a_i\sum_1^n x_j+4\sum_1^n a_k\,x_k=\left(n-3\right)\left(a_1+...+a_n\right)$$
$$\left(x_1+...+x_n\right)+4\left(a_1x_1+...+a_nx_n\right).$$

9. Intre laturile unui triunghiu existând relaţia $3a=b+c$, să se arate că atunci avem şi relaţia:

$$27/r_a^3=1/r_b^3+1/r_c^3+9/r_a\,r_b\,r_c,$$

notaţiunile fiind cele obişnuite.

MARIN G. DUMITRESCU.

R. Ţinând seamă că avem $3a=b+c$, găsim relaţia

$$3/r_a=1/r_b+1/r_c,$$

fiecare ridicând-o la cub avem tocmai relaţia cerută.

10. In orice triunghiu, există relaţia:

$$\frac{bc\,(\text{cotgB}+\text{cotgC})}{\text{cotg}\frac{1}{2}\text{B}+\text{cotg}\frac{1}{2}\text{C}}+\frac{ac\,(\text{cotgA}+\text{cotgC})}{\text{cotg}\frac{1}{2}\text{A}+\text{cotg}\frac{1}{2}\text{C}}+\frac{ab\,(\text{cotgA}+\text{cotgB})}{\text{cotg}\frac{1}{2}\text{A}+\text{cotg}\frac{1}{2}\text{B}}=6\text{R}r.$$

PAUL I. IONESCU.

R. Se ţine seamă de relaţiile:

$$a = h_a\,(\text{cotB} + \text{cotgC}) \ldots = r(\text{cotg}\tfrac{1}{2}\text{B} + \text{cotg}\tfrac{1}{2}\text{C}) \ldots \text{ etc.}$$

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c \;;\; abc = 4RS.$$

11. Dacă între laturile unui triunghiu avem relaţia:

$$2/a^2 = 1/b^2 + 1/c^2,$$

punctul lui STEINER al triunghiului se află pe simediana laturei $a$.

CONST. I. GEORGESCU.

R. Dacă în ecuaţia în coordonate baricentrice a simedianei $c^2\beta - b^2\gamma = o$ introducem coordonatele baricentrice $1/(b^2-c^2)$, $1/(c^2-a^2)$, $1/(a^2-b^2)$ ale punctului lui STEINER, obţinem condiţia din enunţ.

## PROBLEME PROPUSE.

3211. Cu toate cifrele 0, 1, 2,... 9 luate o dată, să se scrie un număr de o cifră, un patrat de două cifre, un cub de trei cifre şi un bipatrat de patru cifre.

I. IONESCU.

3212. Să se găsiască patratele perfecte ale căror cifre micşorate cu o unitate dau alte patrate.

Să se trateze şi un caz mai general.

OVIDIU G. POPEA.

3213. Să se arate că dacă $\alpha$ este cel mai mare exponent al lui $a$ (prim), care împarte produsul N!, atunci:

$$\frac{N}{a} \leqslant \alpha \leqslant \frac{N}{a-1}.$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.

3214. Fie $A_1$, $B_1$, $C_1$ mijloacele laturilor BC, CA, AB ale unui triunghiu ABC şi D, E, F punctele de contact ale aceloraşi laturi cu cercul înscris. Pe laturile BA şi CA, ducem către vârful A o lungime BP = CQ = BC. Dreapta PQ intersectează pe EF în în punctul K, iar paralelele duse prin vârfurile E şi F ale triunghiului DEF la laturile opuse FD şi DE se întretaie în $D_1$. Să se demonstreze că:

1) Punctul $\varphi$ al lui FEUERBACH se află pe dreapta care uneşte punctul K cu $A_1$.

2) Punctul $D_1$ se află pe dreapta PQ.

V. CRISTESCU.

3215. Se dau două puncte fixe A şi B şi pe dreapta AB un punct variabil C. Un cerc cu centrul O trece prin A şi C, iar altul cu centrul $O_1$ trece prin B şi C. Ştiind că centrele O şi $O_1$ descriu respectiv două drepte fixe $\Delta$ şi $\Delta_1$, se cere:

1) Locul celei de a doua intersecţii M a cercurilor O şi $O_1$;

2) Să se arate că axul radical al cercurilor O şi $O_1$ trece printr'un punct fix.

TRAIAN UDRISKY.

3216. Să se găsiască limita expresiunei,

$$E = \prod_{i=2}^{i=p} \frac{\log n}{\log \dfrac{i.\,2i...\,ni}{(i-1)(2i-1)...(ni-1)}},$$

când $n$ creşte nemărginit, $p$ rămânând fix.

CONST. E. GEORGESCU.

3217. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu avem relaţiunea:

$$\Sigma\sqrt{(\cos B+\cos C+\sin A)(\cos B+\cos C-\sin A)(\cos C+\sin A-\cos B)(\cos B+\sin A-\cos C)} = 2\sin A\sin B\sin C.$$

GH. D. POPESCU.

3218. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin 3x\cos^3 x + \cos 3x\sin^3 x = \operatorname{tg} 3x.$$

O. ORĂNESCU.

3219. Se dă o dreaptă $\Delta$ şi se consideră un punct M, mobil pe o curbă (C). Normala şi tangenta în M la (C) taie pe $\Delta$ în N şi T. Pe perpendicularele în N şi T la $\Delta$, se iau, de aceeaşi parte cu M, lungimile $NN_1$, NN' şi $TT_1$, TT' aşà fel ca:

$$NN_1 = TT_1 = MN \quad \text{şi} \quad NN' = TT' = MT.$$

Se cere: 1) Să se demonstreze că $\Delta$ este una din bisectoarele unghiului dreptelor $N_1T'$ şi $N'T_1$. 2) Să se găsiască curbele (C), pentru care aceste drepte fac între ele un unghiu dat.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3220. Un muzicant aude fluerul maşinii unui tren, care vine spre el, după nota «do» diez. Trenul trecând, muzicantul aude încă fluerul aceleiaşi maşini după nota «si» bemol.

Se cere viteza trenului.

GH. ZAPAN.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Adam M.* (3056, 78, 128, 38, N, P); *Angelescu T.* (3158, 62); *Arcadian N.* (3172, 73, 81, 88, 99, E); *Barbălatt M. B.* (3176); *Basacov Gh.* (3199); *Berdan C.* (3056, 158); *Bernstein Max* (3204); *Beşchea G. N.* (3204, 07); *Bleiweiss P.* (3082, 181, R); *Bogdan Gh.* (3098); *Bolea N.* (3147, 56, 78, E, P); *Botez N.* (3141); *Căldăraru Leon* (3193, 204, 05); *Căldăraru R.* (3188); *Ciorănescu I. C.* (2641, 3162, 71, 93, 96, 202, 04, 05, 07, E, P, R); *Ciorănescu M.* (3182); *Cojoc Gh.* (3204); *Coşniță V.* (2838, 974, 3047, 207, P); *Dorneanu V.* (E); *Florescu I. B.* (P); *Focşeneanu I. M.* (3056, 186, 97, 205, 06, 07); *Georgescu M.* (3147, 72, 73); *Ghelber M.* (3172, 81, 88, E); *Grofşoreanu Gh.* (3172, 81, 88); *Iliescu Dima* (3117, 39, 56, 81); *Iliescu Dinu St.* (3097, 167); *Ionescu A.* (3188); *Ionescu Paul* (2856, 978, 3059, 149, 62, 78, E); *Katz S.* (3202, 04); *Lăzărescu St.* (2918, 22, 78, 3100, E); *Marin Paul* (3167, 78); *Marini P.* (3199); *Mihăescu C.* (3177, 93 E, P); *Miu I.* (3139, 51, 56, 58, 81); *Mladenovici Al.* (3047, 204, 07, E); *Novac A.* (3147,); *Orănescu O.* (P); *Pălărieru E.* (3172, 96, 204); *Pătroianu M.* (2891, 918, 3059, 149, 56, 78, 88); *Popa N.* (3188): *Popea O.* (3056, 149, 93, 204, E); *Popescu Corneliu* (3172); *Popescu Dorin* (3149, 56, 58); *Popovici Th. Ion* (2683, 2929, 3097, 115, 59, 88, E); *Popoviciu Tib.* (3163); *Reinhorn A. B.* (3111, 72, 204); *Schächter A. I.* (3204, 05, 07); *Schächter M. Ozias* (3158, 202, 05, 07, E, R); *Simionescu Gh.* (E); *Spacu P.* (3188); *Ştefan Marin* (3034, 73, 122, 33, 49, 56, 57, 58, 93, E, P, R); *Ştefănescu E.* (3056, P); *Stoica A.* (3139, E); *Tauber Al.* (3111); *Teodorescu N.* (3188); *Teodorescu St. I.* (3138, P); *Udrisky Tr.* (3146, P); *Vasiliu Gh.* (E); *Vasiliu Ion* (2688, 799, 3046, 136, 38, 57, 75, 81, 204, 05, 07, E); *Vulpanovici Boris* (3097, 117, 39, 72, P); *Weiss L.* (3158, 89, 93, 96, E, N, P); *Weiss S.* (3126, 204, E); *Zamfirescu Al.* (3117, 39, 62); *Zamfirescu M.* (3181).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât şi cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1892, 2191, 281, 347, 54, 56, 77, 94, 421, 28, 31, 524, 75, 643, 54, 60, 64, 706, 92, 827, 37, 51, 61, 72, 902, 10, 31, 55, 71, 72, 80, 86, 91 93, 3019, 53, 77, 84, 85, 86, 91, 92, 93, 102, 04, 09, 11, 12, 13, 21, 28, 31, 35, 40, 44, 52, 53, 55, 58, 60, 61, 69, 70, 72, 74, 84, 89, 91, 92, 95, 97, 203 şi 10, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

## 29 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu**, *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu**, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu**, Directorul Fabricilor de Chibrituri și Timbre (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

## 29 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu**, *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu**, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu**, Directorul Fabricilor de Chibrituri și Timbre (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

Asociația pentru cultura și literatura poporului român
Sibiu

# GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 2. — OCTOMBRE 1924.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

## SUMARUL

1. Calculul unei clase de integrale definite . *Th. Angheluță.*
2. Asupra triomologiei și triortologiei . . . *G. I. Dumitrescu.*
3. Note Matematice: 5—8
4. Bibliografii.
5. Cereri.
6. Probleme rezolvate: 2278, 2766, 2799, 3047, 3053, 3135, 3138, 3149, 3151, 3156, 3181, 3188, 3193.
7. Exerciții: 12—18.
8. Probleme propuse: 3184, 3212, 3221—3230.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1924

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti, **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti, **G. Borneanu,** Cassier, Inginer, Directorul Fabricilor de Chibrituri şi Timbre-Filaret.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 60, 69, 75, 89, 90, 107, 14, 27, 29, 31, 34, 40, 48, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 83, 85, 90, 91, 92, 94, 98, 200, 01, 03, 08, 10, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

# CALCULUL UNEI CLASE DE INTEGRALE DEFINITE.

Ne propunem să calculăm integrala [1])

$$(1) \qquad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^m} dx,$$

$m$, $n$ fiind numere întregi şi pozitive şi supuse încă la o condiţie, care va fi precizată mai jos. Integrala mai particulară pentru $m = n$, a fost propusă de D-l PROF. TR. LALESCU sub No. 1009 din «G. M.», anul 1909 şi rezolvată de D-l D. GEORGESCU. D-l PROF. TR. LALESCU revine asupra acestei probleme în «G. M.», anul 1910, pag. 72. D-l DE LA VALLÉE POUSSIN [2]), în lucrările sale asupra aproximaţiei funcţiilor continue de variabilă reală prin polinoame trigonometrice FEJER, întâlneşte integrala considerată de D-l PROF. TR. LALESCU şi integrale particulare din clasa integralei I, considerată de noi. Pentru aceste integrale, D-l DE LA VALLÉE POUSSIN nu dă calculul lor, ci o limită superioară, fiind vorba de aproximaţii [3]). De aceea, ne-am propus să dăm calculul integralei I, mai ales că acest procedeu se poate aplică la alte integrale definite. Metoda D-lui PROF. TR. LALESCU şi a D-lui D. GEORGESCU se bazează pe cunoştinţa teoriei funcţiilor de variabilă imaginară. Noi vom calculă integrala I, rămânând în domeniul variabilei reale, utilizând derivarea sub semnul sumă.

Mai întâiu, se remarcă imediat că trebue să avem

$$m \leq n,$$

pentruca integrala I să aibă un sens pentru $x = 0$.

Pentru $x$ infinit, se vede uşor că dacă avem

$$m > 1,$$

integrala are o valoare finită. Rămâne de precizat cazul $m = 1$.

---

1) Rândurile ce urmează au fost anunţate când s'a publicat soluţia problemei 3008.

2) Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.

3) După redijarea acestui articol, prin bunătatea D-lui PROF. A. ANGELESCU, am luat cunoştinţă de o generalizare mai mare a integralei I apărută în: Archiv der Mathematik und Physik din 1909, pag. 48, de D-nul L. SAALSCHÜTZ.

Dacă în acest caz $n$ este fără soț, integrala are un sens. Se dovedește [1]) ca și pentru integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Să dovedim acum că dacă $m = 1$ și $n$ par, integrala nu are sens. In adevăr, să punem $n = 2p$, atunci pentruca integrala

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2p} x}{x}\, dx,$$

să aibă un sens, trebue ca seria

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^{2p} x}{x}\, dx$$

să fie convergentă, reciproca putând să nu fie exactă.

Dar avem:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^{2p} x}{x}\, dx > \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^{2p} x\, dx.$$

Pe de altă parte, avem:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^{2p} x\, dx = \int_0^{\pi} \sin^{2p} x\, dx = \frac{1.3 \ldots (2p-1)}{2.4 \ldots 2p.}\, \pi.$$

Deci integrala

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^{2p} x}{x}\, dx > \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1.3 \ldots (2p-1)}{2.4 \ldots 2p}.$$

Urmează deci că seria (3) are termenii superiori unei serii divergente, căci factorul care conține pe $p$ este independent de $k$.

Seria (3) fiind divergentă, integrala (2) nu are sens.

Să trecem la calculul integralei I, rămânând stabilit că

$$n \geq m$$

și dacă $m = 1$, $n$ trebue să fie impar.

1) E. Goursat. Analyse t. I, pag. 204.

Să considerăm pentru aceasta integrala [1])

$$(4) \qquad F(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin^n x}{x^m}\, dx.$$

Această integrală are sens şi este uniform convergentă, dacă $\alpha > 0$. Aceeaşi abservaţie are loc pentru toate derivatele ei în raport cu $\alpha$. Mai mult încă, făcând pe $\alpha = 0$ căpătăm integrala (1) şi dacă aceasta are un sens, după teorema lui DIRICHLET, rezultă că $F(\alpha)$ este continuă chiar pentru $\alpha = 0$ şi la dreapta.

Deci putem scrie

$$F(0) = I.$$

Derivând integrala (4) de $m$ ori avem:

$$(5) \qquad F^{(m)}_{(\alpha)} = (-1)^m \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin^n x\, dx,$$

unde $F^{(m)}_{(\alpha)}$ este derivata de ordinul $m$ a lui $F(\alpha)$. Egalitatea (5) poate fi scrisă, bazându-ne pe uniform convergenţa integralei (4) şi a derivatelor ei.

Dar integrala (5) are un sens şi se poate calculă chiar integrala indefinită.

Se ştie că avem:

$$\sin^n x = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{p=0}^{m} (-1)^p C_n^p e^{(n-2p)ix}.$$

Substituind aceasta în (5), obţinem

$$F^{(m)}_{(\alpha)} = \frac{(-1)^m}{(2i)^n} \int_0^{\infty} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p e^{[-\alpha+(n-2p)i]x}\, dx,$$

sau dacă efectuăm integrarea,

$$F^{(m)}_{(\alpha)} = \frac{(-1)^m}{(2i)^n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{C_n^p}{\alpha-(n-2p)i}.$$

1) Pentru $n = m = 1$ a se vedeà GOURSAT. Analyse t. I, pag. 415.

Derivatele lui $F(\alpha)$ fiind nule, pentru

$$\alpha = +\infty,$$

integrând succesiv de $m$ ori pe $F_{(\alpha)}^{(m)}$ între $\alpha$ şi $+\infty$ şi înlocuind cele $m$ integrale suprapuse prin una singură, după formula bine cunoscută, avem:

$$(6) \quad F(\alpha) = \frac{(-1)^m}{(2i)^n\,(m-1)\,!} \int_0^{\infty} (\alpha - x)^{m-1} \sum_{p=0}^{n}{}' \frac{(-1)^p C_n^p\, dx}{x-(n-2p)i}\,.$$

Integrala din membrul al doilea se poate efectuă, noi însă căutăm integrala I şi după proprietatea de continuitate amintită mai sus, rezultă că avem, făcând în (6) pe $\alpha = 0$:

$$I = \frac{1}{(2i)^n (m-1)\,!} \int_0^{\infty} x^{m-1} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{C_n^p}{x-(n-2p)i}\, dx.$$

Integrala I este finită în cazurile specificate mai sus şi atunci în membrul al doilea termenii întregi în raport cu $x$ trebue să dispară, deci avem:

$$(7) \quad I = \frac{1}{(2i)^n (m-1)\,!} \int_0^{\infty} \sum_{p=0}^{n}{}' (-1)^p \frac{C_n^p [(n-2p)i]^{m-1}}{x-(n-2p)i}\, dx,$$

$p$ luând toate valorile dela 0 la $n$, exceptând valoarea $n/2$ dacă $n$ este par; pentru a reamintì aceasta, s'a pus accentul la semnul $\sum$.

Dacă în suma (7) vom strânge la un loc termenii corespunzători lui $p$ şi $n-p$, avem:

$$(-1)^p \frac{C_n^p [(n-2p)i]^{m-1}}{x-(n-2p)i} + (-1)^{n-p} \frac{C_n^{n-p} [-(n-2p)i]^{m-1}}{x+(n-2p)i}$$

$$= (-1)^p C_n^p [(n-2p)i]^{m-1} \left[ \frac{1}{x-(n-2p)i} + (-1)^{n+m-1} \frac{1}{x+(n-2p)i} \right].$$

Trebue să distingem acuma 2 cazuri, $(m+n)$ par sau impar.

1°. $(m+n)$ *par.*

In acest caz, suma celor doi termeni consideraţi este:

$$(-1)^p \frac{2 C_n^p [(n-2p)i]^m}{x^2 + (n-2p)^2}\,.$$

Ca urmare, expresiunea (7) devine:

$$I = \frac{i^{m-n}}{2^n (m-1)!} \int_0^{\infty} \sum (-1)^p \frac{2 C_n^p (n-2p)^m}{x^2 + (n-2p)^2} dx,$$

în suma $p$ luând valorile dela 0 la $(n-1)/2$, dacă $n$ este impar şi pânăla $n/2 - 1$ dacă $n$ este par.

Efectuând integrarea se găseşte formula definitivă pentru acest caz

$$I = \frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}} \pi}{2^n (m-1)!} \sum (-1)^p C_n^p (n-2p)^{m-1},$$

unde $p$ ia valorile specificate mai sus. Integrala propusă de D-nul Prof. Tr. Lalescu intră în acest caz, făcând $m = n$, se găseşte:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2^n (n-1)!} \sum (-1)^p C_n^p (n-2p)^{n-1}.$$

Pentru $n = 1$, avem integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $n = 2$, avem integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $n = 4$ avem integrala întâlnită de D-l De la Vallée Poussin

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Deasemenea, pentru $n = 4$, $m = 2$, avem:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$2^0$. $(m+n)$ *impar.*

In acest caz, suma celor doi termeni este:

$$\frac{(-1)^p 2C_n^p[(n-2p)i]^{m-1}x}{x^2+(n-2p)^2}.$$

Ţinând seamă de aceasta, expresiunea (7) devine:

$$I=\frac{i^{m-n-1}}{2^n(m-1)!}\int_0^{\infty}\sum(-1)^p\frac{2C_n^p(n-2p)^{m-1}x}{x^2+(n-2p)^2}\,dx,$$

unde $p$ ia aceleaşi valori ca la cazul $1^0$. Integrând şi observând că avem:

$$\text{Log}[x^2+(n-2p)^2]=2\text{Log}\,x+\text{Log}\left[1+\frac{(n-2p)^2}{x^2}\right]$$

şi pe de altă parte integrala I fiind finită, avem:

$$I=\frac{(-1)^{\frac{m-n+1}{2}}}{2^{n-2}(m-1)!}\sum(-1)^pC_n^p(n-2p)\text{Log}\,(n-2p).$$

Se remarcă în acest caz, intervenţia logaritmului. Iată câtevà exemple destul de curioase:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx=\tfrac{3}{4}\text{Log}\,3,$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,dx=\text{Log}\,2.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

## ASUPRA TRIOMOLOGIEI ŞI TRIORTOLOGIEI.

1. Triunghiurile ABC, A'B'C' se numesc *biomologice,* dacă ABC este omologic în acelaş timp cu A'B'C' şi B'C'A'.

Tot aşà dacă ABC este omologic în acelaş timp cu A'B'C', B'C'A', C'A'B', se zice că triunghiurile sunt *triomologice.*

Ocupându-se de triunghiurile triomologice, în G. M. anul XXI pag. 206, d-l AL. PANTAZI a stabilit următoarea teoremă importantă:

**Teoremă.** *Dacă un triunghiu* ABC *este omologic în acelaş timp cu* A'B'C' *şi cu* B'C'A', *el este omologic şi cu* C'A'B'.

Aşà dar e destul ca triunghiurile să fie biomologice ca să fie şi triomologice.

Pentru demonstraţie, d-sa stabileşte întâi o teoremă ajutătoare.

In cele ce urmează voiu da o demonstraţie directă, destul de simplă, care în acelaş timp să conducă la o formulă interesantă, exprimând condiţia ca două triunghiuri să fie omologice.

Fie $D' = 0, D'' = 0, D''' = 0$ respectiv ecuaţiile dreptelor CB, AC, AB; deasemenea să luăm:

$$A'(x_1, y_1), \quad B'(x_2, y_2), \quad C'(x_3, y_3).$$

Ecuaţia dreptei AA' este de forma:

$$D''' + \lambda D'' = 0.$$

Scriind că punctul $A'(x_1, y_1)$ se găseşte pe ea, se deduce $\lambda = -D'''_1/D''_1$. (Se notează, ca deobicei, prin $D''_1, D'''_1$ ceeace devin ecuaţiile dreptelor înlocuind pe $x$ şi $y$ cu $x_1, y_1$).

Prin urmare pot scrie:

$$\left.\begin{array}{lll} (AA') & D''_1 D''' - D'''_1 D'' = 0 \ \therefore & D''' = \dfrac{D'''_1}{D''_1} D'' \\ \text{La fel: } (BB') & D' = \dfrac{D'_2}{D'''_2} D''' & \\ (CC') & D'' = \dfrac{D''_3}{D'_3} D' & \end{array}\right\} (1)$$

Din acestea se deduc foarte uşor, înlocuind A', B', C' prin B', C', A', ecuaţiile:

$$\left.\begin{array}{lll} (AB') & D''' = \dfrac{D'''_2}{D''_2} D'' & \\ (BC') & D' = \dfrac{D'_3}{D'''_3} D''' & \\ (CA') & D'' = \dfrac{D''_1}{D'_1} D' & \end{array}\right\} (2)$$

Tot aşà, prin permutări circulare:

$$(AC') \qquad D''' = \frac{D'''_3}{D''_3} D''$$

(3) (BA′) $D' = \frac{D'_1}{D'''_1} D'''$

(CB′) $D'' = \frac{D''_2}{D'_2} D'$

Se ştie, că pentruca dreptele AA′,BB′,CC′ din (1) să fie concurente, trebue să existe relaţia:

$$\frac{D'''_1}{D''_1} \cdot \frac{D'_2}{D'''_2} \cdot \frac{D''_3}{D'_3} = 1.$$

Aşà dar, *ca triunghiurile* ABC, A′B′C′ *să fie omologice trebue să îndeplinească condiţia:*

(4) $D'_2 D''_3 D'''_1 - D'_3 D''_1 D'''_2 = 0.$

Această condiţie, destul de simplă, îmi permite să demonstrez imediat teorema triomologiei.

In adevăr, dacă triunghiurile ABC, A′B′C′ sunt biomologice, trebue, conform relaţiilor (2) şi (4), să avem:

(5) $D'_3 D''_1 D'''_2 - D'_1 D''_2 D'''_3 = 0.$

Adunând relaţiile (4), (5) deduc:

(6) $D'_2 D''_3 D'''_1 - D'_1 D''_2 D'''_3 = 0.$

Dar, ţinând seamă de relaţiile (3), (4), rezultă că (6) exprimă tocmai că triunghiurile ABC, C′A′B′ sunt omologice.

Aşà dar triomologia este o consecinţă a biomologiei. Teorema este deci demonstrată.

2. Triunghiul ABC se numeşte *biortologic* cu A′B′C′, dacă el este ortologic în acelaş timp şi cu A′B′C′ şi cu B′C′A′.

Dacă ABC este ortologic în acelaş timp cu A′B′C′, B′C′A′, C′A′B′ triunghiurile ABC, A′B′C′ se numesc *triortologice.*

D-l Al. Pantazi demonstrează în locul citat şi următoarea:

*Teoremă.* Dacă un triunghiu este ortologic în acelaş timp cu, A′B′C′ şi B′C′A′, este ortologic şi cu C′A′B′.

Notez: $D_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, ecuaţia dreptei BC

$D'_1 = a'_1 x + b'_1 y + c'_1 = 0$, ecuaţia dreptei B′C′.

Fie A$a$ perpendiculara dusă din A pe B′C′.

Se găseşte uşor:

$$(Aa) \qquad D_2 - \frac{a_2a'_1 + b_2b'_1}{a_3a'_1 + b_3b'_1} D_3 = 0$$

$$(Bb) \qquad D_3 - \frac{a_3a'_2 + b_3b'_2}{a_1a'_2 + b_1b'_2} D_1 = 0$$

$$(Cc) \qquad D_1 - \frac{a_1a'_3 + b_1b'_3}{a_2a'_3 + b_2b'_3} D_2 = 0$$

Condiția ca triunghiurile să fie ortologice este deci:

$$\frac{a_2a'_1 + b_2b'_1}{a_3a'_1 + b_3b'_1} \cdot \frac{a_3a'_2 + b_3b'_2}{a_1a'_2 + b_1b'_2} \cdot \frac{a_1a'_3 + b_1b'_3}{a_2a'_3 + b_2b'_3} = 1, \text{ sau:}$$

$$(1) \qquad (a_1a'_2 + b_1b'_2)(a_2a'_3 + b_2b'_3)(a_3a'_1 + b_3b'_1) = (a_1a'_3 + b_1b'_3)(a_2a'_1 + b_2b'_1)(a_3a'_2 + b_3b'_2).$$

Ținând seamă de relația (1), se deduce că pentruca perpendicularele duse din A',B',C' pe laturile triunghiului ABC să fie concurente, trebue să avem:

$$(2) \qquad (a'_1a_2 + b'_1b_2)(a'_2a_3 + b'_2b_3)(a'_3a_1 + b'_3b_1) = (a'_1a_3 + b'_1b_3)(a'_2a_1 + b'_2b_1)(a'_3a_2 + b'_3b_2),$$

care este chiar relația (1). Prin urmare, relația (2) fiind o consecință a relației (1) se găsește proprietatea că: dacă perpendicularele duse din vârfurile lui ABC pe laturile lui A'B'C' se întâlnesc într'un punct, deasemenea și acelea duse din vârfurile A',B',C' pe laturile lui ABC se întâlnesc într'un acelaș punct.

Pentruca triunghiurile ABC, B'C'A' să fie ortologice, trebue să am:

$$(3) \qquad (a_1a'_3 + b_1b'_3)(a_2a'_1 + b_2b'_1)(a_3a'_2 + b_3b'_2) = (a_1a'_1 + b_1b'_1)(a_2a'_2 + b_2b'_2)(a_3a'_3 + b_3b'_3).$$

Privind relațiile (1) și (3) se deduce imediat:

$$(4) \qquad (a_1a'_1 + b_1b'_1)(a_2a'_2 + b_2b'_2)(a_3a'_3 + b_3b'_3) = (a_1a'_2 + b_1b'_2)(a_2a'_3 + b_1b'_3)(a_3a'_1 + b_3b'_1).$$

Această relație exprimă tocmai că triunghiurile ABC, C'A'B' sunt ortologice și cum ea este o consecință a relațiilor (1) și (3), rezultă teorema că:

Dacă două triunghiuri sunt biortologice sunt și triortologice.

G. I. Dumitrescu.
Profesor la liceul „Mânăstirea Dealului".

## NOTE MATEMATICE

5. *Alte zece Matematici diverse.* (Vezi Nota 1, pag. 18).

11. **Asigurărilor.** *U. Broggi.* — Versicherungs - Mathematik. Lipsca. 1911.
12. **Curioasă.** *C. L. Dodgson.*—Curiosa mathematica. 1893.
13. **Desfătătoare.** *G. Kowalewski.* — Mathematica delectans. Lipsca 1921.
14. **Generală.** *E. Vessiot & P. Montel.* — Cours de mathématiques générales. Paris 1920.
15. **Greacă.** *P. Heath.* — A history of Greek mathematics. Oxford 1921.
16. **Liberă.** Vezi *L. Brunswig.—Les étapes de la philosophie mathématiques.* Pag. 396.
17. **Modernă.** *M. Bôcher.* — *Charles Sturm* et les mathématiques modernes. Paris. 1914.
18. **Pozitivă.** Ca la N. 16 de mai sus, p. 463.
19. **Rară.** *Halliwell.* — Rara mathematica. Londra 1841.
20. **Specială.** *J. Haag.* — Cours complet de mathémathiques spéciales. Paris. 1921.

(Va urmà) I. IONESCU.

6. *Asupra problemei 3051.* Soluția acestei probleme dată la pag. 191, Anul XXIX al «Gazetei Matematice», nu este completă din cauză că din:

$$\alpha - 1 < 4{,}08 \ldots \beta < \alpha$$

s'a conchis:

$$\alpha = 4\beta + 1.$$

S'a pierdut astfel soluția $\alpha = 49$ și $\beta = 12$ la prima parte și la a doua.

E. ȘTEFĂNESCU.

7. *O rectificare.* In articolul «O proprietate a indicatorilor de ordin superior» la pag. 447, luându-se greșit seria lui $\sqrt[n]{N}$, s'a admis că:

$$\sqrt[n]{N} > 1 + \frac{N-1}{n},$$

ceeace nu este adevărat.

Se porneşte însă dela neegalitatea:

$$\frac{N-1}{\sqrt[n]{N-1}} < 2N, \qquad (n < N)$$

care este adevărată pentru $N > 1$ şi se ajunge tot la acelaş rezultat.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

8. *Asupra problemei 2411.* («Gazeta Matematică» Vol. XXVIII, pag. 298).

I. Enunţul acestei probleme, propusă de E. N. BARISIEN, este următorul: «Cercurile descrise din vârfurile unui triunghiu oarecare, cu raze respectiv egale cu laturile opuse, au ca centru radical simetricul ortocentrului în raport cu centrul cercului circumscris».

Această proprietate este un caz particular al următoarei teoreme mai generale, enunţată de E. LEMOINE:

*Dacă suma puterilor unui vârf al unui triunghiu, în raport cu cercurile descrise din celelalte două vârfuri ca centre, este aceiaşi pentru cele trei vârfuri ale triunghiului, centrul radical al celor trei cercuri este acelaşi, oricare ar fi cele trei cercuri*[1]).

*Acest centru radical este simetricul ortocentrului în raport cu centrul cercului circumscris*[2]).

Insă este uşor de văzut că cercurile descrise în condiţiile problemei 2411 satisfac teoremei lui E. LEMOINE. In adevăr, puterea vârfului A în raport cu cercul (B, $b$) este ($c^2 - b^2$), iar în raport cu cercul (C, $c$) este ($b^2 - c^2$). Suma acestor două puteri este nulă şi la fel pentru vârfurile B şi C, oricare ar fi mărimea relativă a laturilor $a$, $b$, $c$; deci teorema lui E. LEMOINE se aplică.

Demonstraţia teoremei lui E. LEMOINE este uşoară, căci pentru cercurile (B, $R_b$) şi (C, $R_c$) enunţul ne dă condiţia[2])

$$BA^2 + R_b^2 = CA^2 + R_c^2,$$

care ne arată că piciorul axei radicale a cercurilor (B, $R_b$) şi (C, $R_c$) pe latura BC este isotomicul piciorului înălţimei scoborîte din vârful A.

V. CRISTESCU.

1) *Mathesis*, année 1924, p. 316, Question 2155.

2) CL. SERVAIS et A. SEVRIN, *Mathesis* loc. cit.

II. Problema 2411 mai admite o soluție simplă, pe care o voiu da mai jos.

Dacă M este centrul radical a trei cercuri descrise din vârfurile unui triunghiu ABC ca centre, cu raze respectiv egale cu $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ și dacă $M_1$ este un alt centru radical analog cu M, atunci dacă M și $M_1$ sunt simetrice în raport cu centrul cercului circumscris triunghiului, între razele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ avem relațiunea [1]):

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = \beta^2 + \beta_1^2 = \gamma^2 + \gamma_1^2. \qquad (1)$$

Când M coincide cu ortocentrul H, atunci avem

$$\alpha^2 + a^2 = \beta^2 + b^2 = \gamma^2 + c^2 = d^2,$$

iar (1) devine

$$\alpha_1^2 - a^2 = \beta_1^2 - b^2 = \gamma_1^2 - c^2,$$

relație evidentă când $\alpha_1 = a$, $\beta_1 = b$, $\gamma_1 = c$.

Având în vedere articolul citat, se pot enunța multe teoreme de acest fel; de exemplu:

1. Cercurile descrise din vârfurile unui triunghiu ca centre, cu raze respectiv egale cu $a/\sqrt{3}$, $b/\sqrt{3}$, $c/\sqrt{3}$ au ca centru radical simetricul centrului de greutate al triunghiului în raport cu centrul cercului circumscris.

2. Cercurile descrise din vârfurile unui triunghiu ABC ca centre, cu raze respectiv egale cu

$$\sqrt{\tfrac{2}{3} S \operatorname{cotg} A} \quad , \quad \sqrt{\tfrac{2}{3} S \operatorname{cotg} B} \quad , \quad \sqrt{\tfrac{2}{3} S \operatorname{cotg} C}$$

S fiind aria triunghiului ABC, au ca centru radical centrul de greutate G.

3. Cercurile descrise din vârfurile unui triunghiu ABC ca centre, cu raze respectiv egale cu

$$\sqrt{2 S \operatorname{cotg} A} \quad , \quad \sqrt{2 S \operatorname{cotg} B} \quad , \quad \sqrt{2 S \operatorname{cotg} C}$$

au ca centru radical ortocentrul H al triunghiului (Problema 2862 din *Gazeta Matematică*, Vol. XXVII, p. 292).

4. Cercurile descrise din mijloacele laturilor BC, CA, AB ale unui triunghiu ABC ca centre, cu raze respectiv egale cu

---

1) A se vedeà articolul: *Asupra centrului radical*, de DAN PERIEȚEANU, din *Gazeta Matematică*, Vol. XXIV, p. 19—21.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} S \operatorname{cotg} A} \quad , \quad \sqrt{\tfrac{1}{2} S \operatorname{cotg} B} \quad , \quad \sqrt{\tfrac{1}{2} S \operatorname{cotg} C}$$

au ca centru radical centrul cercului circumscris triunghiului ABC. (Este o consecinţă imediată a Problemei 2862).

5. Cercurile descrise din vârfurile unui triunghiu ABC ca centre, cu raze respectiv egale cu

$$\sqrt{S \operatorname{cotg} A} \quad , \quad \sqrt{S \operatorname{cotg} B} \quad , \quad \sqrt{S \operatorname{cotg} C}$$

au ca centru radical centrul cercului lui EULER al triunghiului ABC.

6. Din vârfurile unui triunghiu ABC ca centre, se descriu două sisteme de cercuri cu razele respectiv egale cu: $a$, $b$, $c$ şi $(b+c)$, $(c+a)$, $(a+b)$. Centrele radicale ale acestor două sisteme de cercuri sunt simetrice în raport cu centrul I al cercului înscris triunghiului ABC.

CONSTANTIN I. GEORGESCU.
Elev al Şcoalei Politechnice din Bucureşti.

## BIBLIOGRAFIE.

**Foaia matematică.** Anul I. No. 9. Septemvrie 1924. Chişinău. Asupra celor şase operaţiuni aritmetice, de CĂP. I. LINTEŞ.

**Revista matematica din Timişoara.** Anul IV. No. 7. Septemvrie 1924. Timişoara. Aflarea directă a maximului unui produs şi a minimului unei sume, de V. ALACI.

**Journal de Mathématiques Elémentaires.** Anul 49. No. 1. Octomvrie 1924. Paris.

**Revista Artileriei.** Anul XXXVII. No. 9. Septemvrie 1924.

P. SERGESCU. Sur quelques inégalités de MM. Landau et Lindelöf concernant les fonctions monogènes. Estras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris. Şedinţa din 4 August 1924.

**Societatea stiinţifică Argentina.** Catalogul publicaţiilor ce se primesc în schimbul Analelor date.

**Almanahul Ştiinţei.** 1924. Anul I. Ediţia I. Publicaţie anuală pentru popularizarea ştiinţei sub direcţiunea D-lui L. FLORIN. Redacţia şi Administraţia în Bucureşti calea Victoriei No. 60. (La atelierele Brănişteanu, pasagiul Imobiliara). Preţul 100 lei. Ca articole interesând matematica găsim *„Tragedia lui Abel"* de L. FLORIN şi *„Cevà despre mecanică"* de D. POMPEIU.

## CERERI.

Răspuns la Cererea No. 90. Rog pe Corespondenții care dețin manuscrisele din *Culegerea de probleme de Aritmetică*, să mi le restituie în starea în care se găsesc, intru cât Adunarea generală a *Societății „Gazeta Matematică"* a decis tipărirea acelei Culegeri. Sper că nu voiu fi nevoit de a mai pune a treia oară o asemenea cerere!

I. IONESCU.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2278. *Să se demonstreze identitatea :*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\right)\sqrt[3]{\frac{abc}{\sin A \sin B \sin C}} \equiv \frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)}{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c},$$

$r_a$, $r_b$, $r_c$ *fiind razele cercurilor exînscrise triunghiului cu laturile* a, b, c.

I. LINTEȘ.

Soluție dată de D-nii: P. BLEIWEISS, N. BOTEA, L. BRÜLL, D. NICULESCU, P. IONESCU, AL. OPRAN, I. T. POPOVICI, B. REINHORN, M. ADAM, B. BARBĂLATT, GH. DAVID, M. FOCȘENEANU, M. GRÜNBAUM, P. KATZ, ȘT. LĂZĂRESCU, M. PĂTROIANU, O. POPEA, O. SCHÄCHTER, AL. TAUBER, L. WEISS, S. WEISS și I. C. VASILIU.

In «*Relations entre les éléments d'un triangle*», *Ed. III Libr. Vuibert,* se dau relațiile:

$$\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\right)=4,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{abc}{\sin A \sin B \sin C}}=R,$$

$$\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)}{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c},$$

care de altfel sunt ușor de verificat cu ajutorul altor relațiuni analoage.

Aceste relațiuni, grupate convenabil, ne dau tocmai identitatea din problemă.

PROBLEMA 2766. *Fie* N *un număr întreg de* n *cifre şi* M *numărul obţinut scriind succesiv de* m *ori numărul* N. *Să se demonstreze că:*

$$M \equiv N\,\frac{1 \pm k^m}{1+k} \qquad \text{Mod. } (k+10^n)$$

*după cum* m *este impar sau par,* k *fiind un număr întreg oarecare.*

*Aplicaţie. Să se arate că restul diviziunii numărului 444... 44, de* 2x *cifre, prin 103 este acelaşi ca al expresiunii* $11\,(1 \pm 3^x)$, *după cum* x *este impar sau par.*

CĂPITAN GR. ZAPAN.

Soluţie dată de d-nii: I. S. ANTONIU, B. M. BARBĂLATT, A. BUŞILĂ, I. CANTACUZINO (elev liceul militar M-rea Dealului), I. B. FLORESCU, I. C. GEORGESGU, L. HOROWITZ, EM. ILIESCU, J. LOSNER, EM. MANOLESCU, A PAMULA, T. POPOVICIU, I. TH. RIZESCU, MARIN ŞTEFAN şi EM. ŞTEFĂNESCU.

Având:

$$M \equiv N\,[1 + 10^n + 10^{2n} + \ldots + 10^{(m-1)n}]$$

se observă că:

$$10^n \equiv -k \qquad \text{Mod. } (k+10^n)$$

iar

$$10^{pn} \equiv (-1)^p \cdot k^p \quad \text{» } \quad \text{»}$$

aşa că:

$$10^{(m-1)n} \equiv (-1)^{m-1} k^{m-1} \qquad \text{Mod. } (k+10^n)$$

Deci:

$$M \equiv N\,[1 - k + k^2 - k^3 + \ldots + (-1)^{m-1} \cdot k^{m-1}] \qquad \text{Mod. } (k+10^n)$$

$$\therefore \qquad M \equiv N\,\frac{1-(-1)^m \cdot k^m}{1+k} \qquad \text{Mod. } (k+10^n)$$

$$\therefore \qquad M \equiv N\,\frac{1 \pm k^m}{1+k} \qquad \text{» } \quad \text{»}$$

după cum *m* este impar sau par.

*) Redactarea s'a făcut după soluţia d-lui EM. MANOLESCU.

*Aplicaţie.* Punând $N = 44$, $n = 2$, $k = 3$, $m = x$, obţinem:

$$M = \underbrace{44\,44 \ldots 44}_{\text{de x ori}} \equiv 44\,\frac{1 \pm 3^x}{4} \qquad \text{Mod.}\,(3 + 10^2)$$

$$\therefore \qquad M \equiv 11\,(1 \pm 3^x) \qquad \text{Mod.}\,(103)$$

II. Soluţie dată de d-nul M. SARIAN (Constanţa).

M putându-se scrie:

$$M = N\,\frac{10^{mn} - 1}{10^n - 1},$$

va trebui să demonstrăm congruenţa:

$$\frac{10^{mn} - 1}{10^n - 1} \equiv \frac{1 \pm k^m}{1 + k} \qquad \text{Mod.}\,(k + 10^n)$$

după cum $m$ este impar sau par, sau — ceeace e tot una — să arătăm că:

$$10^{mn}(k+1) - (k+1) \mp k^m (10^n - 1) - (10^n - 1) = \mathcal{M}.(k + 10^n).$$

Dar:

$10^{mn} = (10^n)^m = (10^n + k - k)^m = \mathcal{M}.(k + 10^n) \mp k^m$, ($m$ impar $m$ par)

deci:

$$\mathcal{M}.(k + 10^n) \mp k^m (k+1) \mp k^m (10^n - 1) - (k + 10^n) = \mathcal{M}.(k + 10^n)$$
$$\mp k^m (k + 10^n) - (k + 10^n) = \mathcal{M}.(k + 10^n).$$

Q. E. D.

*Aplicaţia*: Ca la soluţia I.

III. Soluţie dată de d-nii: B. M. BARBĂLATT, TR. DORDEA, DIMA ILIESCU (elev liceul militar Tg. Mureş), I. IONESCU — BREZUICA şi AL. TAUBER.

In articolul d-lui GR. ZAPAN din *Gazeta Matematică*, XXIV, pag. 113—116, găsim teorema:

*Restul diviziunii unui număr* A *prin altul* B, *este dat de expresiunea:*

$$E \equiv g_1 - n g_2 + n^2 g_3 - n^3 g_4 + \ldots + (-1)^{i-1} . n^{i-1} . g_i$$

$g_1, g_2, \ldots g_i$ *fiind grupele dela dreapta spre stânga de câte* m *cifre ale numărului* A, (m + 1) *numărul cifrelor lui* B *şi* n *diferenţa* $(B - 10^m)$.

Problema de faţă este o aplicaţiune a acestei teoreme a d-lui Gr. Zapan. In adevăr, avem:

$$A = M = \underbrace{NN\,N\ldots N}_{\text{de } m \text{ ori}}, \quad \text{iar } B = k + 10^n,$$

deci restul diviziunii lui A prin B, adică a lui M prin $(k + 10^n)$, este dat de congruenţa:

$$M \equiv N - kN + k^2N - k^3N + \ldots + (-1)^{m-1} \cdot k^{m-1} \cdot N \text{ Mod. } (k + 10^n)$$

$$\therefore\ M \equiv N[1 - k + k^2 - k^3 + \ldots + (-1)^{m-1} \cdot k^{m-1}] \text{ Mod. } (k + 10^n)$$

$$\therefore\ M \equiv N \frac{1 \pm k^m}{1 + k} \text{ Mod. } (k + 10^n)$$

după cum *m* este impar sau par.

Q. E. D.

*Aplicaţia:* Ca la soluţia I.

IV. Soluţie şi generalizare dată de d-nii: M. Adam şi N. Georgescu — Roegen.

Să rezolvăm următoarea problemă mai generală:

*Fie* N *un număr de* n *cifre, în baza* b, *şi* M *numărul obţinut scriind de* m *ori numărul* N. *Să se demonstreze că:*

$$M \equiv N \frac{1 \pm k^m}{1 + k} \text{ Mod. } (k + b^n)$$

*după cum* m *este impar sau par,* k *fiind un întreg oarecare.*

*Aplicaţie. Să se arate că numărul 444... 44, de* 2x *cifre, din baza* b, *dă acelaşi rest prin* $(3 + b^2)$ *ca şi expresia* $11(1 \pm 3^x)$, *după cum* x *este impar sau par.*

Din lipsă de spaţiu nu mai reproducem demonstraţia, care de altfel este identică cu cea din soluţia III, cu deosebirea că în loc de 10 s'a considerat *b* ca bază a sistemului de numeraţie.

*Observare:* Alte soluţii foarte bune s'au mai primit de la d-nii: M. Adam, B. M Barbălatt, I. Bârsu, N. I. Ciorănescu, Th. Constantinescu, L. Focşăneanu, M. Gâtan, N. Georgescu-

ROEGEN, GR. MOISIL, AL NICULESCU, M. NICULESCU, L. ROSENFELD şi AL. TAUBER.

In ultimul moment s'a mai primit o soluţie dela d-l V. COŞNIŢĂ.

---

PROBLEMA 2799. *Cercurile descrise din picioarele medianelor unui triunghiu oarecare* ABC *ca centre, cu raze respectiv egale cu medianele corespunzătoare, au ca centru radical simetricul ortocentrului, în raport cu centrul cercului circumscris.*

M. GRÜNBAUM.

1. Această chestiune este cunoscută. In *Exercices de Mécanique* par *F. G.—M.*, p. 679, se găseşte chestiunea 1324 cu următorul enunţ, datorită lui VIGARIÉ:

Se consideră un triunghiu ABC cu medianele sale $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Din fiecare vârf ca centru se descrie un cerc având ca rază latura opusă. Din fiecare mijloc $A_1$, $B_1$, $C_1$ ca centru se descrie un cerc trecând prin vârful opus. Să se arate că aceste două sisteme de cercuri au acelaş centru radical.

După cum se vede, problema lui VIGARIÉ conţine atât problema 2799, cât şi problema 2411, propusă în *Gazeta Matematică* Vol. XXI, pag. 359 de E. N. BARISIEN. Am dovedit însă că centrul radical al cercurilor din problema 2411 este punctul R, simetricul ortocentrului în raport cu centrul cercului circumscris [1]). Urmează dar, după teorema lui VIGARIÉ, că şi cercurile din problema 2799 au ca centru radical tot punctul R.

Demonstraţia din *Exercices de Mécanique* este dată în coordonate baricentrice.

EUGEN I. BALLAN.
Student.

2. Să luăm triunghiul ABC ca triunghiu de referenţă. Ecuaţiile cercurilor descrise din $B_1$ şi $C_1$ ca centre, cu raze respectiv egale cu $\overline{BB_1}$ şi $\overline{CC_1}$, sunt în coordonate baricentrice:

$$2F/\delta = (\alpha + \gamma)\ (b^2 - c^2 - a^2),$$

$$2F/\delta = (\alpha + \beta)\ (c^2 - a^2 - b^2),$$

[1]) A se vedeà soluţia Problemei 2411 din *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII pag. 298.

în care $F = a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta$, $\delta = \alpha + \beta + \gamma$.

Axa lor radicală este deci:

$$2(b^2 - c^2)\alpha + (a^2 + b^2 - c^2)\beta - (c^2 + a^2 - b^2)\gamma = 0,$$

care taie latura BC ($\alpha = 0$) în punctul A', ale cărui coordonate sunt $(0, c^2 + a^2 - b^2, a^2 + b^2 - c^2)$ și care e isotomicul picioruluí înălțimei scoborîte din A. Cum această axă radicală e perpendiculară pe linia centrelor $B_1C_1$, deci și pe BC, e paralelă cu înălțimea AH, și ținând seamă de rezultatul de mai sus, e simetrica înălțimei AH, față de mediatoarea laturei BC.

La fel celelalte două axe radicale sunt simetricele înălțimilor BH și DH, față de mediatoarele corespunzătoare. Ele se vor întâlni deci în simetricul ortocentrului față de centrul cercului circumscris.

Ion C. Vasiliu.
Elev Cl. VII, Lic. Mănăstirea Dealului.

3. Iată o soluție geometrică simplă a teoremei lui Vigarié și deci a problemelor 2799 și 2411.

Fie [2]) A , $B_1$, $C_1$ mijloacele laturilor BC, CA, AB; D simetricul vârfului A în raport cu mediatoarea laturei BC și D' simetricul lui D în raport cu BC. Fie EE' și FF' dreptele analoage cu DD', în raport cu laturile CA și AB.

Cercurile (A, $a$), (B, $b$), (C, $c$) descrise din vârfurile A, B, C ca centre, cu raze respectiv egale cu laturile opuse, au două câte două ca axe radicale corzile DD', EE', FF', care fiind simetricele înălțimilor în raport cu mediatoarele corespunzătoare, se întretaie, după o proprietate cunoscută, într'un acelaș punct R, simetricul ortocentrului în raport cu centrul cercului circumscris. Este însă ușor de văzut că cercul ($A_1$, $m_a$) descris din $A_1$ ca centru cu $AA_1$ ca rază, trece și el prin D și D', căci avem $AA_1 = DA_1 = D'A_1$. De aici urmează că cercurile (B,$b$), (C,$c$) și ($A_1$,$m_a$) au ca axă radicală coarda comună DD' și prin urmare puterile punctului R în raport cu aceste trei cercuri sunt egale.

La fel demonstrăm că cercurile (C,$c$), (A,$a$) și ($B_1$,$m_b$) au ca axă radicală coarda lor comună EE' și deci puterile punctului R în raport cu aceste trei cercuri sunt deasemenea egale.

---

[2]) A se vedea figura Problemei 2411, *Gazeta Matematică* loc. cit.

Dar R fiind centrul radical al cercurilor (A, $a$), (B, $b$) şi (C, $c$) rezultă că puterile punctului R în raport cu cercurile ($A_1$,$m_a$) şi ($B_1$,$m_b$) sunt egale, sau cu alte cuvinte că R se află pe axa radicală a cercurilor ($A_1$,$m_a$) şi ($B_1$,$m_b$).

La fel arătăm că R se află pe axa radicală a cercurilor ($B_1$,$m_b$) ($C_1$,$m_c$); deci R este centrul radical al cercurilor descrise în condiţiile problemei 2799.

V. CRISTESCU.

*NOTĂ.* D-l CONST. I. GEORGESCU a rezolvat problema considerând triunghiul complimentar $A_1B_1C_1$ şi arătând că în acest triunghiu e indeplinită condiţia dată de D-l D. PERIEŢEANU, *) ca două sisteme de cercuri, descrise din vârfurile triunghiului ca centre, să aibă centrele lor radicale simetrice în raport cu ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$.

D-sa a dat şi o bună soluţie analitică.

D-nii: CONST. I. CIORĂNESCU şi PAUL I. IONESCU au dat o soluţie analitică la fel cu aceea a D-lui I. C. VASILIU.

S'au mai primit şi alte soluţii, dar necomplete.

---

PROBLEMA 3047. *Să se rezolve sistemul:*

$$\frac{x(y+z)}{x+y+z}=a,\qquad \frac{y(z+x)}{x+y+z}=b,\qquad \frac{z(x+y)}{x+y+z}=c.$$

E. ABASON.

Au trimis soluţiuni şi generalizări, D-nii: C. F. GEORGESCU (Şcoala Politehnică, Bucureşti), FLOREA NEGRETZU (Lic. din Piteşti), ŞTEFAN FL. LĂZĂRESCU (Giurgiu), TIBERIU POPOVICIU (Arad), EMIL ŞTEFĂNESCU (Liceul Spiru Haret, Bucureşti).

Numai soluţiuni, D-nii: M. I. ADAM (Constanţa), G. O. AMĂRESCU (Caracal), EUGENIU BALLAN (student, Bucureşti), LEON BRÜLL (Lic. Cantemir-Vodă, Bucureşti), C. P. CARAGHEORGHE (Constanţa), R. D. CĂDERE (Liceul Internat, Iaşi), ION COŞEREANU, V. R. DUMITRIU (Iaşi), DOBRESCU BĂBICI (Caracal), I. M. GOLDSTEIN (Liceul Codreanu, Bârlad), CRISTEA P. GOILAV (student, Tecuci), A. I. GUŢU (Iaşi), S. T. EPURE (Buzău), ILIE IONESCU-BREZUICA (Caracal), JEAN TH. LĂZĂRESCU (Liceul I. C. Brătianu, Piteşti), ŞTEFAN MARIN (Constanţa), P. A. MIRESCU (Lic. Lazăr, Bucureşti), EDGAR C. RUSSU (Liceul Internat, Iaşi), DANILO SOLOMON, WILHELM SOLOMON (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), DU-

*) *Asupra centrului radical, Gazeta Matematică.* Vol. XXIV, p. 21.

MITRU M. TEODORESCU (Liceul Mihai Viteazul, Bucureşti), LEON WEISS (Liceul Vasile Alexandri, Galaţi).

Au trimis soluţiuni incomplete, D-nii: C. I. GEORGESCU (Liceul Mihai Viteazul, Bucureşti), STERIAN MĂCRINEANU (Galaţi).

S'au primit şi alte soluţiuni în care, deşi calea aleasă pentru rezolvare era bună, conţin erori de calcul.

Numele rezolvitorilor din urmă au fost publicate pe copertă.

*Soluţiune.* Sistemul dat se poate scrie astfel:

$$(1) \qquad \frac{x(y+z)}{a} = \frac{y(z+x)}{b} = \frac{z(x+y)}{c} = x+y+z;$$

multiplicând respectiv ambii termeni ai celor trei rapoarte prin $yz$, $zx$, $xy$ şi aplicând o proprietate a rapoartelor egale, avem:

$$\frac{2xyz\,(x+y+z)}{ayz+bzx+cxy} = x+y+z,$$

ecuaţiune care conduce la soluţiunea

$$x+y+z=0, \qquad x=y=z=0$$

şi la ecuaţiunea:

$$(2) \qquad ayz+bzx+cxy = 2xyz.$$

Insemnând

$$x' = 1/x \quad , \quad y' = 1/y \quad , \quad z' = 1/z,$$

obţinem din (1) şi (2):

$$(3) \qquad \begin{cases} ax'+by'+cz' = 2 \\ -ax'+by'+(b-a)z' = 0 \\ (c-b)x'-by'+cz' = 0. \end{cases}$$

Din ultimile două ecuaţiuni (3), obţinem:

$$\frac{x'}{a-b-c} = \frac{y'}{-a+b-c} = \frac{z'}{-a-b+c} = K.$$

Ţinând seama de prima ecuaţiune (3), aflăm:

$$K = \frac{2}{\Sigma a^2 - 2\Sigma bc}$$

şi deci

$$x = \frac{1}{x'} = \frac{\Sigma a^2 - 2\Sigma bc}{2(a-b-c)},$$

iar pentru $y$ şi $z$ expresiuni analoage, deduse din aceea a lui $x$ prin permutări circulare.

*Notă.* Sistemul propus se prezintă în Electricitate la aflarea a trei rezistenţe $x$, $y$, $z$ montate în triunghiu, când se cunosc diferenţele de potenţial $a$, $b$, $c$ între vârfurile triunghiului, luate două câte două.

*Generalizare* dată de Domnul TIBERIU POPOVICIU (Arad). Fie sistemul:

$$(4) \qquad \frac{x_i\,(\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{n-2})}{\sum_1^n x_i} = a_i\,, \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

(în paranteza dela numărător fiind suma produselor de $n-2$ factori a necunoscutelor, afară de $x_i$ ).

Deducem din ecuaţiunea de mai sus:

$$\frac{(n-1)x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n}{\sum_1^n x_i} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots a_n - (n-2)a_i\,;$$

să punem:

$$\sum_1^n x_i = S, \qquad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (n-2)a_i}{n-1} = A_i\,,$$

obţinem sistemul:

$$(5) \qquad x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n = SA_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

de unde

$$\left[\prod_1^n x_i\right]^{n-1} = S^n \prod_1^n A_i\,,$$

$$\prod_1^n x_i = S \sqrt[n-1]{S \prod_1^n A_i}$$

şi ţinând seama de ecuaţiunea (5)

$$x_i = \sqrt[n-1]{\frac{\prod_1^n A_i}{S\,A_i^{n-1}}}\,, \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

însă

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sqrt[n-1]{\frac{\prod_{i=1}^{n} A_i}{A_i^{n-1}}} \cdot S = S$$

$$\therefore \quad S = \frac{\sqrt[n-2]{(\Sigma A_1 A \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n)^{n-1}}}{A_1 A_2 \ldots A_n}$$

și deci soluțiunile sistemului sunt:

$$x_i = \frac{\sqrt[n-1]{\Sigma A_1 A_2 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n}}{A_i} \cdot \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Regăsim sistemul propus făcând $n = 3$.

E. A.

---

PROBLEMA 3053. *Fie* ABC *un triunghiu înscris în cercul* O; A′ *și* A″ *punctele unde bisectoarele unghiului* A *întâlnesc cercul* O. *Se notează cu* P′ *și* Q′ *proecțiile lui* A′ *pe* AB *și* AC *și cu* P″ *și* Q″ *proecțiile lui* A″ *pe* AB *și* AC. *Prin* P′ *și* Q′ *se duc paralele la* AA′, *care întâlnesc pe* BC *în* $B_1$ *și* $C_1$, *iar prin* P″ *și* Q″ *se duc paralele la* AA″, *care întâlnesc pe* BC *în* $B_2$ *și* $C_2$. *Să se arate că* $BC = B_1C_1 = B_2C_2$.

D. V. Ionescu.

Dreptele P′B′ și Q′$C_1$ întâlnesc tangenta în A′ la cercul O în D și E. Se obsearvă că patrulaterul DA′P′B este inscriptibil, ca având unghiurile BP′D, BA′D egale cu jumătatea unghiului A. Deasemenea patrulaterul A′EQ′C este inscriptibil. Rezultă că BD și CE sunt perpendiculare pe BC. Din egalitatea triunghiurilor $BDB_1$, $CEC_1$ rezultă imediat că $BB_1 = CC_1$, ceeace erà de demonstrat.

Demonstrație analoagă pentru cazul segmentului $B_2C_2$.

Au rezolvat problema, D-nii: Mircea I. Adam (Constanța), Eug. Ballan (Sf. Sava, București), B. M. Barbălatt (Lic. Codreanu, Bârlad), Adrian A. Buşilă (Sc. Politechnică, București), Const. I. Ciorănescu (Mânăstirea Dealului), Ion Coşereanu (Timişoara), Vasile I. Dimitriu (Iași), Const. I. Georgescu (Lic. Mihai Viteazul, București), Virgil Ghițescu (Sc. Politechnică, București), Gh. Grofşoreanu (Lic. Moise Nicoară, Arad), Micu Grünbaum

(Bârlad), ALEX. I. GUȚU (Iași), PAUL I. IONESCU (Mănăstirea Dealului), ST. R. LĂZĂRESCU (Lic. Ion Maiorescu, Giurgiu), CONST. D. MIHĂILESCU (Lic. Ion Maiorescu, Giurgiu), ALEX. V. NICULESCU (București), M. I. PĂTROIANU (Mănăstirea Dealului), OV. GH. POPEA (Lic. B. P. Hajdeu, Chișinău), ION SERGHEIEV (Lic. B. P. Hajdeu, Chișinău), GH. D. SIMIONESCU (Mănăstirea Dealului), ALEX. TAUBER (Lic. Laurian, Botoșani), TRAIAN I. UDRISKY (Lic. Moise Nicoară, Arad), ION C. VASILIU (Mănăstirea Dealului), SOLOMON WEISS (Galați), WILHELM SOLOMON (Lic. Matei Basarab, București), B. M. ZUCKERMANN (Bârlad).

D-nul TIBERIU POPOVICIU (Lic. Moise Nicoară, Arad), a generalizat problema în felul următor:

Fie A′ un punct pe arcul BC al cercului circumscris triunghiului ABC, astfel $\sphericalangle A'AB=\alpha$. Prin A′ se duc dreptele A′P′ și A′Q′, cari fac același unghiu $\omega$ cu AB și AC și din P′ și Q′ se duc paralele la AA′, cari întâlnesc pe BC în $B_1C_1$. Lungimea segmentului $B_1C_1$ este dată de formula

$$B_1C_1 = BC\,\frac{\sin(C+\alpha)\sin(\omega - A + 2\alpha)}{\sin\omega\sin(B+\alpha)}.$$

Era însă bine să fi dat și o soluție simplă chestiunei propuse.

D. V. I.

---

PROBLEMA 3135. *Să se construiască un triunghiu, căruia i se cunoaște perimetrul, un unghiu și raportul a două laturi.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

I. Soluție dată de d-nii: G. BOGDAN, O. BURSTIN, R. CĂDERE (Lic. Internat, Iași), A. MLADENOVICI (Clasa V particulară, București) și A. NOVAC.

Fie ABC triunghiul cerut, D piciorul bisectoarei din B, B′C′ o paralelă la BC, F și H picioarele bisectoarelor unghiului C′B′A′ Vom deosebi 2 cazuri.

*Cazul I.* Se dă $2p$, AB/AC și Â. De oarece

$$AB/AC = AB'/AC' = \text{dat},$$

direcția B′C′ se poate determină totdeauna luând pe laturile un-

ghiului A două lungimi AB', AC', care să aibă un raport egal cu cel dat al laturilor AB şi AC. Unghiurile triunghiului AB'C' fiind cunoscute, rezultă că şi unghiurile A,B,C sunt cunoscute şi problema se reduce la a construi un triunghiu, căruia i se cunoaşte perimetrul şi unghiurile, problemă cunoscută *(Culegere de probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie*, problema 20, pagina 121). Se construeşte triunghiul MCN, care are latura MN egală cu perimetrul dat şi unghiurile M şi N respectiv egale cu A/2 şi B/2. Perpendicularele în mijloacele Q şi P, ale laturilor CM şi CN, taie pe MN în A şi B, care unite cu C dau triunghiul cerut ABC.

*Cazul II.* Se dă $2p$, AB/BC şi Â. Fie AB'C' un triunghiu oarecare, asemenea cu cel căutat ABC. Latura B'C' e paralelă cu BC, iar bisectoarele unghiului B' taie pe AC în D şi E. Avem:

$$AE/AD = AB'/B'C' = AB/BC.$$

Construcţia triunghiului A'B'C' urmează imediat. Pe una din laturile unghiului dat A, se iau segmentelele AE, AD, al căror raport este egal cu cel dat. Cercul descris pe DE ca diametru taie pe AB în B'. Se ia B'C' simetrica lui AB' faţă de B'D. Triunghiul AB'C' fiind construit, problema se reduce la cazul I.

De oarece cercul de diametru DE taie pe AB în 2 puncte, vom avea totdeauna 2 soluţii.

II. Soluţie dată de d-nii: A. Udrisky, O. Bolgiu, N. Botea (Lc. Cantemir, Bucureşti) şi L. Căldăraru (Lc. Şincai, Bucureşti).

Fie D şi E punctele de tangenţă cu laturile AB şi AC ale cercului exînscris $I_a$ unghiului A. Se ştie că AD, AE sunt egale cu $p$. Construcţia urmează imediat.

In cazul I se iau pe laturile unghiului dat lungimile AD şi AE, egale cu $p$ şi 2 lungimi AB', AC', al căror raport este egal cu cel dat. Se duce apoi la $I_a$, o tangentă BC paralelă cu B'C'.

In cazul II se ia pe AD un punct oarecare M, apoi cu centrul in M şi cu o rază MN dată de

$$AM/MN = AB/BC,$$

se determină pe AE un punct N (sau două) pe AE. Tangenta BC paralelă la MN, este latura triunghiului ABC. Se vede că în acest caz problema poate avea 2 soluţiuni.

*Observaţiuni* 1°. Au rezolvat foarte bine problema prin calcule, d-nii: A. Opriescu, G. Ionescu-Zane, B. Reinhorn (Lc. Cantemir, Bucureşti), M. Adam, S. Epure (Lc. Constanţa), R. Mihăilescu (R. Vâlcea), S. Weiss.

2°. D-nii: M. Vasilescu (Lc. Giurgiu) şi S. Weiss (Lc. Alexandri) au dat bune soluţii trigonometrice.

3°. D-l M. Goldstein (Seminarul Pedagogic, Bucureşti) a dat o soluţie algebrică *rezolvând*, iar nu *construind* triunghiul.

4°. Au considerat numai cazul I, d-nii: L. Brüll, P. Bleiweiss, D. Niculescu (Lc. Cantemir, Bucureşti), D. T. Dumitrescu şi T. Angelescu.

PROBLEMA 3138. *Să se determine coeficienţii*, A, B, C, D, *astfel ca polinomul*

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + 6,$$

*să fie divizibil prin* $(n-1)^4$ *şi în acest caz să se dea şi câtul diviziunei.*

Th. Angheluţă.

Să considerăm cazul mai general, căutând să determinăm coeficienţii polinomului,

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{m-1} x^{n-m+1} + A_m,$$

pentruca să fie divizibil cu $(x-a)^m$. Derivata sa

$$P'(x) = x^{n-m}[nA_0 x^{m-1} + (n-1)A_1 x^{m-2} + \cdots + (n-m+1)A_{m-1}],$$

trebue să se dividă cu $(x-a)^{m-1}$. Deci trebue să avem identitatea

$$(1)\quad nA_0 x^{m-1} + (n-1)A_1 x^{m-2} + \cdots + (n-m+1)A_{m-1} \equiv k(x-a)^{m-1}.$$

Rezultă de aici pentru coeficienţi, următoarele valori:

$$A_0 = \frac{k}{n},\quad A_1 = \frac{-kC^1_{m-1}a}{n-1},\quad \ldots,\quad A_p = \frac{(-1)^p kC^p_{m-1}a^p}{n-p} \ldots,$$

$$A_{m-1} = \frac{(-1)^{m-1} k a^{m-1}}{n-m+1},$$

unde $k$ este o constantă de proporţionalitate.

Pentru a determină pe $A_m$, vom scrie că $P_x$ se divide cu $(x-a)$. Scriind aceasta, obţinem

$$A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \cdots + A_{m-1} a^{n-m+1} + A^m = a.$$

Inlocuind valorile de mai sus găsim:

$$A_m = (-1)\, k a^n \left[\frac{1}{n} - \frac{C^1_{m-1}}{n-1} + \cdots + (-1)^p \frac{C^p_{m-1}}{n-p} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{n-m+1}\right].$$

Se găsește ușor formula

$$\frac{1}{n} - \frac{C^1_{m-1}}{n-1} + \cdots + (-1)^p \frac{C^p_{m-1}}{n-p} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{n-m+1} = (-1)^{m-1} \frac{(n-m)!\,(m-1)!}{n!}.$$

Dèci avem pentru ultimul coeficient valoarea

$$A_m = (-1)^m \frac{k a^n (n-m)!(m-1)!}{n!}$$

și polinomul P $(x)$ este perfect determinat, afară de factorul $k$ ceeace erà evident a priori. Pentru cazul particular, avem

$$m = 4\ ,\ a = 1$$

și fiindcă ni se dă ultimul coeficient, vom determinà pe $k$ din egalitatea

$$6 = \frac{k(n-4)!\,3!}{n!} \quad \therefore \quad k = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3).$$

Cunoscând pe $k$ avem toți coeficienții:

$$A_0 = A = (n-1)\,(n-2)\,(n-3)$$
$$A_1 = B = -3n\,(n-2)\,(n-3)$$
$$A_2 = C = 3n\,(n-1)\,(n-3)$$
$$A_3 = D = -n\,(n-1)\,(n-2)$$

Să determinăm acum câtul diviziunei pentru cazul când nu avem rest.

Atunci avem:

$$P(x) = (x-a)^m\, Q(x)$$

$$\therefore \quad P'(x) = (x-a)^{m-1}\,[m\,Q(x) + (x-a)\,Q'(x)]$$

Identitatea (1) este echivalentă cu identitatea

$$P'(x) = k\,(x-a)^{m-1}\, x^{n-m}.$$

Substituind în loc de P $'(x)$ valoarea de mai sus, obținem identitatea

$$(2) \qquad m\,Q(x) + (x-a)\,Q'(x) = k\,x^{n-m},$$

Să punem

$$Q(x) = C_0 x^{n-m} + C_1 x^{n-m-1} + \ldots + C_p x^{n-m-p} + C_{n-m}.$$

Din identitatea (2) obținem în general

$$C_p = \frac{k a^p (n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-p+1)}{n(n-1)\ldots(n-p)},$$

$p$ variind de la 0 la $n-m$. Pentru verificare se găsește

$$C_o = \frac{k}{n}, \qquad C_{n-m} = \frac{k(n-m)!\, a^{n-m}}{n(n-1)\ldots m} = \frac{A^m}{(-1)^m a^m}.$$

Pentru cazul particular, avem:

$$C_p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p-3)}{n(n-1)\ldots(n-p)} = (n-p-1)(n-p-2)(n-p-3)$$

și deci câtul este

$$Q(x) = \sum_{p=0}^{n-4} (n-p-1)(n-p-2)(n-p-3) x^{n-4-p}.$$

In cazul general, avem identitatea

$$\sum_{p=0}^{m-1} \frac{(-1)^p k C_{m-1}^p}{n-p} a^p x^{n-p} + (-1)^m k a^n \frac{(n-m)!(m-1)!}{n!} \equiv$$

$$(x-a)^m \sum_{p=0}^{n-m} \frac{k a^p A_{n-m}^p}{A^{p+1}} x^{n-m-p}.$$

Relativ la aceasta, D-l Ovidiu Popea (Chișinău) face următoarea frumoasă observație.

Să schimbăm notațiile și să punem

$$m = p + 1$$

și în loc de $n$ pe $n+1$ și în loc de $p$ pe $q$.

Avem

$$\sum_{0}^{p} (-1)^q \frac{k C_p^q a^q x^{n-q}}{n+1-q} - (-1)^p \frac{p!}{A_m^{p+1}} = (x-a)^{p+1} \sum_{q=0}^{n-p} \frac{k a^q A_{n-p}^q}{A_{n+1}^{q+1}} x^{n-p-1}.$$

Dacă se înmulțește și cu $A_m^{p+1}$ ambii membri, se obține tocmai problema (3024) propusă de D-l Gh. D. Popescu, unde $a = 1$.

Au rezolvat problema următorii D-ni: N. ARCADIAN, GOGU BASACOV, E. BERCOVICIU, GH. P. BOGDAN, OVID BOLGIU, RADU CĂDERE, GH. L. COSMOVICIU, DUMITRU T. DUMITRESCU, ȘTEFAN EPURE, GH. MIHOC, A. PANAITESCU, OVID POPEA, I. TH. POPOVICIU, EDGAR RUSSU, LEON WEISS.

---

PROBLEMA 3149. *Să se studieze natura seriei, al cărei termen general este:*

$$u_n = \frac{(k_1+k_2)\,(2k+k_2)\ldots\,(nk_1+k_2)}{(k_1+k_2+1)\,(2k_1+k_2+1)\ldots\,(nk_1+k_2+1)}$$

*și să se însumeze în cazul particular* $k_1=\frac{1}{2}$, $k_1$ *și* $k_2$ *fiind două constante date.*

C. E. GEORGESCU.

Soluție dată de D-nii: M. ADAM, E. BERCOVICI, D. BLUMENFELD, GH. BOGDAN, M. BRĂTESCU, I. COȘNIȚĂ, P. IONESCU, ȘT. LĂZĂRESCU, ȘT. MARIN, M. PĂTROIANU, D. POPESCU, E. RUSSU, C. SCHÖNFELD, A. TAUBER, M. VASILESCU, I. VASILIU și L. WEISS.

Teorema raportului ne dă:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Aplicând criteriul lui RAABE-DUHAMEL, găsim

$$\lim_{n=\infty} n\alpha_n = \frac{1}{k_1},$$

deci dacă $k_1 < 1$, seria e convergentă; dacă $k_1 > 1$ seria e divergentă. Dacă $k_1 = 1$, seria dată devine:

$$(1+k_2)\left(\frac{1}{1+k_2}+\frac{1}{2+k_2}+\ldots+\frac{1}{n+k_2}\right)$$

a cărei divergență este evidentă.

Când $k_1 = \frac{1}{2}$ seria e convergentă; pentru a o însumă, observăm că termenul general se poate scrie:

$$u_n = (1+2k_2)\,(2+2k_2)\left[\frac{1}{n+1+2k_2} - \frac{1}{n+2+2k_2}\right],$$

astfel că, dacă notăm cu $S_n$ suma:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

vom avea:

$$S_n = (1 + 2k_2)(2 + 2k_2)\left[\frac{1}{2k_2+2} - \frac{1}{n+2+2k_2}\right],$$

deci

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = \frac{(1 + 2k_2)(2 + 2k_2)}{2 + 2k_2} = 1 + 2k_2.$$

2. Soluție dată de D-nii: N. Botea și O. Popea.

Seria propusă este un caz particular al seriei mai generale

$$S = \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \frac{(\alpha + r)(\alpha + 2r) \ldots (\alpha + nr)}{(\beta + r)(\beta + 2r) \ldots (\beta + nr)},$$

studiată de D-l I. Stoenescu în nota 5 din «R. M. T.» vol. IV, pag. 26. Se găsește acolo condiția de convergență:

$$\beta - \alpha > r,$$

precum și suma

$$S = \frac{\alpha + r}{\beta - \alpha - r},$$

Luând

$$\alpha = k_2,\ \beta = k_2 + 1,\ \gamma = k_1,$$

regăsim seria din problema 3149.

---

PROBLEMA 3151. *Dacă un număr întreg este suma a două patrate perfecte, orice putere întreagă a sa va fi suma a două patrate perfecte.*

M. Ghermănescu.

1. Soluție dată de D-nii: M. Adam, N. Botea, Chiriac Georgescu, C. Ionescu-Bujor, D. Popescu, O. Popea și D. Teodorescu.

Fie $N = a^2 + b^2$,

vom avea

$$N^{2k+1} = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2)^{2k} = [a(a^2 + b^2)^k]^2 + [b(a^2 + b^2)^k]^2;$$

analog

$$N^{2k} = (a^2+b^2)^{2(k-1)}(a^2+b^2)^2 = (a^2+b^2)^{2(k-1)}[(a^2-b^2)^2+(2ab)^2]$$
$$= [(a^2-b^2)(a^2+b^2)^{k-1}]^2 + [2ab(a^2+b^2)^{k-1}]^2.$$

2. Soluție dată de D-nii: C. Ionescu-Bujor (Elev Cl. VI, Lic. «Cantemir», București), M. Georgescu, C. Giurumescu, A. Novac și V. Vârlan (Elevi Cl VI, Lic. «Internat», Iași).

Fie $N = a^2+b^2 = (a+ib)\ (a-ib)$,

vom avea

$$N^p = (a+ib)^p\,(a-ib)^p =$$
$$[(a^p - C_p^2 a^{p-2}b^2 + C_p^4 a^{p-4}b^4 \ldots) + i(C_p^1 a^{p-1}b - C_p^3 a^{p-3}b^3 + \ldots)]$$
$$[(a^p - C_p^2 a^{p-2} + C_p^4 a^{p-4}b^4 \ldots) - i(C_p^1 a^{p-1}b - C_p^3 a^{p-3}b^3 + \ldots)]$$
$$\therefore N^p = [a^p - C_p^2 a^{p-2}b^2 + C_p^4 a^{p-4}b^4 - \ldots]^2$$
$$+ [C_p^1 a^{p-1}b - C_p^3 a^{p-3}b^3 + \ldots]^2 = A^2 + B^2.$$

3. *NOTĂ a*). Au demonstrat din aproape în aproape, servindu-se de identitatea lui Euler (Lagrange) proposiția de mai sus, D-nii: M. Adam, I. Miu, A. Mladenovici, S. Rabinovici, O. Schächter.

*b*) A dat o soluție, particularizând enunțul problemei 2829, D-l A. Tauber.

*c*) D-nii: M. Adam și N. Botea au generalizat chestiunea, considerând numărul N egal cu o sumă de mai multe patrate.

D-l N. Botea a cuprins în generalizarea D-sale și problema 180 din „*R. M. T.*", propusă de D-l I. Linteș.

*d*) În fine, tot D-l N. Botea s'a ocupat și de cazul când numărul dat este o diferență de două patrate.

*e*) Problema mi se pare cunoscută în toată generalitatea ei. Fără a observă din timp aceasta, am propus'o tocmai ca o generalizare a problemei D-lui I. Linteș, la care a făcut aluzie D-l N. Botea.

M. G.

---

PROBLEMA 3156. *Să se verifice identitatea:*

$$\sum \frac{a^2(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} = \left[\sum \frac{a(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}\right]^2,$$

*sumele fiind întinse la permutări circulare între* a, b, c.

E. Ștefănescu.

Soluție dată de D-nii: M. Adam, C. Berdan, N. Botea, C. Ciorănescu, D. Iliescu, Șt. Marin, I. Miu, M. Pătroianu, O. Popea, D. Popescu, D. Samoilă, G. Simionescu și I. Vasiliu.

Primul membru al identității propuse, se poate scrie :

$$\sum \frac{a^2(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{\pi(a-b)}\left[k^2\Sigma a^2(c-b)+k\Sigma a^2(b^2-c^2)+abc\Sigma a(c-b)\right]$$

$$= k^2\frac{\Sigma a^2(c-b)}{\pi(a-b)} = k^2,$$

căci $$\Sigma a^2(c-b) = \pi(a-b).$$

Analog obținem și pentru membrul al doilea valoarea $k^2$, ceeace dovedește identitatea celor două expresiuni.

---

PROBLEMA 3181. *Să se găsiască patratele perfecte de patru cifre, ale căror rădăcini să fie numere formate cu două cifre ale acestora.*

N. Botea.

Soluție dată de D-l I. M. Miu (Lic. Caracal).

Vom deosebì mai multe cazuri, după cum $\sqrt{mszu}$ începe cu $m$, $s$, $z$ sau $u$.

1. Ca $\sqrt{mszu}$ să înceapă cu $m$, trebuie ca $\sqrt{ms}$ să aibă partea întreagă $m$, ceeace nu se poate decât dacă $ms = 80; 90; 91; 92; 93; 94; 95; 96; 97; 98; 99$. Incercăm a extrage rădăcina lui $80zu$ după regula cunoscută și vedem că nu ese întreagă; la $90zu$ ese întreagă dacă $zu = 25$, etc.

Se găsesc soluțiile :

$$\sqrt{9025} = 95, \qquad \sqrt{9216} = 96.$$

2. Ca $\sqrt{mszu}$ să înceapă cu $s$, nu am puteà lua decât $ms = 13; 24; 25; 35; 36; 46; 57; 68; 78; 89; 99$. Procedăm la extragerea rădăcinii și găsim soluțiile :

$$\sqrt{2500} = 50, \qquad \sqrt{3600} = 60, \qquad \sqrt{5776} = 76.$$

3. $\sqrt{mszu}$ să înceapă cu $z$, observăm mai întâiu că $z \geqslant 3$, căci altfel patratul numai are patru cifre. Aci deosebim trei cazuri :

*a)* Dacă rădăcina este $zm$, atunci nu putem aveà decât $zm = 31; 41; 42; 52; 53; 63; 64; 74; 75; 76; 86; 87; 88; 98; 99$.

Primul ne dă patrat de patru cifre. Ridicăm pe celelalte la patrat şi găsim numai soluţia:

$$\sqrt{3969} = 63.$$

*b)* Dacă rădăcina este *zs*. Cu ajutorul soluţiilor găsite la (*a*), vedem că patratul ar puteà fi: 1*s*3*d*; 1*s*4*d*; 2*s*4*d*; 2*s*5*d*; 3*s*5*d*; 3*s*6*d*; 4*s*6*d*; 4*s*7*d*; 5*s*7*d*; 6*s*7*d*; 6*s*8*d*; 7*s*8*d*; 8*s*8*d*; 8*s*9*d*; 9*s*9*d*. Incercăm să extragem rădăcina ştiind că *z* este prima cifră a ei şi nu găsim decât soluţia:

$$\sqrt{5476} = 74.$$

*c)* Dacă rădăcina este *zu*, atunci patratul fiind terminat tot cu *d*, ar trebui ca *u* să fie 0; 1; 5; 6. Insă $u = 0$ cere şi $z = 0$, ceeace nu se poate, căci rădăcina începe cu *z*. Dacă $u = 5$, trebuie $z = 2$ şi patratul nu mai are patru cifre. Deci rădăcina nu ar puteà fi decât 36; 41; 56; 61; 76; 81; 96; Ridicându-le la patrat găsim soluţia:

$$\sqrt{5776} = 76,$$

care am mai aflat-o la (2), căci are $s = z$.

4. Ca $\sqrt{mszu}$ să înceapă cu *u*, observăm că *u* termină un patrat şi că deci nu poate fi decât 1; 4; 5; 6; 9. Cifra 1 nu convine căci nu dă patrate de patru cifre. Deosebim aci trei cazuri:

*a)* Dacă rădăcina este *um*, atunci $m^2$ se termină cu *u*, şi $\sqrt{ms}$ este *u* la partea întreagă. Se găseşte că *um* ar puteà fi 42; 48; 55; 64; 66; 93; 97 după prima condiţie, dar după a doua nu rămâne decât soluţia:

$$\sqrt{4096} = 64.$$

*b)* Dacă rădăcina este *us*, ea nu ar puteà fi decât tot numerele dela (*a*). Ridicându-le la patrat niciunul nu corespunde.

*c)* Pe aceiaşi cale ca mai sus se vede că nu există soluţie.

Problema admite, în ordinea mărimei, următoarele opt soluţii:

$$\sqrt{2520} = 50 \; ; \; \sqrt{3600} = 60 \; ; \; \sqrt{3969} = 63 \; ; \; \sqrt{4096} = 64 \; ;$$

$$\sqrt{5476} = 74 \; ; \; \sqrt{5776} = 76 \; ; \; \sqrt{9025} = 95 \; ; \; \sqrt{9216} = 96.$$

Au găsit toate soluţiile, pe o cale mai lungă, D-nii: N. P. Arcadian, A. N. Stoica, P. Bleiweiss, I. C. Vasiliu.

Au dat toate soluţiile cu ajutorul unei tabele de patrate, D-nii: I. Ţigoiu, N. I. Nicolescu.

*Observări* făcute de D-l I. C. VASILIU.

1. Soluţiile problemei au fost date cu ocazia rezolvării problemei 1872, la care se cereau patratele de trei cifre, a căror rădăcină să fie formată de două cifre ale patratului. S'a găsit acolo că această problemă are soluţiile:

$$\sqrt{100} = 10 \; ; \; \sqrt{121} = 11 \; ; \; \sqrt{625} = 25 \; ; \; \sqrt{729} = 27.$$

2. Pentru patratele de cinci cifre avem patratele numerelor: 100; 101; 105; 110; 125; 139; 142; 205; 250; 255; 261; 270; 277; 278; 285; 305.

3. Pentru cuburile de patru cifre avem soluţiile:

$$\sqrt[3]{1000} = 10 \; ; \; \sqrt[3]{1331} = 11 \; ; \; \sqrt[3]{1728} = 12 \; ; \; \sqrt[3]{9261} = 21.$$

A dat 7 soluţii D-l M. ZAMFIRESCU; 6 soluţii D-nii: G. I. GROFŞOREANU, M. GHELBER şi 3 soluţii D-l G. S. VASILIU.

---

PROBLEMA 3188. *Se dă ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}.$$

*Ce valori poate lua raportul* $x/y$ *?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de d-nii: O. G. POPEA, C. BERDAN, P. I. IONESCU, I. VASILIU, M. BOTEZ, I. T. POPOVICI, D. G. SIMIONESCU, N. TEODORESCU, M. I. PĂTROIANU, N. ARCADIAN, L. CĂLDĂRARU, C. CIOBĂNESCU, M. GHELBER, D. ST. ILIESCU, G. A. STĂNCIULESCU, I. ST. TEODORESCU, S. WEISS, G. ST. BASACOV, A. N. STOICA, ST. FL. LĂZĂRESCU, N. BOTEA, C. N. POPESCU, I. SCHÄCHTER.

Punem:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = u,$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = u^2, \qquad \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} + 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = u^3$$

şi ecuaţia dată devine:

$$u^2 - 2 = u^3 - 3u,$$

$$u^3 - u^2 - 3u + 2 = (u - 2)(u^2 + u - 1) = 0,$$

$$u - 2 = 0, \qquad u^2 + u - 1 = 0,$$

$$u = 2, \qquad u = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Punem apoi :

$$x/y = v,$$

$$v + 1/v = u,$$

$$v^2 - uv + 1 = 0,$$

$$v = \tfrac{1}{2}(u \pm \sqrt{u^2 - 4}).$$

Inlocuind valorile lui $u$, găsim :

$$v = 1, \qquad v = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(-10 \pm 2\sqrt{5})}\right.$$

Deci :

$$\frac{x}{y} = 1, \qquad \frac{x}{y} = \tfrac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 \mp 2\sqrt{5}}).$$

Semnele dinaintea lui $\sqrt{5}$ se corespund.

Au rezolvat trigonometriceşte problema, D-nii : I. Popa, L. Weiss, L. L. Vlaţiu, Al. Ch. Mladenovici.

Au studiat ecuaţia mai generală :

$$\frac{x^n}{y^n} + \frac{y^n}{x^n} = \frac{x^m}{y^m} + \frac{y^m}{x^n},$$

D-nii : L. L. Vlaţiu, I. A. S. Schächter, M. I. Pătroianu, I. Popa şi cazul $m = n + 1$, D-nii : L. Weiss, G. S. Basacov, C. Ciorănescu.

Au găsit numai raportul 1, D-nii : G. I. Grofşoreanu, P. G. Spacu, I. Ţigoiu, P. Marini, I. M. Miu, A. Ionescu, C. T. Ionescu-Bujor, N. I. Nicolescu, S. Katz.

---

PROBLEMA 3193. *In triunghiul* ABC *latura* BC *e fixă, iar unghiul* A *constant. Bisectoarele unghiului* A *taie cercul circumscris triunghiului în* D *şi* E, *iar latura* BC *respectiv în* G *şi* F. *Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor* DF *şi* EG.

Gh. Simionescu.

1. Soluţie dată de D-nii : M. I. Focşeneanu (Elev Anul II, Şcoala Militară de Artilerie), Ion C. Vasiliu (Elev Clasa VII, Liceul Mănăstirea Dealului), C. D. Mihăescu (Absolvent al Liceului Giurgiu),

MIRCEA ADAM (Constanța), OVIDIU POPEA (Chișinău), MARIN ȘTEFAN (Elev Cl. VIII, Liceul Constanța), C. I. CIORĂNESCU, M. PĂTROIANU și PAUL IONESCU (Elevi Liceul Mănăstirea Dealului), LEON CĂLDĂRARU (Elev Cl. VII particulară), C. BERDAN (Bârlad), THEODOR THEODORIDIS (Elev Cl. VI, Lic. Silistra).

Se știe că bisectoarele AD, AE sunt perpendiculare una pe alta, iar D și E fiind mijloacele arcelor BDE și BEC subîntinse de coarda BC, diametrul DE este perpendicular pe BC. Rezultă imediat de aici că DG și FG sunt înălțimi în triunghiul DEF, iar EG va fi a treia înălțime. Deci, dacă L este piciorul acestei înălțimi, unghiul DLE fiind drept, iar DE diametru, punctul L se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, care e locul căutat.

2. *Generalizare* dată de D-nul LEON WEISS (Elev Cl. VIII, Liceul V. Alexandri, Galați).

*Să considerăm o conică* $\Gamma$ *circumscrisă triunghiului* ABC, *și două drepte* $\Delta_1$ *și* $\Delta_2$ *conjugate armonic în raport cu unghiul* A. *Ele taie latura* BC *în punctele* $M_1$ *și* $M_2$, *iar conica în punctele* $N_1$ *și* $N_2$. *Locul intersecției dreptelor* $M_1N_2$ *și* $M_2N_1$ *este conica* $\Gamma$.

Să luăm triunghiu ABC ca triunghiu de referență și fie:

$$Myz + Nzx + Pxy = 0,$$

$$\frac{y}{z} - \frac{m}{n} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{y}{z} + \frac{m}{n} = 0,$$

ecuațiile conicei $\Gamma$ și a conjugatelor armonice $\Delta_1$ și $\Delta_2$.

Coordonatele punctelor $M_1$, $M_2$, $N_1$, $N_2$ vor fi:

$$M_1(0,m,n); \quad N_1(-Mm, \ (Nn+Pm)m:n, \ Nn+Pm);$$

$$M_2(0,-m,n); \quad N_2(Mm, \ -(Nn-Pm)m:n, \ Nn-Pm).$$

Ecuațiile dreptelor $M_1N_2$ și $M_2N_1$ vor fi respectiv:

$$2(Nn-Pm)x + Mny - Mmz = 0,$$

$$2(Nn+Pm)x + Mny + Mmz = 0,$$

iar punctul lor de intersecție este $(-\frac{1}{2}M, N, P)$. Acest punct verifică ecuația conicei $\Gamma$, care e locul căutat.

D-nul M. I. FOCȘENEANU a dat aceiași generalizare.

D-nii: OVIDIU POPEA și ION C. VASILIU au generalizat problema, păstrând cercul circumscris și înlocuind bisectoarele unghiului A prin conjugatele armonice ale acestui unghiu.

*NOTĂ.* 1. Fie $\Delta$ dreapta perpendiculară pe mijlocul lui BC; $B_1$ şi $C_1$ intersecţiile dreptelor AB şi AC cu dreapta $\Delta$. D-nul C. D. MIHĂESCU a arătat că dacă vârful A descrie o curbă $f(x, y) = 0$, intersecţia dreptelor $BC_1$, $CB_1$ descrie o curbă simetrică cu precedenta, în raport cu $\Delta$.

2. D-nul I. C. VASILIU observă că punctul L este intersecţia simedianei vârfului A cu cercul circumscris triunghiului ABC.

## EXERCIŢII

12. Care sunt numerele de două cifre, astfel ca dând foaiei, pe care sunt scrise aceste numere, o mişcare de rotaţie de 180° în plan, în jurul unui vârf al hârtiei, să căpătăm nişte patrate perfecte.

DANILO I. SOLOMON.

R. Cifrele, care dacă le rotim cu 180° în plan rămân tot cifre, sunt 1, 6 care devine 9, 8 şi 9 care devine 6. Dintre numerele, care se pot formă cu aceste cifre, patrate perfecte sunt numai 81 şi 16. Ţinând seama că prin rotaţie cifrele s'au inversat prin numerele căutate sunt 18 şi 91.

13. Se cere patratul perfect de cinci cifre, astfel ca numărul format de primele două cifre să fie patrat perfect, prima şi ultima cifră identice şi suma cifrei a treia cu a patra să fie egală cu prima.

NAE C. ORĂSCU şi GH. I. OPRESCU.

R. Numărul format de primele două cifre este între: *16*, 25, 36, *49*, *64*, 81. Se exclud: 25, 36, 81, deoarece 2, 3, 8, nu termină patrate perfecte.

Ţinând seamă de terminaţiile patratelor perfecte, formăm, în condiţiile problemei, numerele: 16101, 49224, 49044, *64516*, 64336, 64156.

Dintre acestea, numai 64516 este patrat perfect, $64516 = 254^2$.

14. Să se găsiască un patrat perfect de 3 cifre, ştiind că ultima cifră a lui este prima cifră a rădăcinei sale, iar cifra a doua a rădăcinei, este egală cu suma primelor 2 cifre ale numărului.

N. BOTEA.

R. Patratele perfecte neputându-se termină 2 şi 3, ultima cifră a patratului căutat şi cea dintâi a rădăcinei sale va fi 1.

Formând patratele numerelor cuprinse între 11 şi 19, găsim soluţia $361 = 19^2$, în care $9 = 3 + 6$.

15. Într'un triunghiu isoscel se dă înălţimea $h$ ce pleacă din unghiul A — din vârf — şi proecţia ei $l$ pe una din laturile egale. Se cere suprafaţa triunghiului în funcţie de $h$ şi $l$?

RADU PĂSCULESCU.

R. In triunghiul dreptunghiu ABD, avem: $h^2 = cl$

$$\therefore \quad c = \frac{h^2}{l}.$$

Apoi: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{h^2}{l}\right)^2 - h^2 = \frac{h^2}{l^2}(h^2 - l^2)$

$$\therefore \quad \frac{a}{2} = \frac{h}{l}\sqrt{h^2 - l^2}$$

şi prin urmare:

$$S = \frac{1}{2} a h = \frac{h^2}{l}\sqrt{h^2 - l^2}.$$

16. Fie ABC triunghiul de ortocentru H şi al cărui centru al cercului circumscris e O. Cercul BHC taie laturile AC, AB în $A_b$ şi $A_c$. Analog se obţin punctele $B_c$, $B_a$ şi $C_a$, $C_b$. Corzile comune ale cercului O cu cercurile $A A_b A_c$, $B B_c B_a$, $C C_a C_b$ sunt paralele şi se întâlnesc la infinit în reciprocul punctului lui STEINER.

B. M. BARBĂLATT.

R. Cercurile $A A_b A_c$, $B B_c B_a$, $C C_a C_b$ sunt concentrice, centrul comun fiind H. Deci axele din exerciţiu vor fi perpendicularele din A, B, C pe OH, *dreapta lui Euler*, care se bucură de proprietatea indicată.

*Altă soluţie.* E uşor de văzut că cercul $A A_b A_c$ are ca ecuaţie barycentrică $F/S = \beta(a^2 - b^2) + \gamma(a^2 - c^2)$ şi deci intersecţia cu cercul O va avea ca ecuaţie

$\beta(a^2 - b^2) + \gamma(a^2 - c^2)$, care trece prin $R'(b^2 - c^2, c^2 - a^2, a^2 - b^2)$.

17. Să se arate că între elementele unui triunghiu, avem relaţiunea:

$$a^3 \cos(B - C) + b^3 \cos(C - A) + c^3 \cos(A - B) = abc.$$

CONST. I. CIORĂNESCU.

R. In *Culegere de probleme*, Trigonometrie, XVIII. 2, pag. 397, se demonstrează relaţiunea

$a \cos(B-C) = b \cos B + c \cos C \quad \therefore \quad \sum a^3 \cos(B-C) = \sum a^2(b \cos B - c \cos C)$

$= \sum ab\,(a \cos B + b \cos A) = 3abc$, căci $a \cos B + b \cos A = c$.

18. Între elementele unui triunghiu avem relaţiunea

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin C = \sum \frac{b - a}{2c} \sin 2C.$$

PAUL I. IONESCU.

R. Aplicăm formulele:

$\sin\frac{1}{2}(A - B)/\cos\frac{1}{2}C = (a - b)/c$; $\cos\frac{1}{2}(A - B)/\sin\frac{1}{2}C = (a + b)/c$, etc.

# PROBLEME PROPUSE

3184*). Când $n^2!$ se termină cu $n+1$ zerori?

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

3212**). Se cer patratele de patru cifre a căror rădăcină patrată este suma numerelor ce se obține dacă depărtăm primele două cifre de ultimele două.

G. DÂMBOIANU.

3221. Se cere un număr de trei cifre cu care împărțind pe 1000, să obținem la cât primele trei zecimale reproducând pe acel număr.

O. ORĂNESCU.

3222. Care cuburi de patru cifre încep cu rădăcina lor?

E. ȘTEFĂNESCU.

3223. Să se construiască un pseudopatrat (patrulater cu diagonale egale și perpendiculare), cunoscându-se:

*a)* O latură, o diagonală și unghiul acelei laturi cu latura opusă.

*b)* Două laturi opuse și unghiul celorlalte două.

I. IONESCU.

3224. Din vârfurile A, B, C, ale unui triunghiu ABC ca centre, se descriu trei cercuri cu razele respectiv egale cu:

$$\sqrt{(p^2-a^2)/3}, \quad \sqrt{(p^2-b^2)/3}, \quad \sqrt{(p^2-c^2)/3}.$$

Să se demonstreze că centrul de greutate G al triunghiului, este centrul radical comun al acestor trei cercuri și al cercului înscris I.

ION C. VASILIU.

*) Problema publicată cu acest număr fiind greșit enunțată, se publică din nou cu enunțul rectificat.

**) Problema publicată cu acest număr, fiind identică cu problema No. 3202, se înlocuește cu prezenta.

3225. Se consideră un patrat ABCD și triunghiul AED al cărui vârf E se află pe cercul circumscris patratului. Fie H ortocentrul triunghiului AED și L, M intersecțiile dreptelor BH și CH cu laturile EA și ED. Să se demonstreze că dreapta LM este paralelă cu latura BC a patratului și egală cu jumătatea ei.

Ion Țigoiu.

3226. Să se calculeze suma seriilor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+4)!}.$$

Gh. D. Popescu.

3227. Să se afle valoarea determinantului

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} C_5^2 a & C_4^1 & 0 & 0 \\ C_5^3 a^2 & C_4^2 a & C_3^1 & 0 \\ C_5^4 a^3 & C_4^3 a^2 & C_3^2 a & C_2^1 \\ C_5^5 a^4 & C_4^4 a^3 & C_3^3 a^2 & C_2^2 a \end{vmatrix}$$

Să se generalizeze.

E. Abason.

3228. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x^2 - p\,x\,y + y^2 = 1,$$

în care $p$ este întreg.

M. Ghermănescu.

3229. Să se construiască curba a cărei ecuație este

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2),$$

$a$ și $b$ fiind două cantități date.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

3230. Dintr'un avion ce sboară la 1000 m. înălțime, cu iuțeala de 130 Km. pe oră, vrem să scoatem o fotografie a terenului.

Ce instantaneitate trebue dată exponării, pentru a obține un clișeu clar, dacă focarul lentilei aparatului fotografic este 7,5 cm? Dar dacă focarul este 26 cm?

Căpitan Gh. Zapan.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Adam M.* (3091, 156, 75, 84, 96, 204, 05, 07, 16, 17, 18, N, R); *Antoniu I.* (3030); *Arcadian N.* (3195); *Berdan C.* (3155); *Bleiweiss P.* (R); *Bolgiu O.* (3126, 87); *Botea N.* (3152, 78, P); *Botez M.* (3204); *Braestei Otto* (3196, 204); *Căldăraru L.* (3147, 51, 207); *Cazan Gh.* (3097); *Ciorănescu C.* (2799, 3059, 73, 3136, 84, 95, 96, 206, 09, 11); *Ciorănescu N.* (P); *Cojoc N. Gh.* (3212); *Coșniță V.* (2953, 3047, P); *Dorneanu V.* (3167); *Fedeleș C.* (3204); *Georgescu M.* (3059, 3204, N); *Georgescu-Roegen N.* (3034, N); *Ghelber M.* (P); *Iliescu D.* (3097, 167, 84); *Ionescu-Bujor C.* (3202, E); *Ionescu I. Paul* (2799, 929, 3059, 73, 136, 78, 84, 95, 204, 06, 09, E); *Kahane A.* (3204, E); *Lăzărescu Fl. St.* (2922); *Manafu V.* (3204); *Marin P.* (3167, 78); *Marinescu I.* (3172); *Mihoc Gh.* (3151, 64, 67, 78); *Mladenovici A.* (3047, 218, E, N, P); *Pălărieru E.* (3152); *Pătroianu M.* (3059, 62, 162, 67, 78, 93, 207); *Popea O.* (3091, 184); *Popescu Corneliu* (3204); *Popescu N.* (3167); *Popovici I.* (3097); *Popoviciu T.* (P); *Schächter Ide Arie* (3211, 18); *Schächter O.* (3152); *Simionescu G.* (3091, 207, E); *Ștefan M.* (3073, 111, 51, 206, 09, 17, 18, E, N, P); *Stoica A.* (3202, E, P); *Theodoridis Theodor* (3193, 204); *Vasiliu C. I.* (3059, 91, 108, 26, 49, 53, 55, 82, 95, 206, N); *Vasiliu N.* (3172); *Vulpanovici Boris* (2965, 77, 3021, 31, 47, 59, 67, 97, 162); *Weiss L.* (3165, 95, 216, 18, E, N, P); *Weiss S.* (3097, 112, 207).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2063, 83, 116, 17, 222, 81, 347, 54, 77, 86, 94, 421, 28, 31, 575, 643, 54, 60, 64, 75, 773, 89, 92, 827, 29, 51, 61, 72, 79, 902, 10, 18, 71, 72, 78, 80, 91, 93, 3007, 13, 19, 56, 71, 75, 84, 92, 93, 102, 04, 09, 11, 13, 28, 29, 31, 38, 40, 44, 52, 58, 60, 61, 69, 70, 72, 73, 74, 91, 92, 203, 10 și 13, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

## Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE"

### 29 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaților), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, pe când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. G. **Borneanu,** Directorul Fabricilor de Chibrituri și Timbre (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.**

Prof. Asociaţiunea pentru Cultura şi literatura poporului Român din Sibiu

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 3. — NOEMBRE 1924.

SUMARUL

1. Aşezarea in ordine naturală a rădăcinilor a două ecuaţii, una de gradul al treilea şi una de gradul al doilea . . . *Th. Angheluţă.*
2. Asupra ecuaţiei pitagorice $Z^2=X^2+Y^2$ (urmare şi sfârşit) . . . . . *Leonida Penenjchevici.*
3. Concursul „Gazetei Matematice".
4. Premiul „Vasile Conta".
5. Note Matematice: 9—15.
6. Bibliografii.
7. Cereri 116, 117.
8. Probleme rezolvate: 2835, 2910, 2974, 3034, 3097, 3204, 3211.
9. Exerciţii: 19—26.
10. Probleme propuse: 3231—3240.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1924

# SPRE ȘTIINȚA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific și Președintele Consiliului de perfecționare la Școala Politechnică din București; **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii și lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor București, Profesor la Școala Politechnică din București; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri și timbre, București.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redija în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procura dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poștă.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evită confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poștale, corespondenții pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spații albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecință.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeași foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77. 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 902, 09, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 69, 89, 90, 107, 14, 27, 31, 34, 40, 48, 50, 60, 61, 65, 69, 80, 85, 90, 91, 92, 94, 98, 200, 08, 14, 15, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

# GAZETA MATEMATICA

ANUL XXX *SUPLIMENT* No. 3

## RECREAŢIUNI

1. **Zicători cu numere.** — Decât 10 trebi şi rele, mai bine 1 şi bună.
— Toţi ca 1.
— 1 e 1; 2 sunt mai multe.
— Când 2 se ceartă, al 3-lea câştigă.
— Ia câte 2 şi dă câte 9.
— Fiecare are câte 1 nevoie, altul câte 9.
— Ii dă 10 înainte.
— Incârduit cu terchea berchea, 3 lei perechea.
— Dacă la 40 nu am putut, la 80 ce o să pot.

L. WEISS.

* * *

2. **Un nou gen de fracţii.** In „Adevărul" din 1/IX, 1923, găsim următoarele:

„Chiar dela început remarcăm o nostimă scamatorie: Au eşit patru miniştri şi au intrat patru şi jumătate. Căci sub numele de Subsecretariat de Stat, am început şi noi să avem fracţii de miniştri, cu care unii se mulţumesc chiar când sunt oameni de talent".

CĂPITAN GR. ZAPAN.

* * *

3. **O nouă specialitate.** Unul dintre cunoscuţi, auzind că mă ocup, în revistele de matematici, cu indicatorii, vine la mine ca specialist în Indicatori, cu un Indicator al Căilor ferate române şi îmi cere ca să-i calculez exact costul transportului unor furage!

CĂPITAN I. LINTEŞ.

* * *

4. **Factorialul.** Am căutat mult prin cărţi franceze, germane, italiene, etc., ca să văd cine a aplicat pentru prima dată notaţiunea $n!$ pentru a însemna produsul $1.2.3.4.\ldots.n$. Un coleg, căruia i-am vorbit despre insuccesul cercetărilor mele, îmi spune:

„Ce cauţi prin autori francezi, germani, etc.? Nu vezi că acea notaţie se citeşte d'andaratele! Se zice *factorial n* dela dreapta spre stânga, iar nu *n factorial*. Ar trebui dar să cauţi prin cărţi de algebră turceşti, arăbeşti, evreeşti, etc.".

DAVID GHEORGHE.

* * *

5. **Dimensiunile timpului.** SHEELING spune următoarele:

„Sunt trei dimensiuni în timp: viitorul, prezentul şi trecutul"!

I. I.

* * *

6. **O limită.** Moartea este limita către care tinde viaţa oricărei fiinţe care trăieşte.

I. I.

* * *

7. **Formula dentară.** In Suplimentul No. 5, Anul XXVIII al *Gazetei Matematice*, D-l D. MĂRU, citează formula dentară a copilului:

$$I\frac{4}{4}\,C\frac{2}{2}\,P\,m\frac{4}{4}=\frac{10}{10}=20$$

şi se întreabă: „Ce matematician ar puteà să descurce această formulă, în care 1 ese egal cu 20 şi $ICPm = 1$?"

Este adevărat că un matematecian nu ar puteà descurcà această formulă şi de aceea ne vom adresà unui specialist în materie... Iată de exemplu ce ne spune DR. CARLET în al său *„Précis de zoologie médicale"*, pag. 126:

*„Formule dentaire.* On donne ce nom à une expression fractionnaire qui indique le nombre et la repartition des dents. Les exemples suivants feront comprendre l'utilité de ces formules:

Homme: $\frac{2}{2}i,\ \frac{1}{1}c,\ \frac{5}{5}m\left(\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}\right)=32,$ cu $\frac{2.1.2.3}{2.1.2.3}=32.$

Rat.: $\frac{1}{1}i,\ \frac{0}{0}c,\ \frac{3}{3}m=16,$ cu $\frac{1.0.3}{1.0.3}=16.$

Ce qui veut dire: De chaque coté et à chaque machoire, 1° l'homme a 2 incisives, 1 canine et 5 molaires; en tout 32 dents; 2° le rat possède 1 incisive, 0 canines et 3 molaires, en tout 16 dents.

On formule les dentitions de lait en servant du signe (′):

$$\frac{2}{2}i',\ \frac{1}{1}c',\ \frac{2}{2}m'=20$$

represente la dentition de lait de l'homme".

A. TAUBER.

D-l D. MĂRU a ridiculizat formula dentară şi a făcut bine, de oarece este o *formulă*. D-l A. TAUBER explică că este o *notaţiune*. Nu i se poate zice de loc *expresiune fracţionară*, după cum nici numere ca 12/47 dela telefoane nu sunt deloc fracţii! Foarte des scriitorii, medicii, avocaţii, etc., ca să nu se zică că au învăţat de geaba matematici prin licee, aplică eronat noţiunile, acolo unde nu sunt aplicabile şi în aceste Suplimente este locul a le atrage atenţiunea.

Aceasta îmi aminteşte pe autorul unui tratat de poduri, scris în limba engleză, dar care în loc ca să-i pună cărţii titlul *„Bridges"* i-a pus titlul *„Pontibus"*, în limba latină. El explică în prefaţă că l-a făcut să pună o carte engleză sub titlu latin şi anume că a învăţat 7 ani limba latină prin licee şi că acum i s'a ivit ocaziunea ca să poată aplică cel puţin o vorbă latină, ca să nu se zică că nu şi-a consumat o mare parte din energia tinereţei cu lucruri neaplicabile.

I. I.

* * *

8. **Zeul Matematicilor.** La Egipţeni, matematicile erau atribuite zeului THOT.

I. I.

* * *

9. **Geometrie modernă.** Două drepte care se întâlnesc sunt cu atâta mai paralele cu cât ele se întâlnesc mai departe.

G. B.

* * *

10. **Precocităţi matematice.** Iată încă două pe lângă altele, arătate în alte suplimente.

— Landau a scris un tratat asupra lunulelor pe când era de 13 ani.

— Giordanno di Ottajano, în 1784, pe când era de 16 ani, a dat pentru prima oară soluţiunea problemei de a înscrie într'un poligon un altul ale cărui laturi trec prin puncte date.

I. I.

* * *

11. **Fizica mistică.** Anul trecut, la Societatea Română de Ştiinţe, un Conferenţiar francez, după ce a tratat o chestiune de fizică, a făcut apologia mistică a numărului *trei*. El nu cunoştea de sigur cuvintele lui Newton:

„Fizico, fereştete de metafizică".

I. I.

* * *

12. **Relativitate.** Un exemplu îl dă următoarele versuri ale poetului D. Anghel.

Ca un orb, ca o nălucă
Sboară murgul şi din sbor
Nu mai ştie Aga: el e,
Sau pământu-i călător?

I. I.

* * *

13. **Regula de trei în poezie.** In *„Poezii"* de R. Roseti găsim şi următoarea:

*Raport.*

„In regule de 3, 2 factori, când stau într'un raport direct,
Sunt răsturnaţi şi socoteala proporţiei ese perfect.
Căutaţi să fiţi în totdeauna cu lumea în raport invers:
Cei cari merg direct la ţintă, îi aşteaptă un destin pervers".

Primele două rânduri sunt neînţeligibile pentru aritmeticiani; ultimele le pricep mai mulţi nearitmeticiani.

L. Weiss.

* * *

14. **Ce înţeleg poeţii prin patrat?** La pagina a 144 a volumului *„Printre picături"* de R. Roseti, se găsesc următoarele rânduri:

„... Ce să vezi D-ta! Ppputoarea de patroană (nenea Zamfir de câte ori pronunţă calificativul acesta, ridică *p*-ul la patrat)....."

Precum se vede autorul ridică pe *p* la puterea a patra, şi egalează această putere cu patratul aceleaşi litere. Şi este natural, deoarece un *patrat* are numai *patru* laturi. Vina este a matematicianilor cari s'au apucat să zică *patrat* la puterea a *doua*, când chiar în *patrat*, ca vorbă, intră rădăcina lui *patru!* Sau dacă nu au această vină, au pe aceea că în şcoli nu explică bine ce este *patrat* şi *patrat* şi lasă să treacă pe cei ce confundă *patratele* geometrice cu cele aritmetice.

G. Tulea.

D-l Tulea are dreptate, căci am cunoscut un profesor chiar care făceà asemenea confusiuni, şi care a susţinut ani întregi că *cubul are opt feţe.*

I. I.

* * *

15. **Matematica în literatură.** Traduc următoarele din *Le Disciple* de Paul Bourget:

„Tot viitorul este coprins în prezent, după cum toate proprietăţile triunghiului sunt coprinse în definiţiunea lui. Eu mi-am probat vigoarea persistentă e reflexiunii mele, reconstituindu-mi viaţa dela origină, caşicum aş rezolvà o problemă de geometrie prin sinteză.

„Tatăl meu trase cu creta pe o tablă neagră semne enigmatice, figuri

de geometrie, sau formule de algebră, cu atâta claritate în linii, în curbe, sau în literile polinoamelor, în cât își desvăluiă metoda obișnuită a ființei sale intime.

„El datoră această obișnuință epocei în care se desvoltă, pe când se pregătiă pentru școala Politecnică, distrugătoare a celor mai bune sănătăți.

„...și, regăsind mai târziu unele din notele sale, asupra acestor autori, am putut aprecià în ce grad, sensațiunea literaturii e un lucru personal, ireductibil, incomensurabil, ca să împrumut un cuvânt științei favorite (matematica), că adică nu există măsură comună între rațiunile, pentru care două spirite gustă sau resping pe un acelaș scriitor".

W. Solomon.

* * *

16. **O nebuloasă.** Extragem următoarele versuri din Cantul III al *Traianidei* lui Dimitrie Bolintineanu:

*Atom* pe tabere focu-i coboară.
„Rușna al șaptelea *cer* are numele.
Ca să ai loc aici, ferice soartă,
Decebal! caută să ai virtuțile
Ce se cer omului prin astă poartă".
Zice: ei se cobor', prin cele *șapte*
*Ceruri*, prin *pulberea de aur* de suflete
Intră în *căile albe de lapte*,
Care înbrățișă al *Zodiacului*
Corp și în două părți pare-a-l desface
*Cancer* și *Capricorn* care *tropicelor*
Inprumut numele. Prin *Cancer* face
Tot omul trecerea: prin *Capricorn*
Zeii; și ele sunt porțile *Soarelui*,
*Lunii* în Dacia. Să te inform:
Cu *ecuinoxele primăvăratece*
*Anul* la Dacia cursul începe,
I se dă numele *luna Evdochiei*,
Din mari reflecțiuni ăst gând concepe,
Când intră *Soarele*, *luna* a șaptea
*Anului solar*, în al său *Taur*;
Și își ia numele *luna Evdochiei*.
Ei văd în aere *Carul de aur*
Este al Evdochiei. Zeea gonind
Pe imperatorul negru al Iadului
Are vestmintele galbene: *Scorpionii*
Și *Șerpii* înconjură gâtu-i și brațele
*Șerpii* joc limbile lor de *taoni*
Mari sunt puterile zeului Zamolxis,
Zice Decebale, — mari, minunată,
„Zamolxis prezidă trei regiunele
Ale - *Universului* subordinate
*Cerului* ce-i zice fix, ele au numele
*Cerul* ce tremură, *cer de planeți*
Alta a *pământului*, alta a Iadului,
Zice lui Tubeta cu gene creți.
*Luna* în urmă-le pare și scântee,
Innotând p'aria de *cer* senină;
Cum o surâdere p'a frumusețelor
Față albă riură a sa lumină.
*Carul cu roatele d'aur* pe margine
Stă. Mergi, plăcerile vieții să sorbi!
Zice lui Tubeta, ce duce în buclele-i
Cum neaoa-i, splendidă între doi corbi.
Arde de glorie, el vrea să moară.
Doama *pământului*, al *universului*

I. I.

* * *

17. **Ereditate matematică.** D-l Picard a dat numele de *fenomene ereditare* în matematică, și anume în analiza matematică, acelora ale căror ecuațiuni trebuie să ție socoteala, nu numai de starea actuală a sistemului ce se studiază, dar și de stările lui anterioare

Să nu se crează dar de către fii, că aptitudinile pentru matematică ale părinților li se vor transmite, prin ereditate, lor!

I. I.

# AŞEZAREA IN ORDINE NATURALA A RADACINILOR A DOUA ECUAŢII, UNA DE GRADUL AL TREILEA ŞI UNA DE GRADUL AL DOILEA.

Intr'o serie de articole: «Compararea rădăcinilor mai multor ecuaţii de gradul al doilea» (G. M. vol. III p. 29), D-l Prof. Ing. I. Ionescu a tratat chestiunea în toate amănuntele.[1]) Mi-am propus să tratez chestiunea enunţată mai sus, pentrucă se poate ivi în aplicaţii, apoi şi ca o îndrumare pentru tinerii corespondenţi ai Gazetei, cari pot găsi subiecte admirabile de meditat în numeroasele articole ale colecţiei Gazetei, isvor nesecat de alte noui articole sau probleme.

Să considerăm două ecuaţii, una de gradul al doilea şi alta de gradul al treilea, ce totdeauna se pot pune sub forma:

$$f(x) = x^3 + px + q$$
$$\varphi(x) = x^2 + mx + n.$$

Fie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ rădăcinile primei, $\alpha'$, $\beta'$ rădăcinile celei de a doua. In chestiunea ce ne ocupă, va jucà un rol fundamental *eliminantul* acestor două ecuaţii. Iată ce înţelegem prin aceasta: Să considerăm produsul

$$E=f(\alpha')f(\beta')=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma)=(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\beta)(\alpha'-\gamma)(\beta'-\alpha)(\beta'-\beta)(\beta'-\gamma).$$

Dacă cele două ecuaţii au o rădăcină comună, acest produs este nul şi invers. Dar E se poate calculà numai în funcţie de coeficienţii celor două ecuaţii, fără a fi nevoe de rezolvat ecuaţiile graţie faptului că este simetric în raport cu $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ şi cu $\alpha'$, $\beta'$. Se găseşte astfel expresia

$$E = (q + mn)^2 - (m^2 - n + p)(mq + n^2 - np).$$

Expresiunea E poartă numele de eliminantul celor două ecuaţii şi, egalat cu zero, exprimă condiţia necesară şi suficientă pentru ca cele două ecuaţii să aibă o rădăcină comună. Se observă că E este în acelaş timp şi eliminantul următoarelor două ecuaţii:

$$x^2 + mx + n = 0$$
$$mx^2 + (n - p)x - q = 0.$$

1) Se ocupă numai de ecuaţii de gr. al doilea.

Fiindcă este vorba de a aşezà în ordinea mărimei rădăcinile, vom considerà coeficienţii reali, de asemenea $\alpha'$, $\beta'$ şi putem presupune $\alpha' < \beta'$.

Deocamdată, avem de deosebit două cazuri.

*a)* Ecuaţia de gradul al treilea are o singură rădăcină reală.

*b)* Ecuaţia de gradul al treilea are toate rădăcinile reale.

*a)* Fie $\alpha$ rădăcina reală şi $\beta$, $\gamma$ cele două rădăcini imaginare. Să facem o observare asupra eliminantului. Am avut

$$E = (\alpha^2 + m\alpha + n)\,(\beta^2 + m\beta + n)\,(\gamma^2 + m\gamma + n).$$

Produsul

$$(\beta^2 + m\beta + n)\,(\gamma^2 + m\gamma + n)$$

este pozitiv, căci factorii lui sunt imaginari conjugaţi. Cazul (*a*) îl dividem în două, după cum $E \lessgtr 0$.

(I') $E < 0$. Singura dizpoziţie posibilă a rădăcinilor este

$$\alpha'\ \alpha\ \beta',$$

căci, conform observaţiei de mai sus, trebue să avem

$$\alpha^2 + m\alpha + n < 0.$$

(II') $E > 0$. In acest caz, putem aveà următoarele două aşezări ale rădăcinilor

$$\alpha\ \alpha'\ \beta'$$

$$\alpha'\ \beta'\ \alpha$$

şi să vedem cum le putem distinge.

Ecuaţia de gradul al treilea, având numai rădăcina $\alpha$ reală, orice număr substituit lui $x$ în $f(x)$ va da semnul minus sau plus, după cum acel număr este inferior sau superior lui $\alpha$.

Deci, dacă vom aveà,

$$f\left(-\frac{m}{2}\right) = -\frac{m^3}{8} - \frac{pm}{2} + n > 0,$$

sau

$$8n - 4pm - m^3 > 0,$$

vom aveà

$$\alpha\ \alpha'\ \beta';$$

iar dacă

$$8n - 4pm - m^3 < 0,$$

vom aveà

$$\alpha'\ \beta'\ \alpha.$$

*b*) Trecem acum la cazul puţin mai complicat, când ecuaţia de gradul al treilea are toate rădăcinile reale şi putem presupune că $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sunt în ordinea mărimei, adică

$$\alpha < \beta < \gamma.$$

Şi aici, vom deosebi două mari cazuri, după cum $E \lessgtr 0$.

(I) $$E = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma) < 0.$$

Urmează că un număr fără soţ din factorii $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$, sunt negativi şi deci vom puteà aveà următoarele dizpoziţii posibile

(I) $$\alpha'\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta';\quad \alpha'\,\alpha\,\beta'\,\beta\,\gamma;\quad \alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'\,\gamma;\quad \alpha\,\beta\,\alpha'\,\gamma\,\beta';$$

Pentru a puteà decide care din aceste aşezări se întâmplă, vom divide cazul (I) în cazurile:

$1^0$. $E < 0$, $n > 0$, $m < 0$; $\quad 2^0$. $E < 0$, $n > 0$, $m > 0$

$3^0$. $E < 0$, $n < 0$.

$1^0$. In acest caz, $\alpha'$, $\beta'$ sunt pozitive. Să presupunem deasemenea:

$1'$. $q < 0$. Ecuaţia de gradul al treilea are două rădăcini negative $\alpha$, $\beta$ şi una pozitivă $\gamma$. Singura dispoziţie posibilă în acest caz, din aşezările din (I), este

$$\alpha\,\beta\,\alpha'\,\gamma\,\beta'.$$

$1''$. $q > 0$. Acum $\alpha$ este negativ şi $\beta$, $\gamma$ pozitivi. Singurele aşezări posibile din (I) sunt

$$\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'\,\gamma;\quad \alpha\,\beta\,\alpha'\,\gamma\,\beta'.$$

Pentru a puteà distinge aceste două aşezări, se observă că pentru prima avem:

$$\alpha' < \beta, \quad \beta' < \gamma$$

şi de aici deducem

$$\alpha'^2\beta'^2\,(\alpha' + \beta')^2 < \beta^2\gamma^2\,(\beta + \gamma)^2,$$

sau, în virtutea relaţiilor între coeficienţi şi rădăcini,

$$m^2n^2 - q^2 < 0,$$

iar pentru a doua aşezare, aceeaşi inegalitate de sens invers.

Prin urmare, dacă

$$m^2n^2 - q^2 < 0,$$

avem

$$\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'\,\gamma\,;$$

iar dacă

$$m^2n^2 - q^2 > 0,$$

avem $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\gamma\,\beta'.$

2°. Acesta se poate reduce la 1° schimbând în ambele ecuații pe $x$ în $-x$ și se obțin ecuațiile

$$x^3 + px - q = 0$$
$$x^2 - mx + n = 0.$$

Eliminantul acestor ecuații este acelaș ca al ecuațiilor date. Și pentru ecuațiile transformate suntem în cazul 1°.

Dacă $-q < 0$ sau $q > 0$, avem pentru ecuațiile transformate următoarea dispoziție a rădăcinilor

$$-\gamma \quad -\beta \quad -\beta' \quad -\alpha \quad -\alpha'$$

deci pentru ecuațiile noastre vom aveà

$$\alpha'\,\alpha\,\beta'\,\beta\,\gamma.$$

Dacă $-q > 0$ sau $q < 0$ și $m^2n^2 - q^2 < 0$, pentru ecuațiile transformate, vom aveà

$$-\gamma \quad -\beta' \quad -\beta \quad -\alpha' \quad -\alpha$$

sau, pentru ecuațiile noastre

$$\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'\,\gamma.$$

Dacă $-q > 0$ sau $q < 0$ și $m^2n^2 - q^2 > 0$, pentru ecuațiile transformate vom aveà

$$-\gamma \quad -\beta \quad -\beta' \quad -\alpha \quad -\alpha'$$

sau, pentru ecuațiile date

$$\alpha'\,\alpha\,\beta'\,\beta\,\gamma.$$

3°. Rădăcinile $\alpha'\beta'$ sunt de semne contrare. Vom distinge și aici două cazuri.

3'. $n < 0, q > 0$. In acest caz, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Din așezările dela (I), următoarele sunt posibile.

(3') $\qquad \alpha'\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta'\,;\quad \alpha'\,\alpha\,\beta'\,\beta\,\gamma\,;\quad \alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'\,\gamma.$

Trebuesc date criterii cari se distingă aceste trei așezări. Le vom divide în grupe de câte două, introducând rădăcinile derivatei

$f(x)$. Să formăm eliminantul dintre $\varphi(x)$ și $f'(x)$ adică produsul

$$e = f'(\alpha')\, f'(\beta') = (3n - p)^2 + 3m^2 p.$$

Dacă

$$e > 0,$$

din așezările (3'), numai următoarele sunt posibile

$$\alpha'\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \beta'; \quad \alpha\ \alpha'\ \beta\ \beta'\ \gamma.$$

Pentru a distinge între aceste două, se observă că pentru prima așezare avem

$$f(\alpha') < 0, \quad f(\beta') > 0.$$

Formăm deci diferența

$$f(\beta') - f(\alpha') = (\beta' - \alpha')\,[m^2 - n + p]$$

și cum $\beta' - \alpha' > 0$, numai semnul expresiei

$$d = m^2 - n + p$$

va jucă rol.

Prin urmare, dacă

$$e > 0, \quad d > 0,$$

din (3') avem numai așezarea

$$\alpha'\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \beta';$$

dacă $e > 0, \quad d < 0,$

avem $\alpha\ \alpha'\ \beta\ \beta'\ \gamma.$

Dacă

$$e < 0, \quad d > 0,$$

avem $\alpha'\ \alpha\ \beta'\ \beta\ \gamma;$

dacă $e < 0, \quad d < 0,$

avem $\alpha\ \alpha'\ \beta\ \beta'\ \gamma.$

(3'') $n < 0$, $q < 0$. Am puteà revenì la (3') schimbând în ecuații pe $x$ în $-x$, dar să procedăm direct. Din așezările de mai sus, următoarele sunt acuma posibile

$$\alpha'\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \beta'; \quad \alpha\ \alpha'\ \beta\ \beta'\ \gamma; \quad \alpha\ \beta\ \alpha'\ \gamma\ \beta':$$

căci se va ține seamă că avem

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma > 0.$$

Şi se găseşte ca mai sus că dacă

$$e>0,\quad d>0,$$

avem $\alpha'\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta'$;

dacă $e>0,\quad d<0,$

avem

$$\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'\,\gamma;$$

dacă $e<0,\quad d<0,$

avem $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta\,\gamma'$;

dacă $e<0,\quad d<0,$

avem $\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'\,\gamma.$

II. $E=\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,(\gamma)>0$. Eliminantul fiind pozitiv, un număr cu soţ din factorii $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$ pot fi negativi. Avem deci următoarele aşezări posibile:

(II) $\alpha\,\alpha'\,\beta\,\gamma\,\beta'$; $\alpha'\,\alpha\,\beta\,\beta'\,\gamma$; $\alpha\,\beta\,\gamma'\,\alpha'\,\beta'$; $\alpha'\,\beta'\,\alpha\,\beta\,\gamma.$

Vom aveà, ca în cazul (I), cazuri analoage.

1'. $n>0, m<0, q<0$. Fiindcă $\alpha'$, $\beta'$, sunt pozitive, $\alpha$, $\beta$ negative şi $\gamma$ pozitiv, avem din (II) următoarea aşezare posibilă

$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha'\,\beta'.$$

1''. $n>0,\ m<0,\ q>0$. In acest caz, din (II) numai următoarele aşezări sunt posibile

$$\alpha\,\alpha'\,\beta\,\gamma\,\beta';\quad \alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha'\,\beta';$$

căci $\alpha'$, $\beta'$ sunt pozitive, de asemenea $\beta$, $\gamma$, iar $\alpha$ negativ.

Dacă

$$e>0,$$

avem $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha'\,\beta'$,

iar dacă

$$e<0,$$

avem

$$\alpha\,\alpha'\,\beta\,\gamma\,\beta'$$

căci $f'(x)$ are două rădăcini reale şi de semne contrare.

2'. $n>0,\ m<0,\ q>0$. Avem din (II) următoarea aşezare posibilă

$$\alpha'\,\beta'\,\alpha\,\beta\,\gamma.$$

2''. $n > 0$, $m > 0$, $q < 0$. Din (II) avem următoarele așezări posibile

$$\alpha' \alpha \beta \beta' \gamma; \quad \alpha' \beta' \alpha \beta \gamma.$$

Dacă

$$e > 0,$$

avem

$$\alpha' \beta' \alpha \beta \gamma;$$

dacă

$$e < 0,$$

avem $$\alpha' \alpha \beta \beta' \gamma,$$

căci $\alpha'$, $\beta'$, $\alpha$, $\beta$ sunt negative, iar $\gamma$ pozitiv.

3'. $n < 0$, $q < 0$. In acest caz, $\alpha'$, $\beta'$ de semne contrare, $\alpha, \beta$ negative și $\gamma$ pozitiv.

Nu putem avea din (II) decât următoarele dispoziții

$$\alpha \alpha' \beta \gamma \beta'; \quad \alpha' \alpha \beta \beta' \gamma.$$

Pentru prima, avem

$$f(\alpha') > 0$$

$$f(\beta') > 0$$

Deci dacă punem

$$s = f(\alpha') + f(\beta') = 2q - m(m^2 - 3n + p),$$

avem următorul rezultat:

Dacă

$$s > 0,$$

avem

$$\alpha \alpha' \beta \gamma \beta';$$

dacă $$s < 0,$$

avem $$\alpha' \alpha \beta \beta' \gamma.$$

3''. $n < 0$, $q > 0$. Din (II), următoarele așezări sunt posibile

$$\alpha \alpha' \beta \gamma \beta'; \quad \alpha' \alpha \beta \beta' \gamma;$$

și dacă

$$s > 0,$$

avem

$$\alpha \alpha' \beta \gamma \beta',$$

iar dacă $s<0$,
avem

$$\alpha' \alpha \beta \beta' \gamma.$$

Pentru a aveà o aplicaţie a celor de mai sus, să rezolvim sistemul de inegalităţi:

$$(I) \quad \begin{cases} x^3+x+1<0 \\ x^2+4x-2>0. \end{cases}$$

Ecuaţia de gradul al treilea are o singură rădăcină reală. Pentru eliminant, avem:

$$E=-141<0,$$

prin urmare, avem următoarea aşezare a rădăcinilor reale a celor două ecuaţii.

$$\alpha' \alpha \beta'$$

şi deci, pentru satisfacerea inegalităţei (I), va trebui să avem

$$x<\alpha'.$$

Să rezolvăm sistemul

$$(II) \quad \begin{cases} x^3-3x+1>0 \\ x^2-4x+2<0. \end{cases}$$

Ecuaţia de gradul al treilea are rădăcinele reale, iar

$$E=-17<0.$$

Suntem în cazul (I) şi, mai mult, având

$$n>0, \quad m<0, \quad q>0,$$

suntem deci în cazul 1". Vom formà expresia

$$m^2n^2-q^2=63>0,$$

deci vom aveà următoarea aşezare

$$\alpha \beta \alpha' \gamma \beta'$$

şi deci inegalitatea (II) va fi satisfăcută pentru

$$\gamma<x<\beta'.$$

Să considerăm, în fine, exemplul

$$(III) \quad \begin{cases} x^3-7x+6>0 \\ x^2-7x+12>0. \end{cases}$$

Rădăcinile ecuațiilor sunt toate reale.

$$E = 4(39^2 - 15 \times 93) > 0,$$

deci, suntem în cazul

$$E > 0, \quad n > 0, \quad m < 0, \quad q > 0,$$

adică ne găsim în cazul (II) sub cazul 2'. Avem, prin urmare, următoarea așezare

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha'\ \beta'.$$

Iar pentru a satisface pe (III), vom lua

$$\alpha < x < \beta,$$

sau

$$\gamma < x < \alpha',$$

sau

$$x > \beta'.$$

Acest exemplu se poate verifică și direct, căci rădăcinile ecuațiilor sunt întregi. Dacă ecuația de gradul al treilea are o rădăcină multiplă sau $E = 0$, prin împărțiri de polinoame se reduce chestia la ecuații de gradul al doilea cel mult.

Ar fi urmat să consider dacă ecuația de gradul al treilea și dacă, și în acest caz, se pot formă expresiuni, fără a rezolvă ecuațiile, cu ajutorul cărora să putem decide cum sunt rădăcinile dispuse.

TH. ANGHELUȚĂ.

---

## ASUPRA ECUAȚIEI PITAGORICE

$$Z^2 = X^2 + Y^2.$$

(Urmare si sfârșit).

Cele expuse în articolul precedent se pot reduce la unele formule generale. Insemnăm cu $z_n^m$ a $n$-a valoare a lui $z$ din grupa $m$-a. Fie $a_m$ al $m$-lea număr natural și $b_m$ al $m$-lea număr din șirul:

$$0;\ 1;\ 3;\ 6;\ 10;\ 15;\ \ldots\ldots\ldots$$

în care diferențele dintre termeni sunt numerele din șirul natural al numerelor. Cu alte cuvinte, punem:

$$a_m = m, \qquad b_m = \tfrac{1}{2}\, m\,(m+1).$$

Se găseşte uşor că avem:

$$z_n^m = 4\,[a_m^2 + (m+1)(n-1) + b_{n-1}] + 1.$$

Astfel, pentru $n=3$ şi $m=4$, găsim:

$$z_3^4 = 4\,[4^2 + (4+1)(3-1) + 1] + 1 = 109.$$

Pentru primii termeni ai grupurilor, avem $n=1$ şi obţinem o formulă mai simplă:

$$z_1^m = 4m^2 + 1.$$

Aşà găsim că $z_1^3 = 37$.

Dacă pentru un număr există mai multe descompuneri în sumă de două patrate, atunci se pot ivi două cazuri:

1. *Numărul dat începe o grupă.* In acest caz, avem:

$$4m_1^2 + 1 = 4\,[a_m^2 + (m+1)(n-1) + b_{n-1}] + 1,$$
$$a_m^2 + (m+1)(n-1) + b_{n-1} = m_1^2.$$

Deci, dacă micşorând numărul dat cu 1, şi divizând restul cu 4, găsim la cât un patrat, numărul este cap de grupă. Astfel pentru 65 avem că $(65-1)/4 = 4^2$ şi deci $z_1^4 = 65$ este o soluţie.

2. *Numărul dat nu poate începe o grupă.* Avem atunci mai multe descompuneri numai dacă avem:

$$4\,[a_{m_1}^2 + (m_1+1)(n_1-1) + b_{n_1-1}] + 1 =$$
$$4\,[a_m^2 + (m+1)(n-1) + b_{n-1}] + 1 = k,$$

în care $k$ este a patra parte din numărul dat micşorat cu 1. Inlocuind pe $a$ şi $b$ cu valorile lor găsim:

$$k = \tfrac{1}{2}(m+n)(m+n-1) + \tfrac{1}{2}m(m-1).$$

Deci $k$ este suma a doi termeni din şirul care defineşte pe $b$.

Acum este uşor de a găsi pe $m$ şi $n$ pentru fiecare caz în parte, şi prin urmare şi descompunerile numărului dat. Fie dat numărul 425, la care ese $k = 106$. Avem descompunerile:

$k = 105+1$, care dă $m=2$ şi $n=13$ şi deci $x_{13}^2 = 416, y_{13}^2 = 87$.

$91+15$ » » $6$ $8$ » » $x_8^6 = 304, y_8^6 = 297$.

$78+28$ » » $8$ $5$ » » $x_5^8 = 200, y_5^8 = 375$.

Ultima soluție este derivată. Avem apoi $425 = 5 \times 5 \times 17 = 5 \times 85 = 85 \times 5 = 25 \times 17 = 17 \times 25$. Observând că 85 are două descompuneri, găsim în definitiv:

$$425^2 = 416^2 + 87^2 = 304^2 + 297^2 = 340^2 + 255^2 = 420^2 + 65^2 = \\ = 180^2 + 385^2 = 408^2 + 119^2 = 200^2 + 375^2.$$

LEONIDA PENENJCHEVICI.

## CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE".

In vacanța Paștelui viitor, și anume în zilele de 23, 24 și 25 Aprilie 1925, va avea loc un concurs general de matematici în București, între corespondenții «Gazetei Matematice», elevi ai claselor V, VI, VII și VIII ale liceelor din țară,

Cererile de înscriere se vor trimite *direct de către candidați,* iar nu de profesori, părinți, corespondenți sau intermediari, D-lui ION IONESCU, Inginer, Strada Călușei 23, în plicuri recomandate sau înmânate direct D-sale. Cererile se primesc *numai* până la 1 Fevruarie 1925 și vor arătà:

1. Numele și pronumele elevului, scrise lizibil.

2. Liceul și clasa în care urmează candidatul. Pentru cei ce se pregătesc în particular, școlile la care au urmat anul precedent, sau au dat examenul de fine de an.

3. Adresa în timpul școalei și în timpul vacanței Paștelui.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în București, dacă are unde fi găzduit și întreținut în timpul concursului, sau dacă unele din aceste mijloace vor trebui să-i fie procurate de Societatea «*Gazeta Matematică*»

5. Materia din matematici, din clasa în care urmează, la care voește să treacă proba practică în scris și alta la care voește să dea proba teoretică în scris, probele orale trecându-se la amândouă din ele.

La prima probă, se vor cere calcule numerice și logaritmice, construcțiuni grafice și epure și, prin urmare, elevii vor aduce cu dânșii tabele, compasuri, instrumente de desemn și vor puteà consultà cărți, pe când la proba teoretică vor avea numai tocurile de scris.

Numărul celor admişi la concurs va depinde de mijloacele de transport, de găzduire şi de întreţinere, de care vom puteà dispune; alegerea se va face dintre corespondenţii cari au dovedit o activitate şi o pricepere mai mare de matematici, prin lucrările ce ne-au trimes, căutând a lua elevi din toate clasele şi din toate liceele din ţară. Candidaţii înscrişi, admişi la concurs, vor primì o înştiinţare în care li se va arătà locul unde se va ţine concursul, programul lui, precum şi locul unde vor fi găzduiţi şi vor lua masa cei lipsiţi de mijloace, iar în vacanţa Paştelui, vor primì biletele de drum.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile pentru înscriere şi ţinerea concursului trebuesc respectate cu toată atenţiunea şi exactitatea inerentă ştiinţelor matematice. Sunt cu totul interzise comunicările între candidaţi la probele scrise şi examenele orale, părăsirea sălilor în care se dau probele practice şi teoretice, înainte de predarea lucrărilor.

Comisiunea examinatoare se compune din membri ai Societăţei «*Gazeta Matematică*», ce nu au rude printre candidaţii admişi la concurs.

In seara zilei de 25 Aprilie, va aveà loc o masă comună a membrilor Societăţii, cu candidaţii admişi la concurs.

Rezultatul concursului se va publicà în No. 10 Anul XXX al «*Gazetei Matematice*», iar candidaţii cari vor reuşi, vor primì ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni.

Delegaţia Societăţii
A. Saligny, Gh. Em. Filipescu
şi G. Borneanu.

## PREMIUL „VASILE CONTA".

La pagina 14 a volumului XXIX al «Gazetei Matematice», s'a publicat regulamentul premiului «Vasile Conta». In conformitate cu prevederile acestui regulament, urmà să se publice, în numărul de faţă, rezultatul premiului pentru anul trecut.

Deoarece nu s'a primit însă nicio lucrare pânăla data de 1 iulie 1924, se aşteaptă, după prevederile aceluiaş regulament, pânăla 1 iulie viitor, depunerea lucrărilor ce vor concurà la premiul, cumulat pentru doi ani.

Delegaţia Societăţii.

# NOTE MATEMATICE

9. *Alte zece Matematici diverse.* (Vezi Nota 5, pag. 50).

21. **Demonstrativă.** *P. Kelland.*—Lectures of the principles of demonstrative mathematics. 1843.

22. **Ilustrată.** *T. Williamson.*—Mathematics simplified and practically illustrated. 1808.

23. **Japoneză.** *F. Hayaschi.*—A bref hystory of the japanese mathematics.

24. **Marină.** *Claessens de Tongste.*— Mathématique marine.

25. **Militară.** *L. Lokee.* — System of military mathematics. 1776.

26. **Mixtă.** *V. Cerruti.* — Le matematiche pure e miste. Vezi *Atti de la Societa italiana. per il progresso delle scienze.* 1907.

27. **Nouă.** *F. Engel.* — Der Geschmach in der neueren Mathematik.

28. **Pregătitoare.** *H. B. Ray & A. V. Dour.* — Preparatory mathematics. New-York. 1921.

29. **Simplificată.** Vezi No. 22 de mai sus.

30. **Universală.** *Castel.* — Mathématique universelle abregée. Paris. 1858.

(Va urmă). I. Ionescu.

10. *Asupra notei 72 din Anul XXIX.* In «*Manualul de aritmetică*» de Clasa I de Gr. Orăşanu şi C. S. Popescu, la pagina 110 găsim: «In Transilvania, pentru a denumi o fracţie ordinară, se întrebuinţează şi cuvântul *frângere*».

Popa Ilie.

Cuvântul *frângere* se găseşte în Aritmetica lui Eliade Rădulescu tipărită la 1832 în Bucureşti în tipografia lui proprie, şi tradusă după J. B. Francoeur. El ziceà la fracţiile mai mari ca unitatea, *număr frângeros*. A se vedeà în această privinţă articolele pe care le-am publicat în Anul XXIV al *Gazetei Matematice*.

I. Ionescu.

11. *Asupra problemei 3124.* Problema se poate generalizà astfel:

*Fie* $a_1$, $a_2$, $a_n$ *laturile tutulor poligoanelor de* m *laturi diferite care se pot înscrie în cercul de raza* R. *Avem una din relaţiile:*

$$(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)^2 = pR^{2n}.$$

$$(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)^2 = R^{2n},$$

*după cum* n *este putere a unui număr prim* p, *sau este produs a cel puţin doi factori primi între ei, iar* 2n *fiind indicatorul lui* m.

Această teoremă a fost găsită pentru cazul $R = 1$ de D-nul ZEMPLÉN GH. în *Mathematekai és Fizikai Lapok* (1900—53) din Budapesta. Soluţia chestiunii se poate vedeà în *Jurnal matematic* Vol. 1 pag. 135, unde au stabilit şi alte teoreme analoage.

TIB. POPOVICIU.

12. *Asupra unor chestiuni de limită.*

In G. M. vol. VI. pag. 152, D-nul I. I. NĂDEJDE a stabilit următoarele două teoreme:

Fie $F(x)$ şi $f(x)$ două funcţiuni care tind către infinit odată cu $n$; dacă vom aveà:

$$\text{(I)} \qquad \lim \frac{F(x)}{f(x)} = \alpha,$$

$\alpha$, fiind finit şi diferit de zero, vom aveà:

$$\lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = 1$$

(II) şi dacă vom aveà

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)^{\lambda}} = \alpha,$$

$\alpha$ fiind finit şi diferit de zero, atunci vom aveà şi:

$$\lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \lambda.$$

I. Voim să demonstrăm că a doua teoremă nu este decât o

consecință imediată a primei teoreme. In adevăr, servindu-ne de prima teoremă, avem:

$$E = \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \lambda . \frac{\log F(x)}{\log [f(x)]^{\lambda}};$$

dar cum:

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)^{\lambda}} = \alpha, \text{ atunci } \lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)^{\lambda}} = 1.$$

Deci avem:

$$\lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \lambda, \text{ când } \lim \frac{F(x)}{f(x)^{\lambda}} = \alpha.$$

c. c. t. d.

II. Analog demonstrăm că dacă:

$$\lim \frac{F(x)^{\lambda}}{f(x)} = \alpha, \text{ atunci avem } \lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

In adevăr, avem:

$$E = \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \frac{\log [F(x)]^{\lambda}}{\lambda . \log f(x)},$$

dar $\lim \frac{[F(x)]^{\lambda}}{f(x)} = \alpha$ şi în baza teoremei I, avem:

$$\lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

c. c. t. d.

III. Mai putem demonstrà că dacă:

$$\lim \frac{F(x)^{\beta}}{f(x)^{\gamma}} = \alpha, \text{ atunci avem şi } \lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Demonstrația analoagă ca în cazurile precedente; avem:

$$E = \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \frac{\gamma}{\beta} . \frac{\log [F(x)]^{\beta}}{\log [f(x)]^{\gamma}};$$

dar avem $\lim \frac{[F(x)]^{\beta}}{[f(x)]^{\gamma}} = \alpha$ şi deci în baza teoremei I, avem:

$$\lim \frac{\log F(x)}{\log f(x)} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

c. c. t. d.

IV. În aceeaşi ordine de idei, demonstrăm că dacă:

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \gamma, \text{ atunci } \lim \frac{\log [F(x)]^{\alpha}}{\log [f(x)]^{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

MARIN ŞTEFAN.
Cl. VIII R., Liceul din Constanţa.

13. *Generalizarea unei identităţi.* In *Culegerea de Probleme, Trigonometria,* Cap. V. 20, p. 374, se găseşte demonstrată identitatea

$$\text{tg}a + 2\text{tg}\,2a + 4\text{tg}\,4a + 8\,\text{cotg}8a = \text{cotg}a.$$

Imi propun să demonstrez identitatea mai generală

$$\text{tg}a + 2\text{tg}2a + 2^2\text{tg}2^2a + 2^3\text{tg}2^3a + \ldots\ldots + 2^n\,\text{tg}2^n\,a + 2^{n+1}\text{cotg}2^{n+1}a = \text{cotg}a.$$

In adevăr, dacă în identitatea uşor de arătat

$$\text{tg}pa = \text{cotg}pa - 2\text{cotg}\,2pa,$$

facem succesiv $p = 1,\ 2,\ 2^2, \ldots\ldots 2^n$ şi înmulţim apoi ambele părţi ale egalităţilor obţinute respectiv cu $1,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3, \ldots\ldots 2^n$ obţinem relaţiile :

$$\text{tg}a = \text{cotg}a - 2\text{cotg}\,2a$$

$$2\text{tg}\,2a = 2\text{cotg}\,2a - 2^2\text{cotg}\,2^2a$$

$$2^2\text{tg}\,2^2a = 2^2\text{cotg}\,2^2a - 2^3\text{cotg}\,2^3a$$

. . . . . .

. . . . . .

$$2^{n-1}\text{tg}\,2^{n-1}a = 2^{n-1}\text{cotg}\,2^{n-1}a - 2^n\,\text{cotg}\,2^n\,a$$

$$2^n\,\text{tg}2^n\,a = 2^n\,\text{cotg}2^n\,a - 2^{n+1}\,\text{cotg}2^{n+1}a.$$

Adunând parte cu parte aceste relaţiuni şi făcând reducerile în partea a doua, obţinem

$$\text{tg}a + 2\text{tg}\,2a + 2^2\text{tg}\,2^2a + \ldots\ldots + 2^n\,\text{tg}2^n\,a = \text{cotg}a - 2^{n+1}\,\text{cotg}\,2^{n+1}a,$$

care e tocmai identitatea ce voiam să demonstrez.

TRAIAN N. ANGELESCU.
Elev cl. VII, Liceul Giurgiu.

14. *Asupra patratelor numerelor de forma 111 . . . 11.* Aceste numere au ca patrate numerele 1 ; 121 ; 12321 ; . . . . . ; 12345678987654321. Suma cifrelor acestor patrate sunt patratele numerelor consecutive 1 ; 2 ; 3 ; . . . . . ; 9. Demonstrația este foarte ușoară.

DAVID GHEORGHE.

15. *Asupra unei integrale definite.*
Să considerăm integrala definită

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^n \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) dx,$$

unde $n$ este un număr întreg și pozitiv.

Funcțiunea de sub semnul sumă este continuă pentru toate valorile lui $x$, dela $x = 0$ până la $x = 1$ ; într'adevăr, ne încredințăm ușor că

$$\lim_{x=1} x^n \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pentru a-i calculà valoarea, voiu demonstrà în prealabil că

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \rho,$$

$\rho$ fiind constanta lui EULER,

$$\rho = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}577215....$$

Formula

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots,$$

în care $n$ desemnează un număr natural, ne permite să scriem, dacă adunăm rezultatele obținute prin înlocuirea lui $n$ cu 1, 2, 3, ... $n$,

$$\log(n+1)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^4}\right)+\cdots,$$

sau încă

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^4}\right)-\cdots$$

și trecând la limită, avem [1])

$$(1)\qquad \rho=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)-\cdots$$

Pe de altă parte, cu ajutorul unei formule de recurență, se stabilește lesne formula

$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax}dx=\frac{p!}{a^{p+1}},$$

unde $a>0$, iar $p$ întreg și pozitiv.

Dând lui $a$ succesiv valorile 1, 2, 3, .... $n$ și adunând membru cu membru relațiunile astfel obținute, căpătăm

---

1) Trecerea la limită este valabilă conform noțiunei de sumă a unei serii duble.

$$\int_0^{+\infty} x^p (e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots+e^{-nx})dx = p!\left(\frac{1}{1^{p+1}}+\frac{1}{2^{p+1}}+\cdots\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

sau încă

$$\frac{1}{p!}\int_0^{+\infty} x^p \frac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}dx = \frac{1}{1^{p+1}}+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\cdots+\frac{1}{n^{p+1}}.$$

Ţinând seamă că raţia $e^{-x}<1$ când $x>0$, vom aveà, când $n$ creşte nemărginit:

$$(2)\qquad \frac{1}{p!}\int_0^{+\infty}\frac{x^p dx}{e^x-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}} \qquad (p \text{ întreg şi pozitiv}).$$

Dând lui $p$, din această formulă, valori convenabile şi înlocuind în valoarea lui $\rho$ din (1), găsim

$$\rho = \frac{1}{2!}\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^x-1} - \frac{1}{3!}\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{e^x-1} + \frac{1}{4!}\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} - \cdots$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}-\cdots\right).$$

Insă din

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

deducem

$$\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}-\cdots = 1+\frac{e^{-x}-1}{x},$$

astfel încât

$$\rho = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}+x-1}{x(e^x-1)}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^x+xe^x}{xe^x(e^x-1)}dx,$$

care prin substituția $e^{-x} = y$, devine formula căutată

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \rho.$$

Fie acum integrala

$$\int_0^1 \frac{x^n - 1}{x - 1} dx.$$

Funcțiunea

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$

fiind continuă pentru toate valorile lui $x$ din intervalul (0, 1), avem

$$\int_0^1 \frac{x^n - 1}{x - 1} dx = \left| \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} \right|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Pe de altă parte, cu ajutorul metodei de derivare sub semnul sumă, găsim

$$\int_0^1 \frac{x^n - 1}{\log x} dx = \log(n+1),$$

așă că

$$\int_0^1 x^n \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) dx - \int_0^1 \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \log(n+1) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right),$$

sau, în fine,

$$\int_0^1 x^n \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \rho - \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right].$$

*Observare.* Făcând pe $n$ să crească nemărginit şi ţinând seama de semnificaţia lui $\rho$, avem

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\rho 1} x^n \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = 0.$$

GH. D. POPESCU-BOTOŞANI.
Şc. Politechnică, Bucureşti.

## BIBLIOGRAFIE.

**Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine.** Anul IX. No. 1—2. Bucureşti 1924.

**Societatea română de ştiinţe.** *Buletinul de ştiinţe matematice pure şi aplicate.* Anul XXVI Ianuarie-Iulie 1924. Bucureşti. Imprimeria Statului. Asupra mişcării figurilor plane variabile cu conservarea similitudinii sau arii, de N. ABRAMESCU. Asupra sâmburilor simetrizabili, de P. SERGESCU.

**Bulletin of the American mathematical Society.** Vol. 30 No. 5—6. Mai-Iunie 1924. New-York. Premiul în memoria lui BÔCHER, de R. G. D. RICHARDSON. Adunarea specială a Secţiunii din San Francisco, de R. M. WINGER. A treisprezecea Adunare anuală a Societăţii, de R. G. D. RICHARDSON. Adunarea din Cincinnati a Societăţii, de A. Dresden. O caracterizare a suprafeţelor de translaţie, de E. P. LANE. Asupra unei generalizări a teoremei factorizării a lui WEIERSTRASS, de L. L. DINES. Relaţiunile de numere clasă coprinse în „*Disquisitiones arithmeticae*", de E. T. BELL. Numărul ciclelor de acelaşi ordin în grupe de substituţiuni date, de G. A. MILLER. Algebre şi aritmeticile lor, de L. E. DICKSON. Patru cărţi asupra spaţiului, de N. WIENER. Două cărţi recente despre algebră, de O. C. HAZLETT.

**Idem.** No. 7. Iulie 1924. Prima lectură JOSIAH WILLARD GIBBS, de R. G. RICHARDSON. Adunarea din Martie a Societăţii, de R. G. D. RICHARDSON. Ecuaţia de gradul al optulea, de A. B. COBLE. Grupul unei serii de ecuaţii algebrice, de L. WEISNER. Un tip de curbă plană unicursală, de H. HILTON. Suprafeţe cu locuri ortogonale ale centrelor de curbură geodesice ale unui sistem ortogonal, de M. FOSTER. Câmpuri cuadratice în care factorizarea este totdeauna unică, de L. E. DICKSON. Iacobiana unei transformări de contact, de E. F. ALLEN. Invarianţi integro-diferenţiali ai unui grup de parametru unic al transformării lui FREDHOLM, de A. D. MICHAL. Reducerea enumerărilor în formele omogene, de E. T. BELL. Opera ştiinţifică a lui JOSEPH LIPKA, de W. C. GRAUSTEIN VEBLEN despre Analysis situs, de S. LEFSCHETZ. Goursat despre problema lui PFAFF, de A. DRESDEN. WATSON asupra funcţiunilor lui BESSEL, de R. D. Car-

MICHAEL. BIRKHÖFF asupra relativităţii, de O. VEBLEN. Teoria funcţiunilor a lui BOREL, de E. W. CHITTENDEN.

**Anales de la Sociedad cientifica Argentina.** Vol. XCVII. No. 5—6. Mai-lunie 1924. Buenos-Aires.

**Foaia matematică.** Anul I. No. 10. Octomvrie 1924. Chişinău. Premii. (Comitetul). Asupra celor şase operaţiuni aritmetice, de Căp. I. G. LINTEŞ.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul IV. No. 8. Octomvrie 1924. Timişoara. Regimul de lucru maximum la banda hidraulică, de V. VÂLCOVICI.

**Revista Artileriei.** Anul XXXVII. No. 8. August 1924. Timişoara. Problema tragerilor în general, de Căp. I. G. LINTEŞ.

I. IONESCU. *Reforma Calendarului. Armonizarea lunii, săptămânii şi a sărbătorilor.* (Conferinţă ţinută la *Societatea română de ştiinţe*, secţiunea matematică, în seara de 31 Decemvrie 1923). (Extras din *Buletinul Societăţii politecnice din România*, No. 3—4, Martie-Aprilie 1924). Tipografia Jockey-Club, ION C. VĂCĂRESCU. Str. Umbrei 4. Bucureşti.

ERNEST ABASON. *Exerciţii de mecanică (Statica)*. Apărută în *„Biblioteca manualelor ştiinţifice"* îngrijită de D-l OCTAV ONICESCU, 1924. Bucureşti. Tipografia „Cultura naţională".

## CERERI.

116. Unde aş puteà găsi o bibliografie a teoriei erorilor de observaţiune?

O. ORĂNESCU.

117. Ecuaţia:

$$\sin(\sin x) = 0,$$

se găseşte tratată undevà?

L. WEISS.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2835. *Să se demonstreze relaţia:*

$$\frac{(p^2-r_a^2)(p^2-r_b^2)}{r_a r_b}+\frac{(p^2-r_b^2)(p^2-r_c^2)}{r_b r_c}+\frac{(p^2-r_a^2)(p^2-r_c^2)}{r_a r_c}=4p^2,$$

p, $r_a$, $r_b$ *şi* $r_c$ *fiind semiperimetrul şi razele cercurilor exînscrise unui triunghiu.*

M. SARIAN.

Soluțiune dată de D-nii: MIRCEA ADAM, N. ARCADIAN (Caracal), EM. BERCOVICI, M. B. BARBĂLATT, A. BUȘILĂ, D. BLUMENFELD, C. BERDAN, BRĂTESCU DANUBIU, I. CIORĂNESCU, V. COȘNIȚĂ, MARIN DUMITRESCU, C. I. GEORGESCU, V. GHIȚESCU, IONESCU-BREZUICA, PAUL IONESCU, ȘT. LĂZĂRESCU, ȘTEFAN MARIN, I. POPOVICI, EMIL ȘTEFĂNESCU, I. VASILIU.

Inlocuind în relațiunea cunoscută:

$$\Sigma \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B = 1,$$

cotgA, cotgB și cotgC în funcțiune de tg arcelor pe jumătate, avem:

$$\sum \frac{(1-\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A)(1-\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B)}{4\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B} = 1.$$

Ținând seamă de relațiunile:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{r_a}{p} \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{r_b}{p} \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{r_c}{p},$$

găsim:

$$\sum \frac{(p^2-r_a^2)(p^2-r_b^2)}{r_a r_b} = 4p^2,$$

care este relația propusă.

---

PROBLEMA 2910. *Fiind dată progresia aritmetică*

$$a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot l$$

*cu* p *termeni, în care* $a = 4p-2$, *iar rația egală cu* $-4$, *să se demonstreze relațiunea:*

$$[(a^2+a-1)^2-1][(b^2+b-1)^2-1]\cdots\cdots[(l^2+l-1)-1] = (4p)!$$

ADALBERT F. KANNER.

Ținând seamă că

$$(a^2+a-1)^2-1 = (a+2)(a+1)a(a-1),$$

relațiunea devine:

$$(a+2)(a+1)a(a-1)(b+2)(b+1)b(b-1)$$
$$\ldots\ldots(l+2)(l+1)l(l-1) = (4p)! \qquad (1)!$$

$j$ și $k$ fiind doi termeni consecutivi oarecari, avem:

$$k - j = -4 \quad \therefore \quad (k+2) + 1 = j - 1,$$

ceeace spune că $j-1$ și $k+2$ sunt două numere consecutive în ordine descrescătoare și că factorii primului membru al egalității (1) sunt numerele consecutive dela $4p$ pânăla 1, adică $(4p)!$.

c. c. e. d. d.

Au rezolvit problema D-nii: MIRCEA ADAM (Constanța), I. ANTONIU, N. ARCADIAN (Caracal), A. BUȘILĂ, GH. BOJENESCU (Craiova), M. BOGDAN (Caracal), M. B. BARBĂLAT (Bârlad), C. BERDAN (Bârlad), I. CONSTANTINESCU (M-rea Dealului), I. COȘEREANU, V. DAN (Galați), AL. DINULESCU, I. DRAGOMIR, T. DORDEA, I. B. FLORESCU (Craiova), I. FÂNTÂNEANU, M. GÂTAN, VIRGIL GHIȚESCU, GEORGESCU GORJAN, FL. GEORGESCU, C. I. GEORGESCU (Craiova), GEORGESCU ROEGEN, CRISTEA GOILAV, I. HUBER, LONGIN IONESCU (Caracal), C. IORGULESCU (Iași), AL. IONESCU, E. ILIESCU, I. ILIESCU, I. GH. JUJESCU, PINCU KATZ, ST. LĂZĂRESCU, GH. MATEESCU, ȘTEFAN MARIN, G. B. MĂRCULESCU, A. MOCANU, C. MIHĂESCU, A. T. NICOLESCU, FL. NEGRETZU, I. NATHANSOHN, E. OPRIȘAN, AL. PAMULA, TEODOR POPA, I. PETROVICI, OVIDIU POPEA, T. POPOVICI (Arad), I. POPOVICI, C. RODER, GH. STANCU, N. STĂNESCU, D. SCHILERU, M. GH. SĂVESCU, EMIL ȘTEFĂNESCU, A. SOLOMON, AL. SCODREANU (Durostor), I. ȘERBĂNESCU, I. STOENESCU, E. SCORUȘANU, AL. TAUBER, I. TEODORESCU, N. TEODORU, I. VASILIU M. VASILIU și LEON WEISS.

PROBLEMA 2974. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare și* Ω *punctul direct (al doilea punct) al lui* BROCARD. *Paralelele cu* AΩ′, BΩ′, CΩ′ *duse respectiv prin vârfurile* C, A, B *formează un triunghiu* A′B′C′ (A′ *este intersecția paralelelor duse prin* C *și* A; B′ *intersecția paralelelor duse prin* A *și* B, *etc.). Fie* D, E, F *proiecțiile lui* Ω′ *pe laturile* BC, CA, AB *și* $D_1$, $E_1$, $F_1$ *intersecțiile perpendicularelor* Ω′D, Ω′E, Ω′F *respectiv cu laturile* B′C′, C′A′, A′B′; F′ *proiecția lui* Ω′ *pe* A′B′. *Se cere să se arate că:*

1. *Triunghiul* A′B′C′ *este asemenea cu* ABC;

2. *Figura* FΩ′EF′ *este un trapez isoscel, raportul între bazele sale fiind*

$$\frac{\operatorname{tg} A \operatorname{cotg} \omega + 1}{\operatorname{tg} A \operatorname{cotg} \omega - 1},$$

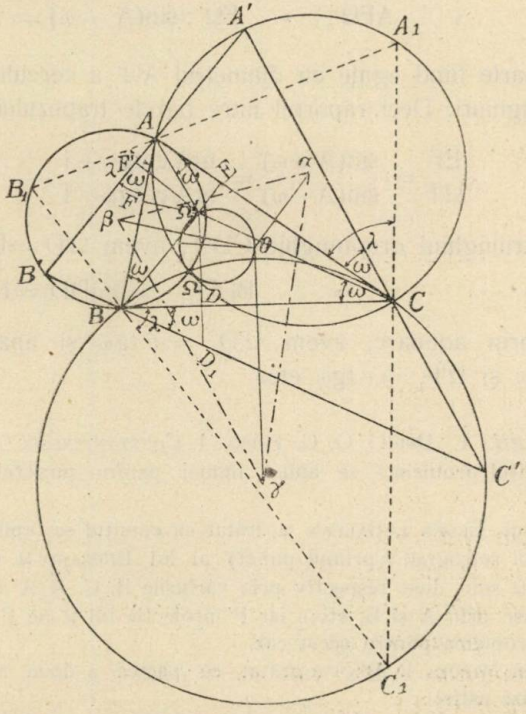
3. *Avem relaţiunea*

$$\overline{\Omega'D_1} + \overline{\Omega'E_1} + \overline{\Omega'F_1} = (a + b + c)\,\mathrm{tg}\omega,$$

*a, b, c fiind laturile şi* $\omega$ *unghiul lui* BROCARD *al triunghiului (enunţ rectificat).*

ION D. PETROVICI.

Soluţie dată de D-nii: OVIDIU G. POPEA, ION CONSTANTINESCU, TEODOR POPA, MIRCEA I. ADAM, WILHELM SOLOMON, EUGEN I. BALLAN, TIBERIU POPOVICIU, EMIL S. DRĂGĂNESCU, CONST. I. GEORGESCU, ADRIAN A. BUŞILĂ, I. M. ŞERBĂNESCU, M. I. FOCŞENEANU, ION C. VASILIU, ION S. ANTONIU, TR. UDRISKY, AL. NICULESCU, VIRGIL GHIŢESCU, MARIN ŞTEFAN, EMILIAN ILIESCU, G. MATEESCU, V. COŞNIŢĂ, SOLOMON WEISS, C. I. CIORĂNESCU, PAUL IONESCU.




1. De oarece, prin construcţie, $A\Omega'$ e paralelă cu $A'C'$, rezultă că $\sphericalangle ACA' = \sphericalangle \Omega'AC = \omega$ şi cum $\sphericalangle AC\Omega' = C - \omega$, avem

$$\sphericalangle \Omega'CA' = \sphericalangle \Omega'CA + \sphericalangle ACA' = (C - \omega) + \omega = C.$$

Dar $\sphericalangle B'C'A' = \sphericalangle \Omega'CA'$, şi deci $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$.

Analog demonstrăm că $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$.

2. Se observă imediat că figura $AE\Omega'FF'$ este inscriptibilă în cercul cu diametrul $A\Omega'$ şi, de oarece $B\Omega'$ şi $A'B'$ sunt paralele, avem:

$$\sphericalangle F\Omega'F' = \sphericalangle FAF' = \sphericalangle AB\Omega' = \omega,$$

$$\sphericalangle \Omega'F'E = \sphericalangle \Omega'AE = \omega,$$

$$\therefore \quad \sphericalangle F\Omega'F' = \sphericalangle \Omega'F'E,$$

şi, cum aceste două unghiuri au poziţia unghiurilor alterne interne, urmează că $\Omega'F$ şi $EF'$ sunt paralele. Deci figura $E\Omega'FF'$ este un trapez şi, fiind înscris într'un cerc, el e şi isoscel.

In triunghiul $AEF'$, avem $EF' : \sin(A + \omega) = A\Omega'$.

In » $AF\Omega'$, » $F\Omega' : \sin(A - \omega) = A\Omega'$,

ambele rapoarte fiind egale cu diametrul $A\Omega'$ a cercului circumscris acestor triunghiuri. Deci raportul între bazele trapezului este

$$\frac{EF'}{\Omega'F} = \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} = \frac{tgA\,cotg\omega + 1}{tgA\,cotg\omega - 1}.$$

3. In triunghiul dreptunghic $CD\Omega'$, avem $\Omega'D = DC tg\omega$

In » » $BDD_1$, » $DD_1 = BD tg\omega$,

de unde, prin adunare, avem $\Omega'D_1 = a\,tg\omega$ şi analog obţinem $\Omega'E_1 = b\,tg\omega$ şi $\Omega'F_1 = c\,tg\omega$, etc.

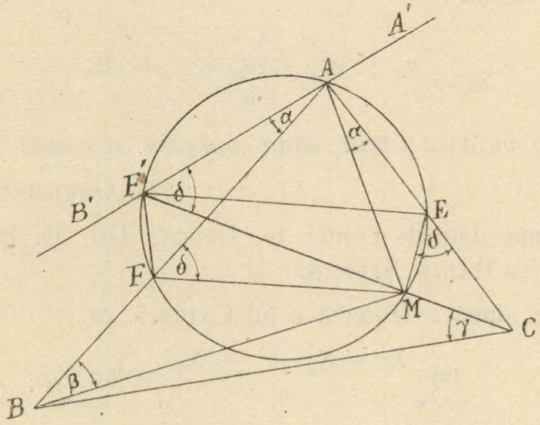
*Observaţii.* 1. D-nii: O. G. Popea, I. Constantinescu şi T. Popa au arătat că enunţul problemei se aplică numai penfru punctul direct al lui Brocard.

2. D-nul Eugen I. Ballan a arătat că enunţul se aplică întocmai şi pentru punctul retrograd (primul punct) al lui Brocard $\Omega$, dacă paralelele cu $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ sunt duse respectiv prin vârfurile B, C, A ($A'$ este intersecţia paralelelor duse prin A şi B, etc.), iar $F'$ proiecţia lui $\Omega$ pe $C'A'$. D-sa a şi demonstrat problema pentru acest caz.

3. D-nul Mircea I. Adam a arătat că partea a doua a problemei se poate generaliză astfel:

Fie M un punct interior triunghiului ABC, $\alpha$ unghiul pe care MA îl face cu AC şi $A'B'$ o dreaptă dusă prin A astfel că unghiul $BAB'$ (către exterior) să fie tot $\alpha$. Fie E, F şi $F'$ proiecţiile de un acelaş unghiu $\delta$ şi în acelaş

sens, ale punctului M pe laturile CA, AB şi pe dreapta A'B'. Figura MFF'E este un trapez isoscel, iar raportul bazelor este $EF' : MF = (\mathrm{tg}A \cot g\alpha + 1) : (\mathrm{tg}A \cot g\alpha - 1)$. Demonstraţia este analoagă cu cea de mai sus.




D-nul Wilhelm Solomon a dat o generalizare analoagă pentru $\alpha$ oarecare şi $\delta = 90^0$.

4. Proprietatea întâia se menţine când laturile triunghiului A'B'C' fac cu ale lui ABC în loc de unghiul $\omega$, un unghiu oarecare $\lambda$. Astfel triunghiul $A_1B_1C_1$, în care $\sphericalangle BAB_1 = \sphericalangle CBC_1 = \sphericalangle ACA_1 = \lambda$ este asemenea cu ABC. Vârfurile triunghiului $A_1B_1C_1$ se mişcă pe cercurile adjuncte (CA), (AB), (BC), iar centrul permanent de similitudine al triunghiurilor $A_1B_1C_1$, este punctul retrograd $\Omega$ (primul punct al lui Brocard) al triunghiului ABC [1]).

Această observaţie se aplică şi pentru cazul când laturile $C_1A_1$, $A_1B_1$, $B_1C_1$ ale triunghiului $A_1B_1C_1$ trec respectiv prin vârfurile A, B, C făcând unghiurile $CAC_1 = ABA_1 = BCB_1 = \lambda$. In acest caz, vârfurile $A_1$, $B_1$, $C_1$ descriu cercurile adjuncte (BA), (CB), (AC), iar centrul permanent de similitudine al triunghiurilor $A_1B_1C_1$ este punctul direct $\Omega'$ al lui Brocard [2]).

(V. C.)

---

1) A se vedea: **Rouché et de Comberousse,** *Traité de Géométrie, Géométrie plane,* nouvelle édition, 1922, p. 486, § 54. 1°,

2) *Idem,* p. 487, § 54. 2°.

PROBLEMA 3034. *Termenii unui şir sunt legaţi prin relaţia de recurenţă :*

$$u_n = a\,u_{n-1} + b\,u_{n-2},$$

*în care* $u_0 = 1$, $u_1 = a$, *iar* a *şi* b *sunt cantităţi pozitive. Să se arate că suma :*

$$S_n = \frac{u_1 + \sqrt{u_2} + \sqrt[3]{u_3} + \cdots + \sqrt[n]{u_n}}{n},$$

*păstrează o valoare finită, când numărul* n *creşte nemărginit.*

M. GHERMĂNESCU.

1. Soluţie dată de D-nii: O. POPEA, GH. D. POPESCU, C. SCHÖNFELD şi MARIN ŞTEFAN.

Se ştie, după o teoremă a lui CAUCHY, că

$$\lim_{n=\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \lim_{n=\infty} X_n,$$

$X_i$ fiind o variantă de indice $i$. In cazul nostru,

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Insă, dacă $u$ şi $v$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - a\,x - b = 0,$$

atunci $u_n$ e dat de expresiunea :

$$u_n = \lambda u^n + \mu v^n,$$

unde

$$\lambda = \frac{+a + \sqrt{a^2 + 4\,b}}{2\sqrt{a^2 + 4b}} = \frac{A}{2\sqrt{a^2 + 4b}},$$

$$u = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4\,b}}{2\sqrt{a^2 + 4b}} = \frac{B}{2\sqrt{a^2 + 4b}}.$$

Vom avea deci :

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 4b}^{n+1}} (A^{n+1} - B^{n+1}),$$

iar

$$\lim_{n=\infty} S_n = \tfrac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{A^{n+2} - B^{n+2}}{A^{n+1} - B^{n+1}} .$$

De oarece $A > B$, se găseşte uşor

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{A}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} .$$

2. Soluţie dată de D-nii: B. M. BARBĂLATT şi GH. D. POPESCU.

Dacă însemnăm numărătorul cu $U_n$, iar numitorul cu $V_n$, aplicând o teoremă a lui CÉSARO, vom avea:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n=\infty} \frac{U_n - U_{n-1}}{V_n - V_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} .$$

Relaţia de recurenţă dată, se poate însă scrie:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a + \frac{b}{\dfrac{u_n}{u_{n-1}}} ,$$

dacă $S_n$ are o limită $k$, această relaţiune, la limită devine:

$$k = a + b/k$$

$$\therefore \qquad k = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

Nu putem luă — înaintea radicalului, căci $a$ şi $b$ fiind pozitivi, $u_n$ şi deci $S_n$ are o limită pozitivă. Rezultă deci:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} .$$

3. Soluţie şi generalizare date de D-l T. POPOVICIU.

Mai general, să presupunem că între termenii şirului, avem relaţia de recurenţă

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_m u_{n-m},$$

$a_1$, $a_2$, .... $a_m$ fiind oarecari.

Se ştie că

$$\lim S_n = \lim \frac{u_1 + \sqrt{u_2} + \cdots + \sqrt[n]{u_n}}{n} = \lim \sqrt[n]{u_n} .$$

Se mai ştie apoi că dacă $u_{n+1}/u_n$ are o limită, avem

$$\lim u_{n+1}/u_n = \lim \sqrt[n]{u_n}.$$

In cazul nostru avem

$$\lim S_n = \lim u_{n+1}/u_n.$$

Avem apoi

$$(1)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_1u_n + a_2u_{n-1} + \cdots + a_mu_{n-m+1}}{u_n} = a_1 + \frac{a_2}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} + \frac{a_3}{\frac{u_n}{u_{n-2}}} + \cdots + \frac{a_m}{\frac{u_n}{u_{n-m+1}}}.$$

Putem pune

$$\frac{u_n}{u_{n-2}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$$

$$\frac{u_n}{u_{n-3}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}$$

. . . . . .

$$\frac{u_n}{u_{n-m+1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n-m+2}}{u_{n-m+1}}.$$

La limită, vom aveà

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = \cdots = \lim \frac{u_{n-m+2}}{u_{n-m+1}} = x,$$

deci după (1)

$$x = a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + \frac{a_m}{u^{m-1}}$$

$$(2)\qquad \therefore \quad x^m - a_1x^{m-1} - a_2x^{m-2} - \cdots - a_m = 0.$$

Această ecuaţie de gr. $m$ dă limita căutată. Dacă avem o rădăcină reală, $S_n$ admite o singură limită. Se poate întâmplà ca ecuaţia (2) să admită două sau mai multe rădăcini reale; în acest caz, toate sunt limită a lui $S_n$. Multiplicitatea limitei provine din cauză că relaţia de recurenţă se poate pune sub diferite forme. Dacă ecuaţia (2) admite numai rădăcini imaginare, $S_n$ nu are limită determinată. In acest caz, seria $Q = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$ este nedeterminată, adică nu are o limită fixă, tot aşà şi $S_n$.

Când $m$ este impar, ecuația (2) admite totdeauna cel puțin o rădăcină reală, deci în acest caz, $S_n$ are totdeauna cel puțin o limită.

Ne putem întrebă dacă nu cumvà $\sqrt[n]{u_n}$ are limită necomună cu $u_{n+1}/u_n$. Aceasta nu are loc, căci numai în cazul când ecuația (2) are rădăcini imaginare am puteà lua o limită necomună cu $u_{n+1}/u_n$.

In acest caz, seria $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$ fiind nedeterminată, în general, $\lim u_n \neq 0$, deci $\sqrt[n]{u_n}$ tinde la 0 sau $\infty$, prin urmare $S_n$ tinde la 0 sau $\infty$, sau nu este determinat.

Deci nu există valori pentru $a_1, a_2, \ldots a_m$, pentru care $\sqrt[n]{u_n}$ să aibă o limită finită și diferită de zero, necomună cu $\lim u_{n+1}/u_n$.

In cazul când $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt toți pozitivi, ecuația (2) are cel puțin una sau două rădăcini reale, după cum $m$ este impar sau par. Prin urmare, în acest caz, $S_n$ are cel puțin o limită finită și diferită de zero.

In cazul particular $m = 2$ și $a_1 = a$, $a_2 = b$ ambii pozitivi, avem

$$x^2 - ax - b = 0,$$

$$x = a \pm \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2},$$

deci

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \frac{u_1 + \sqrt{u_2} + \sqrt[3]{u_3} + \cdots + \sqrt[n]{u_n}}{n} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Acesta este cazul particular al enunțului.

Dacă $a = 1$, $b = 1$, avem șirul lui FIBONACCI:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$$

și

$$\lim S_n = \frac{1 \pm 5\sqrt{5}}{2}.$$

Dacă $a = 2$, $b = 1$, avem șirul

$$1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

și

$$\lim S_n = \lim \frac{1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}}}{n} = 1.$$

(Exercițiul 47, G. M. XXVII pag. 220.)

*Notă.* 1. D-l Gh. D. Popescu, a considerat la prima soluţie şi cazul când $a$, $b$ satisfac relaţiile $a^2 + 4b \gtrless 0$.

2. D-nii: C. I. Georgescu şi I. Şerbănescu determinând o limită superioară pentru $u_n$, au găsit:

$$u_n < (a+b)^n \qquad \therefore \qquad S_n < a+b.$$

3. D-l I. B. Florescu a găsit

$$\sqrt{a^2+b} < S_n < \sqrt{a^2+2b}.$$

4. D-ra E. Lăzărescu a găsit:

$$S_n < a + \sqrt{b}.$$

5. In fine, soluţiuni şi rezultate diferite au dat D-nii: M. Adam, E. Ballan, M. Brătescu-Danubiu, F. Negretzu şi L. Weiss.

M. G.

---

PROBLEMA 3097. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) = m.$$

C. I. Georgescu.

*Soluţiune.* Ecuaţiunea dată se poate scrie succesiv:

$$x + \sqrt{x}.\sqrt{x+1} - \sqrt{x}.\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-1} = m,$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = m - x + \sqrt{x^2-1},$$

pe care ridicând-o la patrat şi făcând reducerile termenilor asemenea, obţinem:

$$-2m\sqrt{x^2-1} = m^2 - 2mx - 1.$$

Ridicând din nou ambele membre la patrat găsim:

$$x = \frac{(m^2+1)^2}{4m(m^2-1)}.$$

*Observare.* Ecuaţiunea

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = m$$

admite aceeaşi rădăcină.

Au rezolvat problema D-nii: I. M Adam (Constanţa), Gh. Andrieşescu (Dorohoiu), Traian Angelescu (Giurgiu), Niculae Arcadian (Caracal), Eugeniu Ballan (Student), B. M. Barbălatt

(Bârlad), Emil Bercovici, C. Berdan (Bârlad), Paul I. Bleiweiss (Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti), David Blumenfeld (Liceul Laurian, Botoşani), Nicolae Gh. Botea (Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti), Octav Burstin (Liceul Internat, Iaşi), Gh. P. Bogdan (Liceul Internat, Iaşi), Martinian P. Bogdan (Caracal), Ovidiu B. Bolgiu (Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti), Leon M. Brüll (Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti), Adrian Buşilă (Bucureşti), Gh. V. Cazan (Liceul Codreanu, Bârlad), Leon Căldăraru (Liceul Şincai, Bucureşti), Radu Cădere (Lic. Internat, Iaşi), Adrian M. Dumitrescu (Calafat), Ştefan T. Epure (Buzău), Georgescu-Val (Dadilov), David Gheorghe (Timişoara), E. P. Ghinsberg (Liceul Internat, Iaşi), Virgil Ghiţescu (Student, Bucureşti), I. Goldstein (Bârlad), Sorin A. Gorovei, Ilie Ionescu-Brezuica (Caracal), Longin Ionescu (Caracal), Gheorghe D. Ionescu-Zane (Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti), Dima St. Iliescu (Liceul Militar, Tg.-Mureş), P. Katz (Şcoala Politechnică, Bucureşti), St. Lăzărescu (Giurgiu), Octavian Mănciulescu (Şcoala superioară Industrială, Timişoara), Gh. Mateescu, Petre Mirescu (Liceul Lazăr, Bucureşti), Froim Marcus, Romeo Mihăilescu (R.-Vâlcea), Dumitru St. Niculescu (Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti), Florea Negretzu (Piteşti), A. Novac, M. Pătroianu, (Liceul Mânăstirea Dealului), A. Gh. Panaitescu (Brăila), Ovidiu Popea (Chişinău), Dorin Popescu (Constanţa), Ioan Popovici (Bucureşti), Faibiş S. Rabinovici (Liceul Laurian, Botoşani), Benedict Reinhorn (Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti), S. I. Ringler (Liceul Codreanu, Bârlad), Edgar C. Russu (Liceul Internat, Iaşi), Ozias M. Schächter (Galaţi), Conrad H. Schönfeld (Botoşani), Ioan Şerbănescu (Bucureşti), Mircea I. Simionescu, I. C. Stănculescu, Gh. A. Stănciulescu (Piteşti), Emil Ştefănescu (Liceul Spiru Haret, Bucureşti), Şerban C. Solacolo (Liceul Matei Basarab, Bucureşti), Wilhelm I. Solomon (Liceul Matei Basarab, Bucureşti), Petru Spacu (Cluj), Marin Ştefan (Constanţa), Dumitru Samoilă (Câmpina), Alexandru Tauber (Botoşani), D. M. Teodorescu (Liceul Mihai Viteazul, Bucureşti), Traian Udrisky (Liceul Moise Nicoară, Arad), Leon Weiss (Liceul Vasile Alexandri, Galaţi), Ion C. Vasiliu, Boris Vulpanovici (Chişinău), Laurenţiu Vlaţiu (Constanţa).

E. A.

PROBLEMA 3204. *Să se demonstreze că bisectoarea unghiului format de două laturi opuse ale unui patrulater inscriptibil, formează un triunghiu isoscel cu cele două diagonale.*

F. MARCUS.

Soluție dată de D-nii: N. G. BEȘCHEA (Elev cl. V, Liceul Dr. I. Meșotă, Brașov), CORNELIU N. POPESCU (Elev cl. V, Liceul Giurgiu), VALERIU MANAFU (Elev cl. V, Liceul Mânăstirea Dealului), I. A. SCHÄCHTER (cl. VI), AL. CHR. MLADENOVICI (Elev cl. VI, Liceul Cantemir Vodă), THEODOR THEODORIDIS (Elev cl. VI, Liceul Silistra), GH. COJOC (Elev cl. VII, Liceul Petru Rareș, Piatra-N.), C. FEDELEȘ (Elev cl. VII, Liceul Constanța), S. KATZ (Elev cl. VII, Liceul Laurian, Botoșani), LEON CĂLDĂRARU (Elev cl. VII particulară), ION C. VASILIU, PAUL I. IONESCU și C. I. CIORĂNESCU (Elevi cl. VII, Liceul Mânăstirea Dealului), BENEDICT A. REINHORN (Elev cl. VII, Liceul Cantemir Vodă), MAX BERNSTEIN (Galați), ARNO KAHANE, OTTO BRAEȘTER (Liceul Național, Iași), MIRCEA ADAM (Constanța), MARIUS GEORGESCU, O. POPEA (Chișinău), SOLOMON WEISS (Galați), M. ST. BOTEZ (Student), EUGEN PĂLĂRIERU (Absolvent al Liceului Spiru Haret), ION M. MIU, T. V. DIACONESCU și BARBU V. GATAIANȚU (Elevi cl. VI, Liceul Ioniță Asan, Caracal), AL. AL. ROȘU și ION I. GEORGESCU (Elevi cl. V, Liceul Mânăstirea Dealului), ILIE POPA, ADRIAN NOVAC, EUGEN GEORGESCU, V. VÂRLAN, CONST. C. POPOVICI, V. I. LEPĂDATU, V. S. DORNEANU și C. GIURUMESCU (Elevi Liceul Internat, Iași), FILIP S. GOLDSTEIN, I. TH. POPOVICI (Absolvent Liceul Mihai Viteazul), C. IONESCU-BUJOR, N. JOJEA și N. G. BOTEA (Elevi Liceul Cantemir-Vodă), ST. I. ISSĂRESCU (Craiova), OZIAS M. SCHÄCTER (Elev cl. VI).

Fie E intersecția laturilor opuse DA, CB ale patrulaterului ABCD; F intersecția diagonalelor AC și BD; M și N intersecția bisectoarei unghiului DEC cu diagonalele AC și BD; P și Q intersecțiile aceleiași bisectoare cu cercul circumscris patrulaterului. Unghiurile DEQ și CEQ fiind egale, avem:

$$\tfrac{1}{2}(\text{arc DQ} - \text{arc AP}) = \tfrac{1}{2}(\text{arc CQ} - \text{arc BP}),$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}(\text{arc DQ} + \text{arc BP}) = \tfrac{1}{2}(\text{arc CQ} + \text{arc AP}),$$

egalitate care exprimă că măsura unghiului MNF este egală cu măsura unghiului NMF. Deci triunghiul FMN este isoscel.

D-nii I. C. Vasiliu şi C. C. Popovici au arătat că problema subsistă şi pentru bisectoara exterioară a unghiului E.

*Observaţie.* Dacă două din vârfurile consecutive ale patrulaterului inscriptibil se apropie unul de altul până se confundă, latura corespunzătoare devine tangentă la cerc. Avem atunci următoarea proprietate:

Bisectoara unghiului format de o latură a unui triunghiu şi de tangenta la cercul circumscris acestuia în vârful opus laturei considerate, formează un triunghiu isoscel cu celelalte două laturi ale triunghiului.

Marius Georgescu.

---

PROBLEMA 3211. *Cu toate cifrele 0; 1; 2;..... 9 luate o singură dată, să se scrie un număr de o cifră, un patrat de două cifre, un cub de trei cifre şi un bipatrat de patru cifre.*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: C. I. Ciorănescu (cl. VII Lic. Mânăsirea Dealului); I. A. Schächter (cl. VI); P. Ionescu, S. Katz, I. Vasiliu, O. M. Schächter, E. Pălărieru.

*Bipatratele* de patru cifre sunt coprinse între 1000 şi 9999 inclusiv acestea, deci rădăcinile lor între $\sqrt[4]{1000} = \sqrt{31,6}\ldots$ şi $\sqrt[4]{9999} = \sqrt{99,9}$ ori între 6 şi 9, inclusiv acestea. Deci nu putem aveà decât bipatratele $6^4 = 1296$; $7^6 = 2401$; $8^6 = 4096$; $9^4 = 6561$. Ultimul nu convine, căci are două cifre identice.

*Cuburile* de trei cifre sunt $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$. Al treilea nu convine căci are două cifre identice. Primul şi al patrulea au aceleaşi cifre, deci este destul a ne ocupà de primul numai, putând fi înlocuit cu al patrulea în soluţiile ce vom găsi. Toate cuburile rămase conţin cifra 2, aşà că bipatratele 1296 şi 2401 nu se mai pot menţine şi rămâne de considerat numai 4096. Acesta având cifra 6 şi 9 va trebuì să excludem cuburile 216 şi 729; aşà că rămâne numai 125.

In bipatratul şi cubul rămase, utilizăm cifrele 0; 1; 2; 4; 5; 6; 9. Ne mai rămân de întrebuinţat 3; 7 şi 8. Niciunul din acestea însă, nu pot terminà un patrat. Problema este deci imposibilă.

*Notă.* Cum s'a arătat aci, problema nu are soluţie in *numeraţiunea zecimală.* Ea are însă soluţiuni în alte sisteme de numeraţiune. Aşà, dacă însemnăm cu $z$ pe *zece*, avem în sistemul cu baza 14:

$$7 \; ; \; 28 = 6^2 \; ; \; 516 = z^3 \; ; \; 3904 = z^4.$$

Când cinevà nu găseşte o marfă în ţară, o caută prin străinătate!

I. I.

D-nii M. Adam, B. Gataianţu, a luat cuvântul *bipatrat* drept *dublul* unui patrat şi a găsit soluţiile următoare în număr de 9:

0 ; 36 ; 729 ; 1458 ; — 0 ; 64 ; 125 ; 7938 ; — 0 ; 64 ; 512 ; 7938 ;
1 ; 36 ; 729 ; 5408 ; — 1 ; 36 ; 729 ; 8450 ; 3 ; 16 ; 729 ; 5408 ;
3 ; 16 ; 729 ; 8450 ; — 3 ; 64 ; 729 ; 1058 ; 4 ; 36 ; 729 ; 1058.

# EXERCIŢII

19. Care sunt patratele de patru cifre divizibile cu 4 şi având cifrele perechi.

A. Stoica.

R. Ultimele două cifre nu ar puteà fi de cât 00; 04; 24; 44; 64; 84. La prima grupă, trebuie pus înainte un patrat de două cifre perechi, care nu este de cât 64 şi avem soluţia 6400. Celelalte dau rădăcini terminate cu 2 sau 8. Scriind înaintea acestora cifrele 3; 4; ...., 9 şi ridicând la patrat, găsim soluţiile 4628; 6084; 8464.

20. Se cer două patrate a căror diferenţă este un cub.

M. Adam.

R. Din:

$$x^3 = (y + z)(y - z),$$

deducem:

$$y + z = ab^2c^3, \qquad y - z = ba^2d^3,$$

de unde scoatem:

$$y = \tfrac{1}{2}ab(bc^3 + ad^3), \qquad z = \tfrac{1}{2}ab(bc^3 - ad^3).$$

Cu acestea, putem găsi oricâte soluţii, ca de exemplu:

$$3^3 - 1^2 = 2^3, \qquad 17^2 - 15^2 = 4^3, \ldots\ldots$$

21. Produsul a două numere consecutive este un număr de trei cifre cu un 0 la mijloc. Se cer acele numere.

P. Iliescu.

R. Produsul este $(10+u)(11+u)$, sau $(20+u)(21+u)$ sau $(30+u)(31+u)$, în ultimul caz cu $u$ cel mult 2. Prin încercări, găsim soluţiile $17\times18$; $22\times23$; $24\times25$; $26\times27$.

22. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$x^2+y^2+z^2=2xy+2xz+2yz.$$

E. Ştefănescu.

R. Din ecuaţia dată, deducem:

$$(x-y)^2=z(2x+2y-z).$$

Se vede de aci că $z$ divide pe $(x-y)^2$ şi fie $v$ câtul, iar $d$ cel mai mare comun divizor al lui $z$ şi $v$, aşa că $z=dp$ şi $v=dq$, cu $p$ şi $q$ primi între ei. De aci, reese că $d^2pq$ este patrat şi că $p$ şi $q$ sunt patrate. Deci $p=m^2$ şi $q=n^2$, de unde scoatem:

$$z=dm^2, \qquad v=dn^2, \qquad x-y=dmn, \qquad x+y=\tfrac{1}{2}(dm^2+dn^2),$$

care dau:

$$x=d(m+n)^2/4, \qquad y=d(m-n)^2/4, \qquad z=dm^2.$$

Deci trebuie ca $d$ să se dividă cu 4, sau $m$ şi $n$ să fie de aceeaşi paritate. In ambele cazuri, se ajunge la concluzia $x=dr^2$; $y=ds^2$; $z=d(r\pm s)^2$.

23. Să se calculeze valoarea lui $n$ pentru care limita expresiunei:

$$y=x^n\left[\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{arcsin}x}{\sin x+\operatorname{arctg}x}\right]$$

să fie finită şi diferită de zero pentru $x=0$.

M Adam.

R. Avem:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{1.3}+\cdots$$

$$\operatorname{arcsin}x=x+\frac{x^3}{1.2}+\cdots$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$$

Inlocuind găsim :

$$m = -2$$

$$\lim y = -\frac{1}{12}$$

24. Dacă $a + b = 0$, determinantul :

$$D = \begin{vmatrix} a+b & a-b & a \\ a-b & 2b & a+b \\ 2b & a+b & b \end{vmatrix}$$

e nul.

A. Stoica.

R. Se găseşte :

$$D = -2b(a+b)^2 = 0.$$

25. In orice triunghiu, avem relaţia :

$$\frac{\sin mA + \sin mB}{\sin mA \sin mB}\left[\sin^2 mA + \sin^2 mB - \sin^2 mC\right]$$

$$= 8\cos\tfrac{1}{2}mA \cos\tfrac{1}{2}mB \cos\tfrac{1}{2}mC, \qquad (m = \mathcal{M}4 + 1).$$

L. Weiss.

R. Se va ţine seama de identitatea No. 25 Cap. IV. Culegere Algebra şi de identitatea :

$$\sin mA + \sin mB + \sin mC = 4\cos\tfrac{1}{2}mA \cos\tfrac{1}{2}mB \cos\tfrac{1}{2}mC, \qquad (m = \mathcal{M}4 + 1).$$

26. Să se găsiască locul punctelor astfel ca razele duble ale fascicolelor omografice involutive formate de dreptele conjugate în raport cu o conică şi care trec prin acele puncte, să facă acelaş unghiu. (Generalizarea exerciţiului 51).

B. M. Barbălatt.

R. Deoarece razele duble sunt tangentele din acele puncte la conică, pentruca aceste unghiuri să fie aceleaşi, punctele vor descrie *Spirica lui Perseus*, când conica e elipsă sau hiperbolă şi o elipsă când conica este parabolă (Vezi Aubert şi Papelier, Ex. de Anal. Tome II pag. 152 şi articolul D-lui Gh. Buicliu din *G. M.* vol. XXVII, pag. 315). Când unghiul tangentelor este 90°, *Spirica lui Perseus* devine cercul lui Monge, iar elipsa găsită devine directoarea parabolei.

## PROBLEME PROPUSE

3231. Să se demonstreze neegalitatea:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > \sqrt[4]{64ab(a+b)^2}.$$

I. Ionescu.

3232. Dacă $n$ este patrat perfect, care este restul împărţirii lui:

$$n^{n^n}$$

prin 2520?

E. Ştefănescu.

3233. Se cere un patrat de patru cifre, care are ca rădăcină suma celor două numere care se obţine despărţind numărul în două, prin o linie dusă prin mijlocul lui.

G. Dâmboianu.

3234. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghiu ABC şi A'B'C' triunghiul său ortic. Dreptele OA, OB, OC taie laturile B'C', C'A', A'B' ale triunghiului ortic, respectiv în punctele M, N, P. Fie M', N', P' isotomicele punctelor M, N, P pe laturile triunghiului ortic. Se cere să se demonstreze că dreptele AM', BN', CP' se întretaie într'un acelaş punct situat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC.

Gh. D. Simionescu.

3235. Se cere să se afle locul geometric al centrelor de greutate ale triunghiurilor în care se pot descompune paralelogramele înscrise într'un patrulater dat.

C. I. Ciorănescu.

3236. Se dau două drepte D şi D', care se taie în A şi punctul P în planul lor. O dreaptă variabilă, ce trece prin P, taie dreptele

D şi D' în punctele B şi C. Să se arate că locul ortocentrului triunghiului ABC este o conică. Să se afle locul centrului acestei conice, când P descrie un cerc cu centrul în A şi de rază dată.

PETRE TROFIMOV.

3237. Să se verifice că polinomul

$$P(x) = x^n + (2n-7)x^{n-1} - 2(n-2)x^{n-1} + x + 1$$

se divide cu $(x-1)^2$.

1°. Să se găsiască expresia generală a câtului.

2°. Să se găsiască limita fracţiunei

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2},$$

când $x$ tinde către 1.

3°. Să se deducă, din divizibilitatea lui $P(x)$ cu $(x-1)^2$, că numărul

$$2^{2n-3}(3n+5)+5$$

este divizibil cu 9.

TH. ANGHELUŢĂ.

3238. Să se găsiască rezultatul eliminării lui $x$ dintre polinoamele :

$$Ax^{n+1} + Bx^n + C = 0, \qquad x^2 - x + 1 = 0.$$

D. V. IONESCU.

3239. Se consideră un cerc raportat la două axe rectangulare. Tangenta într'un punct M al cercului întâlneşte cele două axe în punctele P şi Q. Se cere locul mijloacelor R ale dreptelor PQ.

CĂPITAN GR. ZAPAN.

3240. Se anunţă prin ziare că s'a inventat o frână, care ar opri un tren de 80 vagoane în plină viteză de 100 km/oră, în 25 secunde, pe distanţă de 100 m. maximum.

Este posibil acest lucru?

V. VÂLCOVICI.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Adam M.* (3213); *Adrian P. N.* (2910); *Arcadian N.* (3173); *Bădescu Radu* (3229, P); *Barbălatt M. B.* (3210); *Bleiweiss Paul* (3222, 25, P, R); *Blumenfeld D.* (2895); *Bolgiu Ovidiu* (3060, 108, 44, 225); *Botea G. N.* (3108, 44, 82, 84, 205, 17, 22, 24, 25, P); *Braester Otto* (3205, 18); *Brătescu-Danubiu M. H.* (3144); *Brüll Leon* (3182, 225); *Căldăraru Leon* (3138, 222, 25); *Ciorănescu I. C.* (2910, 20, 22, 80, 85, 99, 3017, 24, 46, 109, 44, 47, 57, 64, 75, 78, 217, 22, 24, N, P); *Ciorănescu N.* (3189, N); *Cohn H.* (3222, 25); *Coșniță V.* (2838); *Diaconescu T.* (3097, 172, 207); *Dorneanu V.* (3172, 207, 17, 25); *Gataianțu B.* (3202); *Georgescu D. Eugen* (2972, 3147, 72); *Georgescu I. Ion* (3097, 172, 225); *Georgescu Marius* (2972, 3173); *Georgescu-Roegen N.* (3007, 71); *Giurumescu C.* (2972, 3059, 147, 72, 96, 207); *Goldstein Filip* (2835, 3155, 207, 17, 25); *Ionescu Angelo* (3207, 22); *Ionescu-Bujor C.* (3203, 222, 25); *Ionescu P. I.* (3196, R); *Ionescu Paul* (2841, 56, 79, 922, 72, 78, 99, 3157, 58, 64, 75, 76, 82, 84, 87, 205, 07, 17, 22, 24, 25, E, N); *Issărescu I. St.* (3202); *Jojea N.* (3172); *Kahane Arno* (3222, 25, E); *Katz S.* (3218, 84, 212, 16, 22, 25, P); *Lăzărescu St.* (2978, 3158); *Livada M.* (3213); *Manafu Valeriu* (3097, 225); *Marcovici H.* (3222, 25); *Marin Ștefan* (3056, 92, 128, 33, N); *Marin Paul* (3197); *Mihăescu C.* (3144); *Mihoc Gh.* (3144, 52); *Miu I.* (3109, 207, E); *Mladenovici Al.* (3213) *Moisil Gr.* (A); *Niculescu Miron* (N); *Novac Adrian* (2972, 3059, 207, 17, 25); *Pălărieru E.* (3184, 218, 22, 25); *Pătroianu M.* (2891, 922, 65, 77, 85, 3046, 73, 97, 109, 72, 73, 75, 96, 205); *Popa Ilie* (3097); *Popea Ovid* (2861, 79, 929, 78, 3059, 109, 44, 57, 84, 205, R); *Popescu Corneliu* (3092, 97, 173, 96, 222, 25); *Popescu Dorin* (2978, 3144, 47); *Popescu N.* (3075, 201); *Popovici C. C.* (2972, 3017, 59, 147, 67, 72, 207, 17); *Popovici I.* (2683, 3207); *Popoviciu T.* (3129, 210, P); *Rădulescu N.* (3202); *Roșu Al. Al.* (3172, 225); *Schächter I.* (3158); *Schächter Osias* (3184, 222, E); *Simionescu G.* (2922, 3046, 59, 136, 75, 96, 207, 17, P); *Spacu P.* (3207); *Stamatescu I. Valeriu* (3217, 25); *Stoica Aurel* (3209, 22); *Tauber A.* (3199, N); *Udrisky Traian* (3144, 55); *Vârlan V.* (3059, 172, 217, 25, R); *Vasiliu Gh.* (N, P); *Vasiliu I.* (2841, 3111, 44, 75, 76, 84, 87, 96, 202, 17, 18, 22, 25, E, N); *Vasiliu C. V. Ion* (3172); *Vulpanovici Boris* (3158, 207); *Weiss Leon* (2910, 3189, N, P); *Weiss Solomon* (3128, 73, 82, 205, 16, 25, P).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2038, 63, 83, 91, 116, 17, 222, 81, 95, 332, 37, 43, 44, 46, 47, 54, 58, 59, 86, 421, 31, 675, 773, 89, 92, 827, 29, 51, 72, 931, 55, 71, 86, 93, 3013, 19, 84, 93, 102, 04, 13, 31, 69, 70, 74, 91, 92 și 210, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

## Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

### 29 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

Mod Asociațiunea pentru cultura și literatura poporului Român din Sibiu

# GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 4. — DECEMBRE 1924.

## SUMARUL

1. Cursuri de matematică în Paris, în anul școlar 1923—1924 . . . . . *P. Sergescu.*
2. Asupra unei teoreme a lui Pappus . . . *G. I. Dumitrescu.*
3. Note Matematice: 16—24.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografii.
6. Cereri 118.
7. Probleme rezolvate: 2096, 2377, 2864, 3111, 3121, 3128, 3170, 3201.
8. Exerciții: 27—35.
9. Probleme propuse: 3212, 3241—3250.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1924

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 69, 89, 90, 107, 14, 27, 31, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 90, 91, 92, 94, 200, 08, 14, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 32, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

# CURSURI DE MATEMATICA IN PARIS, IN ANUL ŞCOLAR 1923—1924.

Şi în anul acesta, ştiinţa franceză a pierdut un matematician de frunte, pe D-l C. GUIGHARD, profesor de geometrie superioară la Sorbona. Dânsul a făcut nenumărate descoperiri în domeniul deschis de cercetările lui G. DARBOUX: Studiul proprietăţilor geometrice cu ajutorul sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale şi reciproc. Cercetările sale s'au întins mai cu seamă asupra proprietăţilor metrice. De asemenea, i se datoreşte o metodă celebră de rezolvare a ecuaţiei cu diferenţe finite a lui EULER. Ca profesor, erà un pedagog foarte bun, cursurile sale erau un model de claritate şi de expunere sistematică. E o pierdere deosebit de mare pentru ştiinţă, cu atât mai mult, că se puteau aşteptà încă multe lucruri mari dela dânsul. Din nefericire, nici cursurile făcute la Sorbona, în ultimii cinci ani, ca profesor de geometrie superioară, nu le-a adunat în volum. Ar fi o operă folositoare tipărirea notelor sale, din care desigur că mulţi începători s'ar puteà inspirà pentru a găsì rezultate noui. Printre cărţile elementare scrise de dânsul, Geometria plană şi în spaţiu sunt foarte răspândite în şcoalele franceze. De asemenea, cursul său de cinematică e o dovadă de claritatea cu care ştià dânsul să prezinte învăţământul matematic.

Profesorii de materiile fundamentale la Sorbona au fost aceiaşi ca în anul trecut şi s'au predat aceleaşi subiecte ca şi în anul trecut la: Calculul infinitezimal, Matematice generale, Mecanica raţională, Cinematica, Aplicaţiile geometrice ale analizei, Astronomia. Ca cursuri speciale de matematică, am avut, în semestrul I: Geometria superioară, ultimul curs al D-lui GUICHARD şi Fizica Matematică, la care D-l E. BOREL a tratat despre *Elasticitate*, pornind dela rezultatele obţinute în cursul din anul trecut asupra deformărilor. D-l E. VESSIOT a tratat despre grupele de transformări.

Dar, în anul acesta, am avut, în sfârşit, ocazia fericită să audiem un curs al D-lui P. PAINLEVÉ. Dânsul e în concediu dela catedră de vreo zece ani, de când e deputat. In anul acesta, s'a creat o catedră nouă de *Aerodinamică şi aplicaţii la aviaţie*. D-l PAINLEVÉ a fost printre creatorii teoriei aviaţiei, acum douăzeci de ani; deşi ocupat peste măsură de chestiile politice, a con-

simţit să inaugureze noua catedră, făcând un curs de două luni. N'a intrat în amănunte, dar a dat idei generale cu totul luminoase, precum şi sugestiuni, care pot fi rodnice pentru cei cari se ocupă de acest domeniu. De altfel, toată activitatea D-sale ştiinţifică se caracterizează prin nenumărate idei noui şi metode ingenioase şi fecunde. Lecţiunile D-sale au tratat despre *Mişcarea unui solid într'un fluid.* S'au grupat în două părţi: în cea dintâi, s'a examinat cazul unui fluid de massă finită, paradoxul lui D'ALEMBERT, viscozitatea, lichidul compresibil, cele şase ecuaţii universale ale mişcărei, ecuaţia continuităţei, intervenţia fenomenelor termice; hipoteza fundamentală: există o relaţie $\rho = f(p)$ între densitatea lichidului şi presiune; fluidul incompresibil, teorema lui LAGRANGE; dacă există un potenţial al vitezelor într'un moment, el există în toate momentele; flux, circulaţie; mişcarea irotaţională. Studiul rezistenţei unui lichid perfect la mişcarea unui solid interior lui; chestiunile de rezistenţe se tratează cu ajutorul funcţiilor armonice. In două lecţii magistrale, D-l PAINLEVÉ a condensat proprietăţile esenţiale ale acestor funcţiuni.

In partea a doua a cursului, s'a studiat cazul *lichidului indefinit*, incompresibil, în care solidul e complet cuprins: Cazul când solidul are o translaţie, momentul rezultant al presiunilor lichidului asupra soliduiui, rotaţia, mişcarea elicoidală permanentă, mişcarea cea mai generală; formulele complete care dau rezistenţa fluidului.

In semestrul al doilea, au fost cursurile D-lor: E. PICARD şi E. CARTAN. Subiectul cursului D-lui PICARD (Analiza superioară) a fost: *Funcţii şi curbe algebrice cu una şi cu două variabile independente.* D-l PICARD însuşi e unul din cercetătorii ale căror lucrări au pus bazele acestei teorii, devenită clasică azi. Cursul a îmbrăţişat un câmp foarte vast de probleme, fiind o admirabilă punere la punct a preocupărilor de azi ale acestei teorii. Şi, ceeace e şi mai interesant, e felul de expunere, elegant şi uşor, al maestrului, care face ca şi abordarea problemelor celor mai grele să pară un lucru firesc. Cursul s'a împărţit în trei părţi: funcţiuni algebrice, integrale abeliene, suprafaţa lui RIEMAN. S'au studiat: Teorema lui ABEL, integralele de specia I, condiţiile, cele de specia II, perioadele, genul curbei şi numărul integralelor distincte. Exemplu studiat până în amănunte: curba hipereliptică. Metoda care a jucat

un rol predominant a fost aplicarea teoremei lui ABEL la intersecțiile curbei date cu curbe asociate (adjointes) convenabil alese. Astfel se poate demonstrà foarte ușor teorema de adițiune pentru funcțiile dublu periodice; curbele de genul unu; o funcție uniformă de o variabilă are cel mult două perioade distincte; o funcție uniformă de două variabile independente are cel mult patru perechi de perioade simultanee distincte; suprafața lui RIEMAN, retrosecțiuni, cicle, integrale abeliene pe suprafață; perioadele sunt soluțiunile unei aceleiași ecuații diferențiale; studiul curbelor trase pe o suprafață RIEMAN; integrale de specia a doua, condiții de existență; condiția de existență a integralei de diferențială totală de specia întâia; studiul integralei de specia a treia.

D-l E. CARTAN alternează subiectul ce tratează la cursul de mecanică analitică. In anul trecut, a expus magistral cercetările D-sale personale de Geometria spațiilor curbe; anul acesta a abordat un subiect mai clasic, bazat pe teoriile lui H. POINCARÉ și LIAPOUNOFF, despre: *Oscilațiile unei masse fluide împrejurul pozițiilor de echilibru relativ.* D-l CARTAN are darul să însuflețiască subiectul ce tratează, să-l facă extrem de clar și să entusiasmeze pe auditori pentru problemele ce-l preocupă. Presupunând cunoscută numai materia de mecanică rațională, dânsul a trebuit să facă o *Introducere*, în care a stabilit ecuațiile hidrostaticei și hidrodinamicei. In mișcarea unei masse fluide împrejurul centrului său de greutate, ca să existe un sistem de referință față de care fluidul e în echilibru, trebue ca forțele de inerție de antrenament să formeze un sistem conservativ; însă aceasta se întâmplă numai pentru rotația uniformă în jurul unui ax fix. Presiunea e peste tot pozitivă. Axa de rotație e necesar un ax principal de inerție. Pentru figura de echilibru, massa fluidă admite un plan de simetrie perpendicular pe axa de rotație, iar orice paralelă la această axă întâlnește suprafața liberă în două puncte cel mult. Cursul propriu zis s'a împărțit în două părți: 1) Studiul figurilor de echilibru și 2) Oscilațiile în jurul acestor figuri. In partea I, s'a studiat, cu deamănuntul, potențialul newtonian de «înveliș simplu»: $v = f\int \mu . d\sigma / r$ și de «dublu înveliș» $w = f\int \mu . d\sigma \frac{d\,1/r}{dn}$. Ca aplicare, s'au determinat potențialele când suprafața liberă e o sferă sau un elipsoid. *Studiul sferei:* o funcție sferică e dată de valorile ce ia pe sferă un po-

linom armonic omogen. Sunt $2n+1$ polinoame armonice de gradul $n$. Proprietăţile funcţiilor sferice; normalizare (intervenţia ecuaţiilor integrale). Fie $\varphi_n(P)$ un sistem complet normalizat şi fie o funcţie $f(P)$ pe care o presupunem desfăşurabilă în serie $f(P)=\Sigma c_n \varphi_n(P)$. Coeficienţii $C_k = \int f(P)\varphi_k(P)\,d\sigma$, sunt constantele lui FOURRIER şi avem $\Sigma C_k^2 < \int f^2(P)\,d\sigma$. Generaţia polinoamelor lui LEGENDRE. *Studiul elipsoidului:* se poate face o corespondenţă cu sfera punând $x, y, z$ respectiv egale cu $a\xi, b\eta, c\zeta$. ($a, b, c$ semi axele elipsei). Avem $ed\sigma = abcd\omega$, unde $d\sigma$ e elementul de arie pe elipsoid, $d\omega$ pe sferă, iar $e$ este inversul lui $\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2}$; $ed\sigma = ds$ se chiamă element de arie redus, iar expresia

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{dV}{d\nu}$$

o vom numi derivată normală redusă. Aceste două câtimi sunt foarte des întrebuinţate în cele ce urmează. Fie $X(\xi, \eta, \zeta)$ o funcţie sferică şi $Y(x, y, z) = X(x/a, y/b, z/c)$. Se poate găsi un polinom armonic care ia pe elipsoid aceleaşi valori ca Y: e un polinom aparţinând gradului $n$ (dacă $n$ e gradul lui X); el e ortogonal, pe elipsoid, tuturor polinoamelor de grad inferior; derivata sa normală redusă e un polinom aparţinând gradului $n$; există $2n+1$ polinoame armonice linear P independente aparţinând gradului $n$. Dacă $V(x, y, z)$ e o funcţie armonică, în interior şi pe elipsoid şi dacă se normează polinoamele P, constantele lui FOURRIER respective ale lui $dV/d\nu$ se obţin din cele ale lui V prin înmulţire cu coeficienţi numerici independenţi de V. Trecerea rezultatelor obţinute în coordonate eliptice. Fie $P(x, y, z)$ un polinom al cărui raport către $dP/d\nu$ e constant pe elipsoid; polinoamele P care sunt armonice formează polinoamele lui LAMÉ. Studiul lor, metode de construcţie; există $2n+1$ polinoame ale lui LAMÉ, distincte, de grad $n$. Cu ajutorul acestor polinoame, teoria potenţialului devine destul de uşoară. Dacă

$$P(x,y,z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma \Pi\left(\frac{x^2}{a_2+h_i}+\frac{y^2}{b^2+h_i}+\frac{z^2}{c^2+h_i}-1\right)$$

$$= R(u)\,R(v)\,R(w)$$

($u, v, w$ coordonatele eliptice), avem

$$R(u) = (a^2+u)^{\frac{\alpha}{2}}(b^2+u)^{\frac{\beta}{2}}(c^2+u)^{\frac{\gamma}{2}}\Pi(u-h_i).$$

Punând:

$$\varphi(u)=(a^2+u)\,(b^2+u)\,(c^2+u) \qquad \therefore \quad H(u)=\int_u^{\infty} \frac{R^2(u)\sqrt{\varphi(u)}}{R^2(t)\sqrt{\varphi(t)}}\,dt,$$

coeficienții H corespunzători polinoamelor lui LAMÉ sunt coeficienții de stabilitatea echilibrului, studiul și compararea lor. Studiul stabilității pentru elipsoizii MAC-LAURIN, de revoluție, condiția lui THOMSON-TAIT. Elipsoizii lui JACOBI ($H_3 = H_6$), criterile de stabilitate ale lui POINCARÉ și LIAPUNOFF. Cu aceasta, începe partea a doua a cursului: studiul mișcărilor elementare împrejurul unei poziții de echilibru: Cazul stabilității ordinare, ecuația caracteristică, mișcări fundamentale. Aceste chestiuni conduc la un sistem de ecuații cu derivate parțiale, dat de POINCARÉ, cu condiții la limită date. In loc de a reduce la o singură ecuație, ca POINCARÉ, D-l CARTAN introduce un sistem conjugat, arată că există o infinitate de soluții polinomiale, relații integrale între soluțiile celor două sisteme conjugate, studiul ecuației $D_n(\lambda) = 0$. Ca aplicație, s'a studiat cazul sferei, al elipsoidului JACOBI și al lui MAC-LAURIN. O ultimă lecție a tratat despre micile mișcări, care nu se reduc la mișcări ale lui POINCARÉ.

Si în anul acesta, s'au invitat, de către consiliul profesoral, învățați străini să țină cursuri la Sorbona: D-l profesor D. POMPEIU, dela universitatea din București, a făcut un curs, foarte audiat, despre *teoria funcțiilor analitice*. Sunt trei puncte de vedere, echivalente, din care se pot studiă funcțiile analitice: al lui WEIERSTRASS (desvoltarea în serie), al lui RIEMANN (bazat pe reprezentarea conformă) și al lui CAUCHY (bazat pe studiul întrinsec al integralei lui CAUCHY. Deși a condus la rezultate admirabile, acest din urmă punct de vedere n'a fost studiat, până acum, într'un mod sistematic, ca să dea întregul domeniu al teoriei funcțiilor. D-l POMPEIU a acoperit această lacună, arătând cum toată teoria se poate deduce, în mod extrem de elegant, din cele câtevă noțiuni fundamentale datorite lui CAUCHY, la care se adaugă câtevă rezultate ale D-lui POINCARÉ (asupra prelungirei analitice, a singularităților) și ale D-lui POMPEIU. Cursul a fost împărțit în două părți; în cea dintâi s'a studiat continuitatea și holomorfia; iar obiectul celei de a doua părți a fost studiul singularităților. Definiția funcției analitice, dela

care a plecat D-l POMPEIU a fost: $f(z)$ e o funcţie holomorfă în D, dacă: 1°) e continuă şi 2°) dacă $\int_c f(z)dz=0$ unde C e un contur închis oarecare, în D. Teorema lui MORERA, prelungirea analitică; o funcţie analitică e o funcţie holomorfă prelungită peste tot unde aceasta e posibil. In cazul funcţiilor armonice nu e deajuns, pentru ca prelungirea să fie posibilă, ca funcţiile să se racordeze pe conturul comun, trebue ca şi derivatele lor normale să satisfacă la o condiţie suplimentară. Principiul lui SCHWARTZ (demonstraţie cu ajutorul teoremei lui MORERA). Un grup de chestiuni foarte interesant a fost studiul funcţiei holomorfe în interiorul domeniului de holomorfie; se petrec aci lucruri aproape contrare cazului variabilei reale: maximul lui $f(z)$ într'un cerc interior lui D e necesar pe contur; se deduce o impresionată demonstraţie a teoremei fundamentale a algebrei; inegalităţile lui CAUCHY; analogia cu teorema creşterilor finite; extinderea teoremei lui ROLLE; lema lui SCHWARTZ; teorema lui PICARD pentru polinoame. La baza studiului singularităţilor e o observare a lui BRIOT-BOUQUET, pe care D-l POMPEIU a utilizat-o foarte des. Iar ca procedeu de demonstraţie a intervenit o *lemă* a D-lui GOURSAT. O funcţie analitică are, în mod necesar, singularităţi în ceeace priveşte studiul funcţiilor. Trebue, mai întâi, să avem un *cadru general*: un studiu amănunţit al felului cum se comportă o funcţie în vecinătatea punctelor singulare esenţiale. Pentru punctul singular izolat, ultimul cuvânt a fost spus de D-l G. JULIA. Criteriul general e: întinderea ansamblului de puncte singulare. Cursul D-lui POMPEIU a fost îmbogăţit de numeroase desvoltări istorice şi filosofice, care l-au făcut deosebit de interesant.

La *Collège de France*, au avut loc cursurile D-lor H. LEBESQUE şi J. HADAMARD. Conferinţa PECCOT a avut-o D-l R. LAGRANGE, care a tratat despre *Calculul diferenţial absolut*.

D-l H. LEBESQUE a continuat cursul de *Analysis Situs* început, în anul precedent: Teorema lui JORDAN (toate curbele fără punct multiplu împart planul în două regiuni şi numai în două). Accesibilitatea unei curbe. Homeomorfia cu cercul. Sistemele de curbe închise sau deschise ale planului; «graful». Deformarea suprafeţelor homeomorfe; suprafeţe poliedrice închise S; studiul curbelor trase pe o suprafaţă. Exemple: torul, planul proiectiv, hiperboloidul cu o pânză. Ca concluzie, s'a stabilit teorema deosebit de însemnată: între cuadricele riglate şi cele neriglate e o deosebire esenţială din

punct de vedere al Analysis Situs, pe când conicele formează o singură curbă din punct de vedere al homeografiei. Două suprafețe având același număr al lui BETTY și aceeași paritate sunt, necesar, homeomorfe. Studiul planului proiectiv; curbele D-lui JUEL, curbele algebrice plane, (studiu topologic complet și foarte interesant); indicații asupra curbelor în spațiu.

D-l J. HADAMARD a continuat *Analiza operei matematice a lui* H. POINCARÉ. Seminarul D-sale de Matematică a reunit și anul acesta un auditoriu foarte numeros și interesat de subiectele ce se expuneau. E un mijloc admirabil de informație despre tot ce se publică nou în toate ramurile matematicei; în același timp, e un prilej de cunoaștere pentru matematicianii din diferite țări. Intre cei cari au luat cuvântul, putem notă, alături de D-l HADAMARD, din Franța pe D-nii: H. LEBESQUE, E. CARTAN, P. MONTEL, A. CHATELET, rectorul universității din Lille, M. FRECHET, profesor la universitatea Strassbourg, FATON; din Elveția, profesorii JUVET și WAVRE; din Danemarca, D-l NÖRLUND, etc. Printre subiectele tratate: Despre numerele ideale, cercetările de filosofie matematică ale D-lor D. HILBERT și H. WEYL, însumări trigonometrice, calcul funcțional, numere algebrice, lacunele seriei lui TAYLOR, problema celor *n* corpuri, ecuația lui LAPLACE, clasificarea spațiilor după un număr *continuu* de dimensiuni, etc., etc. După cum se vede, varietatea subiectelor a îmbrățișat toate ramurile matematicei. Dintre Români, subscrisul a analizat, într'o ședință, patru memorii asupra ecuațiilor integrale.

Tot la *Collége de France*, D-l LE ROY a continuat cursul anexă de matematică, în vederea unei noui *teorii a cunoașterei*. A tratat în special despre serii.

Voiu încheià această dare de seamă, vorbind despre un curs, cu deosebire însemnat, făcut la *Școala Normală Superioară* de D-l P. MONTEL: *Familiile de funcții*. (Celelalte cursuri dela Școala Normală s'au menținut în cadrele clasice). D-l P. MONTEL a introdus în matematică o noțiune nouă, foarte fecundă: familiile *normale* de funcțiuni. O familie (ansamblu) de funcție e normală dacă, din fiecare șir de funcție al ei, se poate extrage un șir parțial care converge uniform. Cu această noțiune, studiul unei singure funcțiuni (în vecinătatea unui punct singular, de ex.) se reduce la studiul, mai ușor, al unei familii de funcțiii într'un ansamblu de domenii. Această

transformare a permis D-lor MONTEL şi JULIA să găsiască ultimul cuvânt în chestiunea punctelor singulare izolate. Cursul D-lui MONTEL a avut două subdiviziuni 1) Partea teoretică şi 2) Aplicaţiile. In prima parte, s'au stabilit criteriile pentru ca o familie de funcţii să fie normală: să fie mărginite, sau să nu ia trei valori (de ex.: 0, 1, $\infty$), etc. Aci intervine funcţiunea modulară, care pare a jucă un rol esenţial în toată teoria conexă teoremei D-lui PICARD. O familie e *quasi-normală*, dacă are o limită uniformă în tot domeniul, cu excepţia unui număr *finit* de puncte neregulate. Criterii şi exemple. Ca urmare imediată a acestor desvoltări, se deduc o mulţime de teoreme analoage celor ale D-lui PICARD şi al D-lui LANDAU, etc. Ca aplicaţii, s'au studiat trei probleme fundamentale: 1) reprezentarea conformă în care D-l MONTEL a dat unele rezultate esenţiale încă din 1917; apoi, 2) seriile de funcţii holomorfe, convergenţă egală, teoremele lui VITALI, WEIERSTRASS, etc; 3) seriile de funcţii meromorfe, teoreme analoage celor ale D-lui LANDAU, rezultatele D-lor BLASCHKE şi OSTROWSKI. Cursul D-lui MONTEL a fost unul din cele mai fecunde în sugestiuni şi în deschiderea de orizonturi nouă.

P. SERGESCU.

## ASUPRA UNEI TEOREME A LUI PAPPUS.

Vreau să mă ocup, în cele ce urmează, de următoarea teoremă a lui PAPPUS:

«Parcurgând perimetrul unui triunghiu ABC, în aceiaş sens, se împart cele trei laturi în acelaş raport:

$$A'B/A'C = B'C/B'A = C'A/C'B = m/n.$$

Triunghiurile ABC, A'B'C' au acelaş centru de greutate».

Plecând dela observaţia simplă că punctul C' se poate consideră ca centrul forţelor paralele $n,m$ aplicate respectiv în punctele A,B, teorema lui PAPPUS se poate generalizà în spaţiu în felul următor:

«Se dă tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$. Fie $C_4$ un punct al feţei $A_1A_2A_3$, care este centrul forţelor paralele $a,b,c$ aplicate respectiv în punctele

$A_1,A_2,A_3$. Procedând la fel cu fețele $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, se mai obțin, în aceste fețe, punctele $C_1,C_2,C_3$.

Tetraedrele $A_1A_2A_3A_4,C_1C_2C_3C_4$ au același centru de greutate».

Demonstrația este simplă. Fie $x_i$ , $y_i$ , $z_i$ coordonatele punctului $A_i$ , deasemenea $\xi_i$ , $\eta_i$ , $\zeta_i$ coordonatele lui $C_i$ .

Pot scrie:

$$\xi_1=\frac{ax_2+bx_3+cx_4}{a+b+c},\eta_1=\frac{ay_2+by_3+cy_4}{a+b+c},\zeta_1=\frac{az_2+bz_3+cz_4}{a+b+c}.$$

Prin permutări circulare, se deduc și celelalte valori pentru coordonatele $\xi$, $\eta$, $\zeta$ afectate de ceilalți trei indici.

Notând cu $\xi$, $\eta$, $\zeta$ coordonatele centrului de greutate al tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ și cu $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ pe acelea ale centrului de greutate al tetraedrului $C_1C_2C_3C_4$, avem:

$$\xi=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\eta=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\zeta=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}$$

$$\xi'=\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}{4}=\frac{\begin{array}{r}(ax_2+bx_3+cx_4)+(ax_3+bx_4+cx_1)+(ax_4+bx_1+cx_2)\\+(ax_1+bx_2+cx_3)\end{array}}{4(a+b+c)}$$

$$\xi'=\frac{(a+b+c)(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4(a+b+c)}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\xi$$

$$\eta'=\eta$$

$$\zeta'=\zeta,$$

ceeace arată că centrele de greutate ale celor 2 tetraedre coincid.

*Observare.* 1) In cazul particular $a=b=c$, obținem proprietatea cunoscută:

Tetraedrul, ale cărui vârfuri sunt centrele de greutate ale fețelor unui tetraedru, are același centru de greutate ca acesta.

(Se poate găsi în tratatul de Geometrie Analitică de Tr. Lalescu, în fasc. I, pag. 79).

2) Notând cu S și S' ariile triunghiurilor ABC, A'B'C', se știe că avem relația simplă:

$$S'=\frac{m^2+n^2-mn}{(m+n)^2}S.$$

Se vede că pentru $m = n$, $S' = \frac{1}{4} S$.

Între volumele V, V' ale tetraedrelor $A_1A_2A_3A_4$, $C_1C_2C_3C_4$, există deasemenea o relație simplă. În adevăr:

$$V' = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6(a+b+c)^3}\begin{vmatrix} ax_1+bx_2+cx_3 & ay_1+by_2+cy_3 & az_1+bz_2+cz_3 & 1 \\ ax_2+bx_3+cx_4 & ay_2+by_3+cy_4 & az_2+bz_3+cz_4 & 1 \\ ax_3+bx_4+cx_1 & ay_3+by_4+cy_1 & az_3+bz_4+cz_1 & 1 \\ ax_4+bx_1+cx_2 & ay_4+by_1+cy_2 & az_4+bz_1+cz_2 & 1 \end{vmatrix},$$

sau:

$$V' = \frac{1}{6(a+b+c)^4}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ c & 0 & a & b \\ b & c & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Se găsește că: $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ c & 0 & a & b \\ b & c & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - b^4 + c^4 - 2a^2c^2 + 4acb^2,$

așă că relația căutată este:

$$V' = \frac{a^4 - b^4 + c^4 - 2a^2c^2 + 4ab^2c}{(a+b+c)^4} V.$$

Pentru $a = b = c$, se găsește: $V' = \frac{1}{27} V$.

G. I. Dumitrescu.

Profesor la liceul „M-rea Dealului".

# NOTE MATEMATICE

16. *Alte zece Geometrii diverse.* (Vezi Nota 65, Anul XXIX pag. 375).

152. **Adevărată.** A se vedeà *Felix Dauge.*—Méthodologie. pag. 215.

153. **Axiomatică.** » » » *J. Duclout.*—Les axiomes de la géométrie. pag. 33.

154. **Falşă.** » » » *G. Fournier.* — La relativité vraie et la gravitation universelle. Cap. I. Paragraful 6.

155. **Figurilor curbe.**[1]) *Th. Beck.* — Die Geometrie Krummliniger Figuren Leonardo da Vincis. In Zeitschrift für gewerblichen Unterricht, VII, 1904.

156. **Mintală.** *B. Kerst,*—Kopfgeometrie. Vezi Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Septemvrie 1920.

157. **Radiaţiunii.** Ca la No. 153, pag. 34.

158. **Reală.** » » » » » 208.

159. **Rudimentară.** » » » » » 203.

160. **Simbolică.** » » » » » 208.

161. **Uzuală.** » » » » » 201.

(Va urmà). I. Ionescu.

17. *Asupra unor patrate.* Numerele de forma $(50n \pm m)$ cu $m$ mai mic decât 10, au ultimele două cifre patrate perfecte consecutive, iar numerele formate de celelalte cifre, diferă unul de altul cu $n$. In adevăr, avem:

$$(50n \pm m)^2 = 2500n^2 \pm 100nm + m^2 = n\ (25n \pm m) \times 100 + m^2,$$

care arată că ultimele două cifre formează pe $m^2$ şi că pentru doi $m$ diferind cu 1, produsul $n(25n \pm m)$ diferă cu $n$.

C. T. Ionescu Bujor.

1) Comunicată de D-l Gr. Zapan.

18. *O proprietate a şirului lui* FIBONACCI. Se cunoaşte relaţia:

$$u_{n+p} \cdot u_{n-p} = u_n^2 + (-1)^{n+p} u_{p-1}^2.$$

Facem pe rând $p = 1, 2, 3, 4, \ldots, p$ şi sumăm rezultatele cu semne alternative, adică:

$$s = u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_{n+2} \cdot u_{n-2} + u_{n+3} \cdot u_{n-3} - \ldots \pm u_{n+p} \cdot u_{n-p}.$$

Atunci $s$ este independent de $p$, dacă este pereche. In adevăr, dacă $n$ este nepereche, avem:

$$s = (u_n^2 + u_0^2) - (u_n^2 - u_1^2) + (u_n^2 + u_2^2) - \ldots - (u_n^2 - u_{p-1}^2),$$

$$s = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{p-1}^2 = u_p u_{p-1},$$

după o proprietate demonstrată în Gazeta Matematică Vol. XXII.

Demonstraţia analogă pentru cazul când $n$ este pereche.

Se poate arătà, pe aceeaşi cale, că dacă $p$ este nepereche, sumele găsite mai sus se măresc cu $u_n^2$, deci nu mai sunt independente de $n$.

EMIL ŞTEFĂNESCU.

19. *Demonstrarea unei proprietăţi a parabolei.*

Fie A, B, C, D punctele de tangenţă ale laturilor unui patrulater circumscris unei conice, ale cărui două vârfuri opuse sunt N şi P.

Punctul de intersecţie $k$ al dreptelor AB şi CD are ca polară pe NP, atât faţă de conică, cât şi de unghiurile P(CD) şi N(AB).

Rezultă că diviziunea făcută pe P$k$ de P, $k$ şi punctele $a$ şi $b$ de intersecţie cu tangentele duse din N, formează o diviziune armonică.

Să presupunem că tangenta în A e aruncată la infinit; conica devine o *parabolă*. Punctele N şi $a$ sunt deasemenea la infinit. Dreapta PN este paralelă tangentei în B.

Fie, ca şi mai sus, P$k$ conjugata lui PN în raport cu P(D, C); punctul $a$ fiind la infinit, $b$ este mijlocul segmentului P$k$.

De altă parte, PN fiind paralelă tangentei în B, $b$ e mijlocul celei de a treia laturi a triunghiului format de tangentele în B, C şi D.

Cu alte cuvinte, deducem că: dacă un triunghiu este circumscris unei parabole, simetricul unuia dintre vârfuri, în raport cu mijlocul laturii opuse, e pe polara vârfului în raport cu parabola.

ARMAND LERNER.

20. *Asupra problemei 1889.*

In cele ce urmează, voiu arătà că maximul suprafeţelor triunghiurilor ACC' şi ABB' are loc în acelaş timp, cu al triunghiurilor ACB şi AC'B', utilizând figura care însoţeşte soluţia problemei 1889, în «Gazeta Matematică», vol. XVIII, pagina 350.

Ariile triunghiurilor ACC' şi ABB', sunt:

$$\tfrac{1}{2}CC' \cdot AH \quad \text{şi} \quad \tfrac{1}{2}BB' \cdot AH',$$

H şi H' fiind respectiv proecţiile lui H pe CC' şi BB'.

Maximul lui AH sau AH', are loc când acestea sunt raze, adică pentru $\alpha = 45^0$. Se vede imediat că aria patrulaterului BB'CC' este maximă când $\alpha = 45^0$.

Observând că perpendicularele din S pe BB' şi CC', sunt maxime când devin $SO_1$ şi $SO_2$, rezultă evident că şi triunghiurile SCC' şi SBB' sunt maxime când $\alpha = 45^0$.

SOLOMON WEISS.
Elev cl. VI R, Liceul Galaţi.

21. *Asupra unui exerciţiu.* Exerciţiul No. 25 al D-lui BARBĂLATT este o frumoasă aplicaţie generală a locului potenţialelor unui punct. Se ştie că locul potenţialelor unui punct $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ este curba:

$$\alpha^{\log \frac{\beta_0}{\gamma_0}} \beta^{\log \frac{\gamma_0}{\alpha_0}} \gamma^{\log \frac{\alpha_0}{\beta_0}} = 1.$$

Când un punct se află pe una din mediane, potenţialele lui se află tot pe mediana aceea.

In acest caz, avem: $\beta_0 = \gamma_0$, de ex.

$$\therefore \quad \alpha^{\log 1} \beta^{\log \frac{\beta_0}{\alpha_0}} \gamma^{\log \frac{\alpha_0}{\beta_0}} = 1$$

$$\therefore \quad \beta^{\log \frac{\beta_0}{\alpha_0}} \gamma^{\log \frac{\alpha_0}{\beta_0}} = 1$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\log \frac{\beta_0}{\alpha_0}} = 1$$

$$\therefore \quad \beta^{\log \frac{\beta_0}{\alpha_0}} - \gamma^{\log \frac{\beta_0}{\alpha_0}} = 0$$

$$\therefore \quad (\beta-\gamma)\left[\beta^{\log\frac{\beta_0}{\alpha_0}-1}+\beta^{\log\frac{\beta_0}{\alpha_0}-2}\gamma+\cdots\cdots+\cdots\right]=0$$

$$\therefore \quad \beta-\gamma=0.$$

Din această relaţie, rezultă că locul potenţialelor punctului M se compune din mediana AA′ şi o altă curbă.

Permutantele punctului M, se bucură de aceeaşi proprietate.

FOCŞENEANU I. MIHAIL.
Şc. militară de artilerie, Timişoara.

22. *Problema schimbării axelor de coordonate.* Această problemă se tratează, de obiceiu, împărţind-o în două probleme. Se caută întâi formulele de transformare când se face numai translaţia axelor, apoi formulele de transformare pentru cazul când se rotesc axele păstrând origina fixă, sau invers. Cu chipul acesta, se trece dela un sistem de coordonate $(x, y)$, la un sistem final $(x'', y'')$, cu ajutorul unui sistem intermediar $(x', y')$. Nu văd niciun inconvenient să se treacă direct la formulele definitive. Pentru aceasta, este destul să se cunoască bine teorema proecţiilor şi să se ţină seama de semne. Fie $xOy$, $x'O'y'$ cele 2 sisteme de axe, OAM şi O′BM schemele de coordonate respectiv în cele 2 sisteme. Axa $O'x'$ face cu $Ox$ unghiul $\theta$, iar coordonatele lui O′ în sistemul $xOy$ sunt $(\alpha, \beta)$. Considerând poligonul închis OAMBO′O, teorema proecţiilor dă

$$(1) \quad pr(OA)+pr(AM)+pr(MB)+pr(BO')+pr(O'O)=0.$$

Urmărind figura şi ţinând seamă de semne, se găseşte că, dacă proecţia se face pe $Ox$, de exemplu, avem:

$$pr(OA)=x \quad ; \quad pr(AM)=0 \quad ; \quad pr(MB)=MB\cos(\pi/2+\theta)$$
$$=(-y')(-\sin\theta)=y'\sin\theta,$$

căci $$MB=-BM=y'.$$

Apoi, la fel:

$$pr(BO')=BO'\cos\theta=-x'\cos\theta \quad ; \quad pr(O'O)=NO=-ON=-\alpha.$$

Inlocuind în (1), se găseşte:

$$(2) \qquad x+y'\sin\theta-x'\cos\theta-\alpha=0.$$

Aceasta este formula de transformare căutată, care se obișnuește a se da, sub forma cunoscută

$$x = \alpha + x'\cos\theta - y'\sin\theta.$$

In mod analog, proectând același contur pe axa $Oy$, se găsește

$$y = \beta + x'\sin\theta + x'\cos\theta.$$

Evident că se poate urmă aceeași cale pentru găsirea formulelor de transformare, în cazul când axele nu sunt perpendiculare.

Formula (2) este generală, oricare ar fi dispoziția figurei, căci formula (1), este generală. Singura subtilitate ar fi considerația semnelor segmentelor, care însă se întâlnește și în tratarea problemei descompuse.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

23. *Asupra unei teoreme de analiză.*

In «*Eléments d'Analyse mathématique*», par P. APPELL, la pag. 62 (deuxième édition), se enunță teorema:

«Să presupunem că $b$ ar fi superior lui $a$ și că pentru toate valorile lui $x$ cuprinse între $a$ și $b$, am avea

$$f(x) > g(x),$$

$f(x)$ putând fi egal cu $g(x)$, pentru anumite valori particulare izolate, ale lui $x$.

Avem deasemenea:

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema este însă adevărată numai când $f(x)$ și $g(x)$ sunt deasupra axei $x'Ox$, căci dacă curbele acestor funcțiuni sunt dedesupt, atunci trebue să avem:

$$|f(x)| > |g(x)|$$

pentruca teorema să rămână tot adevărată.

Aceasta se dovedește ușor, urmărind chiar demonstrația teoremei.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

24. *In formula lui* LEIBNITZ:

$$d^n(uv)=v(d^nu)+C_n^1 dv\, d^{n-1}u+\ldots+C_n^k d^kv\, d^{n-k}u+\ldots\ldots+(d^nv)u.$$

să punem

$$u=\sin x$$

$$v=\cos x \qquad \therefore \qquad uv=\tfrac{1}{2}\sin 2x.$$

Se observă că

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n}=\frac{d^n\frac{1}{2}\sin 2x}{dx^n}=2^{n-1}\sin\left[2x+n\frac{\pi}{2}\right].$$

Se mai ştie că

$$\frac{d^k\sin x}{dx^k}=\sin\left[x+k\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d^k\cos x}{dx^k}=\cos\left[x+k\frac{\pi}{2}\right].$$

Inlocuind în formula lui LEIBNITZ, rezultă:

$$2^{n-1}\sin\left[2x+n\frac{\pi}{2}\right]=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos\left[x+k\frac{\pi}{2}\right]\sin\left[x+(n-k)\frac{\pi}{2}\right].$$

Prin particularizări, de ex. făcând $x=0$, obţinem alte formule, ca

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos k\frac{\pi}{2}\sin(n-k)\frac{\pi}{2}=2^{n-1}\sin n\frac{\pi}{2}.$$

LEON WEISS.
Cl. VII R. „V. Alexandri", Galaţi

# CHESTIUNI DE EXAMEN

## FACULTATEA DE ŞTIINŢE, CLUJ.

*Seziunea Iunie 1924.*

### MATEMATICI GENERALE.

PROBA TEORETICĂ.

1° Să se studieze variaţiunea funcţiunei

$$y=\frac{3x^3}{x^2-3}.$$

determinând valorile maxime şi minime, precum şi punctul de intersecţie al asimptotei oblice cu tangenta dusă la curbă, în punctul corespunzător abscisei $x = 1$.

2°. Să se calculeze în grade, minute şi secunde, unghiul format de axa $Oz$ cu planul P, care trece prin punctele $(1, -2, 3)$ şi $(-5, 1, 2)$ şi este paralel cu dreapta determinată de ecuaţiile:

$$x = 2z - 3, \quad y = 4z + 1.$$

3°. Să se găsiască soluţiunea generală a ecuaţiei diferenţiale

$$2y'' - 3y' - 2y = 2x^2 - 27.$$

(22 iunie, ora 8).

PROBA PRACTICĂ.

Să se calculeze valoarea integralei definite

$$\int_2^3 \frac{2x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)^2}\, dx.$$

(22 iunie, ora 15).

## GEOMETRIA ANALITICĂ.

PROBA TEORETICĂ.

Se dau două axe perpendiculare $Ox$ şi $Oy$ şi punctul $A(0, a)$. 1°. Să se scrie ecuaţia generală a iperbolelor tangente în origină la bisectoarea unghiului $xOy$, trecând prin punctul A şi având axa $Ox$ ca direcţie asimptotică. 2°. Să se găsiască şi să se construiască locul centrelor acestor iperbole. 3°. Să se scrie ecuaţia asimptotei neparalele cu $Ox$ a uneia din iperbolele considerate. 4°. Să se arate, că dacă iperbola variază, prin fiecare punct al planului trec două asimptote de felul acesta. Să se caute locul punctelor unde aceste două asimptote sunt perpendiculare şi locul punctelor unde aceste două asimptote sunt confundate.

(28 iunie, ora 8)

PROBA PRACTICĂ.

Să se reprezinte curba

$$y^2(x - 1) = x^3 + 2x.$$

(28 iunie, ora 15).

## CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL (partea I).

PROBA TEORETICĂ.

1°. Să se demonstreze că funcţiunea $f(x) = (a + bx)^\mu$ verifică ecuaţia

$$(a + bx^2) f^{(m+2)}(x) + 2b(m - \mu + 1)x\, f^{(m+1)}(x) + b(m + 1)(m - 2\mu) f^{(m)}(x) = 0.$$

2°. Să se deducă valorile pe care le iau derivatele succesive ale funcţiuni $f(x)$, pentru $x = 0$.

3°. Să se aplice această metodă pentru dezvoltarea funcţiunii $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ în seria lui MACLAURIN.

4°. Să se stabiliască identitatea acestei dezvoltări cu dezvoltarea directă dată prin formula binomului.

(10 iunie, ora 8).

PROBA PRACTICĂ.

Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_1^8 \frac{x\sqrt[3]{x} - 10}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 5} \frac{dx}{x}.$$

(10 iunie, ora 15).

## CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL (partea II).

PROBA TEORETICĂ.

1°. Să se calculeze integrala generală a ecuaţiei diferenţiale

$$yy'' + 2y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2°. Să se determine curba integrală particulară care e tangentă la dreapta $y - x = 1$, în punctul A (0, 1).

(26 iunie, ora 8).

PROBA PRACTICĂ.

Să se calculeze volumul cuprins între suprafeţele

$$z = 0, \quad 3z = y^2, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

(26 iunie, ora 15).

## APLICAŢIILE GEOMETRICE ALE CALCULULUI INFINITEZIMAL.

PROBA TEORETICĂ.

Să se găsiască suprafeţele S reprezentate printr'o ecuaţie de forma

$$z = f(x)\varphi(y),$$

aşă ca una din direcţiile principale, corespunzătoare unui punct oarecare de pe suprafaţă, să fie paralelă cu planul $xOy$.

Să se determine liniile de curbură şi liniile asimptotice ale suprafeţei S.

(13 iunie, ora 8).

PROBA PRACTICĂ.

Să se determine planul osculator şi raza de curbură a curbei

$$x^3 = 3y, \qquad 2xz = 1.$$

(13 iunie, ora 15).

## TEORIA FUNCŢIUNILOR.

PROBA TEORETICĂ.

1) Să se determine constantele A, B, C, aşà ca funcţiunea

$$\frac{1}{z^2 \sin z} + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3}$$

să fie olomorfă în domeniul originei.

2) Valoarea integralei

$$U_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^n e^{z-x}}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

luată dealungul unui cerc cu centrul în origină şi de rază $R > |x|$, este un polinom în $x$. Să se arate, luând pe R destul de mare, că dacă $|\alpha| < 1$, avem

$$\sum \alpha^n U_n(x) = \frac{1}{1-\alpha} e^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}}$$

(12 iunie, ora 8).

PROBA PRACTICĂ.

Să se calculeze integrala

$$\int_C \frac{dz}{z^5 - 1},$$

dealungul cercului C, de centru (1, 1) şi trecând prin origină.

(12 iunie, ora 15).

# BIBLIOGRAFIE.

**Journal de Mathématiques élémentaires,** de H. Vuibert. Anul 49. No. 2 şi 3 Octomvrie—Noemvrie 1924. Paris.

**Foaia matematică.** Anul I. No. 11. Noemvrie 1924. Chişinău. Desvoltarea unui determinant cu generalizarea unor probleme cunoscute, de L. Weiss.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul IV. No. 9. Noemvrie 1924. Timişoara. Identităţi iraţionale, de V. ALAGI.

**Viaţa şcolară.** Revista Societăţii de lectură „D. TICHINDEAL" şi a cercului matematic T. LALESCU Anul I. No. 1. Noemvrie 1924. Timişoara. Abonamentul pe an 50 lei. Redacţia şi administraţia la Liceul C. Diaconovici-Loga. Conţine şi articole de matematici, recreaţii, probleme, note. Combinări şi aranjări cu repetiţie şi permutări cu elente egale, de I. ORBONAS.

G. DEMETRESCU. *Distanţele cereşti şi structura universului.* Apărută în *„Biblioteca manualelor ştiinţifice"* de sub îngrijirea D-lui OCTAV ONICESCU. Editată de „Cultura Naţională". Bucureşti 1924.

TRAIAN LALESCU. *Calculul algebric. Polinoame. Fracţiuni raţionale.* Apărută în *„Biblioteca manualelor ştiinţifice"* de sub îngrijirea D-lui OCTAV ONICESCU. Editată de „Cultura Naţională". Bucureşti 1924.

## CERERI.

118. Se primesc dese ori cereri de a se indică unde se pot găsi colecţiunile complete de reviste de matematici şi operele complete ale marilor matematiciani, la noi în ţară. Instituţiunile şi particularii, cari voiesc a aduce la cunoştinţă că posedă asemenea colecţiuni, pot răspunde prin *Gazeta Matematică* la această cerere.

I. IONESCU.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2096. *Se dau dreptele:*

$$(D)\quad y-\alpha x-1+\alpha+\varepsilon\sqrt{1+\alpha^2}=0,$$

$$(D')\quad y-\beta x+1-\beta+\varepsilon'\sqrt{1+\beta^2}=0,$$

*unde* $[\varepsilon=\pm\varepsilon';\ \varepsilon.\varepsilon'=\pm 1]$ *şi care intersectează respectiv în* A *şi* B, *şi* A' *şi* B' *cercurile:*

$$(C)\quad x^2+y^2-2x-2y=0,$$

$$(C')\quad x^2+y^2+2x+2y=0.$$

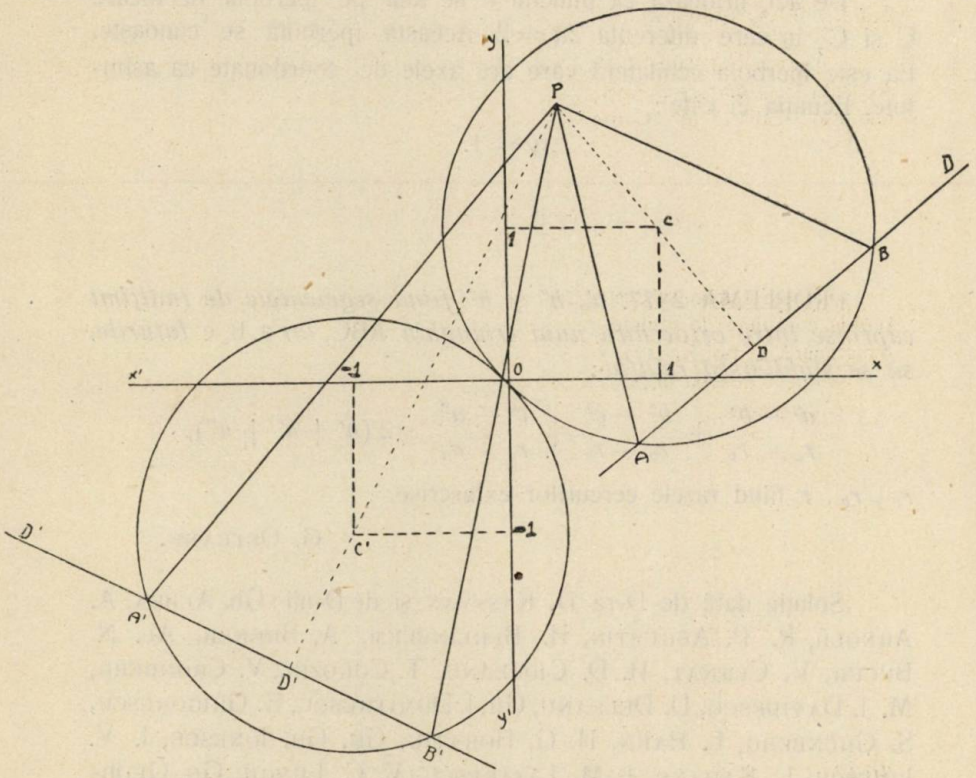
*Din* A *şi* B *deoparte,* A' *şi* B' *dealta, se duc drepte respectiv egal înclinate pe* AB *şi* A'B', *astfel ca ele să se întâlnească într'un punct comun* P. *Să se afle locul punctului* P,

*astfel ca diferența suprafețelor* PAB *și* PA'B' *să fie constant egală cu 2, când* $\alpha$ *și* $\beta$ *variază.*

G. BORNEANU.

Soluție dată de D-nii: E. GRIGORESCU, N. KAUFMANN și CONST. ROTARU.

Centrele C și C' ale celor două cercuri au respectiv coordonatele 1, 1 și —1, —1. Distanța primului la dreapta D, este dată de relația:




$$d = \frac{y_0 - \alpha x_0 - 1 + \alpha + \varepsilon\sqrt{1+\alpha^2}}{\pm\sqrt{1+\alpha^2}} = \pm 1.$$

Ea este independentă de $\alpha$, deci când $\alpha$ variază, dreapta D înfășură cercul de centru C și de rază egală cu 1. La fel, se deduce că dreapta D' înfășură cercul de centru C și de rază 1, când $\beta$ variază.

Fie, pentru o valoare oarecare a lui $\alpha$, D mijlocul lui AB. Din triunghiul dreptunghiu CDA, se deduce că DA = 1, — căci raza

cercului C este $\sqrt{2}$ — deci baza triunghiului PAB este 2. Prin urmare, suprafaţa sa va fi măsurată de acelaş număr care măsoară înălţimea PD. Analog, suprafaţa PA B' va fi dată de numărul care măsoară pe PD'. Diferenţa acestor suprafeţe va fi reprezentată prin numărul care măsoară diferenţa:

$$PD-PD'=PC+CD-PC'-CD'=PC-PC' \quad \therefore \; |PC-PC'|=2.$$

De aci, urmează că punctul P se află pe iperbola de focare C şi C', în care diferenţa $2a=2$. Această iperbolă se cunoaşte. Ea este iperbola echilateră care are axele de coordonate ca asimtote. Ecuaţia ei este:

$$xy=1.$$

---

PROBLEMA 2377. *$h'$, $h''$ şi $h'''$ fiind segmentele de înălţimi cuprinse între ortocentru unui triunghiu* ABC, *iar* a, b, c *laturile, să se stabiliască relaţia*:

$$\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b}+\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c}+\frac{c^2-a^2}{r_c-r_a}=2(h'+h''+h'''),$$

$r_a$, $r_b$, $r_c$ fiind razele cercurilor exînscrise.

G. Olteanu.

Soluţie dată de D-ra D. Kassvan şi de D-nii: Gh. Aldea, A. Arnold, R. P. Augustin, H. Berlinblum, A. Brener, Al. N. Bucur, V. Cernat, H. D. Cioceanu, T. Corozel, V. Cronberg, M. I. Davidescu, D. Deleanu, Gh. I. Dumitrescu, E. Grigorescu, S. Grünberg, L. Hahn, H. G. Horaţiu, Gh. Gh. Ionescu, I. V. Ionescu, L. Kahane, I. M. Lăzărescu, V. C. Lungu, Gh. Georgescu, Al. Florescu, V. Neicu, V. P. Negulescu, St. Niculescu, Dorin Niculescu, Gh. T. Rizescu, N. N. Maxim, P. Melas, H. Noech, O. Orănescu, I. Pantoleon, N. Neamţu, C. H. Nicolau, A. Popovici, E. V. Protopopescu, M. Reinhorn, G. Rosenberg, A. Th. Popescu, V. Pintilescu, R. R. Petcu, D. A. Sburlan, I. Silbermann, I. Suchăr, H. Schapira, A. D. Triandaf, V. Warenberg, A. I. Vellan şi I. Zaidman.

Se ştie că avem:

$$h' = 2R\cos A, \quad r_a = 4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C, \quad a = 2R\sin A,$$

$$h'' = 2R\cos B, \quad r_b = 4R\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C, \quad b = 2R\sin B,$$

$$h''' = 2R\cos C, \quad r_c = 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C, \quad c = 2R\sin C,$$

R fiind raza cercului circumscris, şi A, B, C unghiurile triunghiului.

Astfel fiind avem:

$$\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b} = \frac{R(\sin^2 A-\sin^2 B)}{\cos\tfrac{1}{2}C(\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B)} = R\frac{\sin(A+B)\sin(A+B)}{\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(A-B)},$$

sau, toate calculele făcute:

$$(a^2-b^2)/(r_a-r_b) = 2R(\cos A+\cos B),$$

de unde deducem:

$$\sum\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b} = 4R(\cos A+\cos B+\cos C) = 2(h'+h''+h''').$$

---

PROBLEMA 2864. *Se dă şirul:*

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots$$

*şi seria:*

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots$$

*şi se întreabă care este natura seriei:*

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{2}{5.6}+\frac{3}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\frac{2}{8.9}+\ldots\ldots$$

B. Ig. Baidaff.

I. *Soluţie şi generalizare* dată de D-l N. Ciorănescu.

Fie problema mai generală:

Se dă şirul:

(1) $\qquad S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \ldots\ldots,\ S_n$

şi seria:

(2) $\qquad U_1+U_2+U_3+U_4+\ldots\ldots+U_n+\ldots$

şi se întreabă care este natura seriei:

(3) $U_1S_1 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_1 + U_5S_2 + U_6S_3 + U_7S_1 + \cdots$

dacă prima serie este convergentă.

Insemn, în seria (3), termenii săi astfel:

$V_1 = U_1S_1$, $V_2 = U_2S_1 + U_3S_2$, $V_3 = U_4S_1 + U_5S_2 + U_6S_3$,

$V_4 = U_7S_1 + U_8S_2 + U_9S_3 + U_{10}S_4$, etc.

Se vede că, în general, avem:

$$V_n = U_{\frac{n(n-1)}{2}+1}\, S_1 + U_{\frac{n(n-1)}{2}+2}\, S_2 + \cdots + U_{\frac{n(n+1)}{2}}\, S_n .$$

Acesta este termenul general al seriei (3). Dacă presupunem şirul $S_n$ crescător, atunci avem evident:

$$V_n < n.\, S_n .\, U_{\frac{n(n-1)}{2}+1} ,$$

căci $V_n$ are $n$ termeni şi fiecare este mai mic decât $S_n\, U_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$.

Deci natura seriei $\Sigma V_n$ depinde de acea a seriei $\Sigma_n . S_n . U_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$, care se poate stabili uşor.

In general, putem spune că dacă $U_n = 1/S_n - 1/S_{n+1}$, seria $\Sigma V_n$ este şi ea convergentă.

In cazul problemei 2864, avem: $S_n = n$, $U_n = 1/n\,(n+1)$, deci:

$$V_n < n^2 \frac{1}{\left[\frac{n(n-1)}{2} + 1\right] \cdot \left[\frac{n(n-1)}{2} + 2\right]},$$

$$\therefore\ V_n < \frac{4n^2}{(n^2-n+2)(n^2-n+4)}.$$

Prin urmare, seria $\Sigma V_n$ este convergentă, căci şi seria:

$$\sum \frac{4n^2}{(n^2-n+2)(n^2-n+4)}$$

este convergentă, gradul numitorului fiind cu 2 mai mare decât gradul numărătorului.

II. Soluţie dată de D-l N. Georgescu-Roegen:

Descompunând seria dată S în mai multe serii: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$, avem: $S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$, unde:

$$S_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \cdots\cdots$$

$$S_2 = \quad + \frac{1}{3.4} \quad + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} \quad + \frac{1}{8.9} + \cdots$$

$$S_3 = \quad + \frac{1}{6.7} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Dar $S_1 \leqslant 1$, iar celelalte se deduc din $S_1$ prin neglijarea unor termeni. Pentru a formă seria $S_n$ trebue să scoatem — în afară de alţi termeni — primii termeni din $S_1$ pânăla termenul care în $S$ are pentru prima oară pe $n$ la numitor. Dar acesta este termenul de rangul $(1+2+3+\cdots+n)$, adică de rangul $n(n+1)/2$ al seriei $S_1$, aşà că putem scrie:

$$S_n < S_1 - \left\{ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]} \right\},$$

$$\therefore S_n < \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

şi, prin urmare:

$$S < \frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \cdots\cdots,$$

$$\therefore \quad S < 2.$$

Deci seria dată e convergentă şi nu poate trece peste 2.

*Notă.* Alte soluţiuni bune s'au mai primit dela D-nii: I. S. Antoniu, Al. Balaban (Tecuci), D. Blumenfeld, V. Dan, I. B. Florescu, C. I. Georgescu, Fl. E. Georgescu, I. Iliescu, P. Katz, Gh. Mărculescu, P. Miresçu, A. Th. Nicolau, C. Rovinaru, D. Schileru, C. Schönfeld, I. M. Şerbănescu, A. Teleman şi M. D. Vasilescu.

In ultimul moment, s'a mai primit o soluţie şi o generalizare dela D-l C. Berdan.

Căpit. Gr. Z.

PROBLEMA 3111. *Să se determine numărul prim* a, *astfel în cât:*

$$\varphi_{a+2}(a^{\alpha}) = 1,$$

*unde* $\varphi_1(l) = \varphi(l)$, *indicatorul lui* l; $\varphi_2(l) = \varphi[\varphi_1(l)]$, *etc....adică* $\varphi i(l)$ *este indicatorul de ordinul* i *al lui* l.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: N. BOTEA (Lc. Cantemir-Vodă), I. IONESCU-BREZUICA (Lic. Caracal), O. POPEA (cl. VII Chişinău), B. REINHORN (Lic. Cantemir), M. ŞTEFAN (Lic. Constanţa), ALEX. TAUBER (Botoşani), I. C. VASILIU (M-rea Dealului) şi S. WEISS (Galaţi) *).

Din condiţia dată în problemă, se deduce lesne că:

$$\alpha = a + 2$$

şi

$$\varphi_{a+1}(a^{a+2}) = 2,$$

$$\varphi_a(a^{a+2}) = 4 \text{ sau } 6.$$

Insă, în G. M. XXVII, pag. 67 se stabileşte că: „*Numerele care au pe* 4 *şi* 6 *indicator, nu pot avea factori primi mai mari ca* 7".

Rezultă deci că:

$$a \leqslant 7, \quad \text{sau} \quad a = 2, 3, 5, 7.$$

Dintre aceştia, numai 2 verifică condiţia din enunţ, deci $a = 2$ este soluţia problemei şi, în adevăr, avem:

$$\varphi_4(2^4) = 1.$$

*Observaţie.* Odată stabilindu-se că:

$$\alpha = a + 2,$$

se observă că indicatorul de ordinul $i$ al lui $a^{a+2}$, cuprinzând factorul $a^{a+2-i}$, va cuprinde şi pe $(a - 1)$, deci avem:

$$\varphi_{a+2}(a^{a+2}) = a^{a+2-i} \cdot (a - 1) \cdot Q = 1,$$

urmează că:

*) Redijarea este făcută după soluţia D-lui O. POPEA.

$$a = 2, \qquad a - 1 = 1 \qquad \text{şi} \qquad Q = 1,$$

prin urmare, soluţia problemei este $a = 2$.

Altă soluţie, făcând mai multe încercări, au dat D-nii: M. ADAM (Constanţa), L. WEISS (Galaţi), N. ARCADIAN (Caracal).

*Generalizare* dată de D-l ALEXANDRU TAUBER.

Fie în general:

$$\varphi_{a+\beta}(a^{\alpha}) = 1.$$

In *nota 62*, din vol. XXIX G. M., s'a arătat că, dacă indicatorul de ordinul $n$ al lui N este $1$ şi dacă $a, b, c, \ldots$ sunt factorii primi ai lui N, atunci avem:

$$N \leqslant \left(\frac{a \,.\, b \,.\, c \ldots}{(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}\right)^{n}.$$

Deci, în cazul nostru, vom avea:

$$a^{\alpha} \leqslant \left(\frac{a}{a-1}\right)^{a+\beta}.$$

Cum însă:

$$\varphi_n(a^n) = a^{\alpha-n}\, k,$$

$k$ fiind întreg şi cum: $\varphi_n(a^{\alpha}) = 1$, rezultă că:

$$\alpha - n = 0 \quad , \quad \text{deci} \quad \alpha = a + \beta.$$

Atunci:

$$a^{a+\beta} \leqslant \frac{a^{a+\beta}}{(a-1)^{a+\beta}} \quad , \text{sau } (a-1)^{a+\beta} \leqslant 1.$$

Rezultă dar, imediat, că: $a = 2$ şi, în acest caz, avem:

$$\varphi_{2+\beta}(2^{\beta+2}) = 1.$$

Pentru $\beta = 2$, suntem în cazul problemei 3111.

*Notă.* Problema a fost propusă sub forma:

$$\varphi_{\alpha+2}(a^{\alpha}) = 1,$$

la publicarea ei însă, $\alpha$ a fost înlocuit cu $a$.

Iată şi soluţia problemei aşà cum am intenţionat să fie publicată:

Observăm că:

$$\varphi_{\alpha}(a^{\alpha}) = (a-1)\,\varphi[(a-1)b_{\alpha}],$$

$b_{\alpha}$ fiind o cantitate întreagă.

$$\varphi_{\alpha+1}(a^{\alpha}) = \varphi\,[(a-1)\,b_{\alpha+1}]$$

$$\varphi\,[\varphi\,[(a-1)\,b_{\alpha+1}]] = 1.$$

De aici, deducem că:

$$\varphi[(a-1)b_{\alpha+1}] = 2,$$

de unde:

$$(a-1)b_{\alpha+1} = 3 \text{ sau } 4.$$

Cum avem:

$$\varphi_{\alpha+1}(a^{\alpha}) = \varphi\,[(a-1)\,b_{\alpha+1}],$$

urmează că:

$$\varphi_{\alpha}(a^{\alpha}) = 3 \text{ sau } 4.$$

Dar 3 nu poate fi indicator, căci este impar şi atunci:

$$\varphi_{\alpha}(a^{\alpha}) = 4,$$

sau:

$$(a-1)\,\varphi\,[(a-1)\,b_{\alpha}] = 4.$$

Dar $a$ fiind prim, urmează că va puteà aveà valorile: 2, 3 şi 5.
Pentru $a = 2$, avem însă

$$\varphi_{\alpha}(2^{\alpha}) = 1,$$

deci nu corespunde problemei.
Pentru $a = 3$, avem:

$$\varphi_{\alpha+1}(3^{\alpha}) = 1.$$

Rezultă că numai $a = 5$ ar puteà fi o soluţie a problemei şi, în adevăr, avem:

$$\varphi_{\alpha+2}(5^{\alpha}) = 1.$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.

---

PROBLEMA 3121. *Se cer fracţiile cărora micşorându-le numărătorul şi numitorul cu acelaş număr, găsim o putere a acelei fracţii.*

E. ŞTEFĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: M. ADAM, ŞTEFAN MARIN (Lc. Constanţa); D. SMĂRĂNDESCU (Lc. Caracal) şi T. ANGELESCU (Lc. Giurgiu).

Conform enunţului, trebuie să avem:

(1) $A/B = k$ ; (2) $(A-x)/(B-x) = k^n$,

A şi B fiind numere întregi sau fracţionare, pozitive sau negative, ce se caută în funcţie de $k$, $x$ şi $n$.

Rezolvind (1) şi (2), găsim că fracţiile cerute sunt acelea ale căror termeni sunt:

$$(3)\quad A = x\frac{k^n - 1}{k^{n-1} - 1}\quad ;\quad (4)\quad B = x\frac{k^n - 1}{k^n - k}.$$

Dând lui $x$, $k$, $n$ diferite valori, se pot obţine o infinitate de fracţii A/B, care să răspundă problemei. După cum se vede din soluţiile (3) şi (4), A şi B pot fi şi fracţionari; de altfel nici enunţul nu face vre-o restricţie.

*Observaţiuni.* 1°. Au rezolvat problema numai pentru $n = 2$, D-nii: G. David; C. I. Georgescu; R. Mihăilescu; G. Tailer; O. Popea şi P. Ionescu.

2°. D-nii: D. Mitescu; G. Stroescu şi I. C. Vasiliu au căutat valoarea lui $x$ în funcţie de $a, b, n$.

Gh. B.

---

PROBLEMA 3128. *Să se calculeze determinantul*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_n^1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{m+p-1}^1 & C_{n+p+1}^1 & \dots & C_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{m-1} & C_{n+1}^{m-1} & \dots & C_{n+p-1}^{m-1} & C_{n+p+1}^{m-1} & \dots & C_{m+m}^{m-1} \end{vmatrix}$$

*unde* $C_n^m$ *este simbolul combinărilor.*

Th. Angheluţă.

Să însemnăm cu D determinantul căutat. Se observă că D este minorul relativ la elementul $C_{n+p}^m$ al determinantului cunoscut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ C_n^1 & C_{n+p}^1 & \dots & C_{n+p}^1 & \dots & C_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^m & C_{n+1}^m & \dots & C_{n+p}^m & \dots & C_{n+m}^1 \end{vmatrix}$$

şi a cărei valoare este 1.

Suntem astfel conduşi, pentru a calculà pe D, să considerăm următorul determinant auxiliar de ordinul $m+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ C_n^1 & C_{n+1}^1 \dots & & C_{n+p}^1 \dots & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{m-1} & C_{n+1}^{m-1} \dots & & C_{n+p}^{m-1} \dots & & C_{n+m}^{m-1} \\ a_0 & a_1 & \dots & a_p & \dots & a_m \end{vmatrix}$$

unde $a_0, a_1, \dots a_p, \dots a_m$, sunt cantităţi arbitrare.

Determinantul $\Delta$ este o formă liniară, în raport cu aceste cantităţi. Deci vom aveà:

$$\Delta = a_0 A_0 + a_1 A_1 + \dots + a_p A_p + \dots + a_m A_m.$$

Se vede că avem:

$$A_p = (-1)^{p+m} D.$$

Deci să calculăm pe $\Delta$. Pentru aceasta, vom urmà procedeul cunoscut. Lăsăm prima coloană neschimbată, iar în loc de celelalte, vom pune diferenţa între coloana considerată şi cea precedentă. Obţinem astfel:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ C_n^1 & C_{n+1}^1 \dots & & C_{n+p}^1 \dots & & C_{n+m-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{m-2} & C_{n+1}^{m-2} \dots & & C_{n+p}^{m-2} \dots & & C_{n+m-1}^{m-2} \\ \Delta a_0 & \Delta a_1 & \dots & \Delta a_p & \dots & \Delta a_{m-1} \end{vmatrix}$$

unde am pus în general

$$\Delta a_i = a_{i+1} - a_i .$$

Acestea sunt ceeace se numesc *primele diferenţe* ale cantităţilor $a_0, a_1, \dots a_m$.

Aplicând aceeaşi reducere încă o dată, avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_n^1 & C_{n+1}^1 \dots & & C_{n+m-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{m-3} & C_{n+1}^{m-3} \dots & & C_{n+m-2}^{m-3} \\ \Delta^2 a_0 & \Delta^2 a_1 & \dots & \Delta^2 a_{m-2} \end{vmatrix}$$

unde

$$\Delta^2 a_i = \Delta a_{i+1} - \Delta a_i ,$$

sunt diferențele de ordinul al doilea. Repetând această reducere de $(m-1)$ ori, obținem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta_{a_0}^{m-1} & \Delta_{a_1}^{m-1} \end{vmatrix}$$

Prin urmare, avem:

$$\Delta = \Delta^m a_0.$$

Dar se știe și se verifică ușor că avem:

$$\Delta = \Delta^m a_0 = a_m - C_m^1 a_{m-1} + \cdots + (-1)^{m-p} C_m^{m-p} a_p + \cdots + (-1)^m a_0.$$

Iată dar care este expresiunea determinantului auxiliar $\Delta$. Rezultă că avem

$$A_p = (-1)^{m-p} C_m^{m-p} = (-1)^{m+p} D$$

$$\therefore \quad D = C_m^{m-p} = C_m^p.$$

Au rezolvat problema D-nii: Ovidiu Popea, Tib. Popoviciu, Leon Weiss.

---

PROBLEMA 3170. *Să se găsiască locul geometric al punctelor de unde o parabolă dată este văzută sub un unghiu dat.*

D. V. Ionescu.

Fie P un punct de unde ducând tangentele PA și PB la parabola (C), unghiul APB e constant; $a$, $b$ intersecțiile dreptelor PA și PB cu tangenta în vârful O al parabolei. Observăm că:

$$\sphericalangle\, aFb = \tfrac{1}{2} \sphericalangle\, AFB = \pi - \sphericalangle\, APB.$$

Din aceste egalități, rezultă că punctul P poate fi definit în trei feluri:

1°. Din punctul P, parabola (C) e văzută sub un unghiu dat.

2°. Un unghiu AFB, de mărime constantă, se rotește în jurul focarului F al unei parabole (C). P este intersecția tangentelor în A și B la parabolă.

3°. Un unghiu $aFb$, de mărime constantă, se rotește în jurul unui punct fix F, laturile sale tăind o dreaptă fixă $Oy$ în $a$ și $b$. P este intersecția perpendicularelor în $a$ și $b$, respectiv pe $aF$ și $bF$.

Vom căutà locul lui P, servindu-ne de definiția 3°.

Perpendicularele pe $Fa$ și $Fb$ întâlnesc o dreaptă oarecare $\Delta$ în A' și B'. Când unghiul $aFb$ se rotește în jurul lui F, punctele A' și B' se corespund omografic. Punctele duble ale acestei omografii sunt punctele locului, situate pe $\Delta$.

$\Delta$ tăind locul lui P în două puncte, rezultă că locul lui P este o conică ($\Gamma$).

Când $Fa' \parallel Oy$ punctul P' este la infinit în direcția $\omega b' \perp Fb'$, iar când $Fb'' \parallel Oy$, punctul P'' e la infinit în direcția $\omega a'' \perp Fa''$. Rezultă că conica ($\Gamma$) este o iperbolă, asimptotele ei făcând un unghiu egal cu $2 \sphericalangle aFb$.

Revenind la unghiul APB, vedem deci că *locul geometric al punctelor, de unde o parabolă este văzută sub un unghiu dat* $\alpha$, *este o iperbolă, având unghiul asimptotelor egal cu* $2(\pi - \alpha)$.

Când $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, atunci $\sphericalangle AFB = \frac{1}{2}\pi$, locul lui P este o iperbolă echilateră (cazul problemei dela concursul «Gazetei Matematice» 1923).

Când $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, iperbola se reduce la o dreaptă. E cazul teoremei: din punctele directoarei unei parabole, parabola este văzută sub un unghiu dat.

D. V. I.

Au rezolvat analiticește problema, D-nii: Gh. L. Cosmovici (Liceul Internat, Iași), Epure T. Ștefan (Buzău), Edgar C. Russu (Liceul Internat, Iași), Alexandru Tauber (Liceul Laurian, Botoșani).

O generalizare a problemei a fost publicată de D-l Colonel Gh. Buicliu în «Gazeta Matematică», Vol. XXVII pag. 313.

---

PROBLEMA 3201. *Care sunt perechile de fracții cu numărătorii și numitorii mai mici decât 10, al căror produs se poate obține împărțind suma numărătorilor prin suma numitorilor?*

I. Ionescu.

Vom face, mai întâiu, câtevà observațiuni:

1) *Una din fracții nu poate fi egală cu 1, fără ca și cealaltă să fie egală cu 1.*

Să presupunem că avem:

$$\frac{m}{m} \times \frac{a}{b} = \frac{m+a}{m+b}.$$

De aci, se scoate:

$$\frac{a}{b} = \frac{m+a}{m+b} = \frac{m}{m} = 1.$$

Deci $a = b$; deci *orice grupă de două fracţii echivalente cu 1, formează o soluţie a problemei.* Cu fracţiile 1/1, 2/2,... 9/9, luate cu ele însăşi, sau cu altele, în toate modurile, avem 45 soluţii.

Vom presupune, de aci înainte, că fracţiile sunt diferite de 1.

2) *O fracţie şi inversa ei constituiesc o soluţie.*

Avem, în adevăr:

$$\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{m+n}{n+m},$$

căci ambele părţi ale egalităţii se reduc la 1. Cu numerele 1, 2, 3,...., 9 putem face 36 fracţii mai mici ca 1, la care alăturându-le inversele lor, găsim 36 soluţii ale problemei.

Vom exclude, de aci înainte, asemenea soluţii, adică vom presupune că numărătorul unei fracţii diferă de numitorul celeilalte. De altfel, se poate demonstră că, dacă numărătorul unei fracţii este egal cu numitorul celeilalte, atunci şi numărătorul celei de a doua este egal cu numitorul celei dintâiu. In adevăr, fie:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{a} = \frac{a+c}{b+a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{a} = 1,$$

de unde rezultă $b = c$.

3) *Dacă avem o soluţie, putem găsi altele, înmulţind cei patru termeni ai celor două fracţii cu acelaş număr.*

In adevăr, din relaţia:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c+a}{d+b}, \qquad 1)$$

deducem imediat:

$$\frac{ma}{mb} \times \frac{mc}{md} = \frac{mc+ma}{mb+md}.$$

4) *Având o soluţie, găsim alta, inversând fracţiile.*

In adevăr, din (1) scoatem imediat:

$$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b+d}{a+c}.$$

Putem dar presupune, în cele ce urmează, că prima fracție $a/b$ este mai mică decât 1, căci altfel ajungem la acelaș rezultat inversând ambele fracții. Vom presupune dar $a < b$.

5) *Dacă o fracție este mai mică decât 1, cealaltă va fi mai mare decât 1.*

Dacă la egalitatea (1) gonim numitorii și aranjăm, obținem:

$$cd(b - a) = ab(c - d). \tag{2}$$

După ipoteza făcută la (4), prima paranteză este pozitivă. Deci și parenteza din partea a doua a egalității va fi pozitivă, adică $c > d$ și, prin urmare, fracția $c/d$ este mai mare decât 1, pe când $a/b$ este mai mică decât 1. Deci, vom presupune, în cercetările noastre, $a < b$ și $c > d$.

Cu aceste observațiuni, trecem la găsirea celorlalte soluții.

Relația (2) se poate pune sub forma:

$$bc(a - d) = ad(b - c). \tag{3}$$

Vom presupune $a > d$ și deci $b > c$, căci altfel, schimbând fracțiile între ele și inversându-le, dăm peste un asemenea caz. Rezolvind ecuația precedentă în raport cu $a$, avem:

$$a = \frac{bcd}{bc + cd - bd} = d + \frac{d^2(b - c)}{bc - (b - c)d}. \tag{4}$$

De oarece am presupus $a > d$ și deci $b > c$, reese că avem:

$$bc > (b - c)d \qquad \text{și} \qquad a \geqslant d + 1,$$

care ne dau:

$$\frac{bd}{b + d} < c \leqslant \frac{b(d + d^2)}{b + d + d^2}. \tag{5}$$

Dăm acum valori lui $d$ și găsim limite pentru $c$, ținând seamă că $c$ nu trece peste $b$. Valorile găsite trebuie să facă pe $a$ întreg, în relația (4).

*a)* $d = 1$. In acest caz, (5) devine:

$$b/(b + 1) < c \leqslant 2b/(b + 2).$$

Cum $b/(b + 2)$ este mai mic decât 1, ar eși $c < 2$, ceeace nu se poate, căci $c$ întrece pe $d$.

*b)* $d = 2$. In acest caz, (5) devine:

$$2b/(b + 2) < c \leqslant 6b/(b + 6).$$

Cum $6b/(b+6)$ este cel mult 54/15, iar $c$ întrece pe $d$, nu putem lua decât $c=3$. Relația (4), devine:

$$a=6b/(b+6)=6-36/(b+6).$$

Cum $b$ întrece pe $c$, nu putem lua decât $b=6$, pentru a face pe $a$ întreg. Găsim $a=3$ și, de aci, rezultă soluția 3/6 cu 3/2, care, prin inversare, ne mai dă soluția 6/3 cu 2/3.

*c)* $d=3$. In acest caz, (5) devine:

$$3b/(b+3)<c\leqslant 12b/(b+12).$$

Cum $12b/(b+12)$ este cel mult 108/21, reese că $c>d$ ar puteà fi 4 sau 5. In aceste cazuri, (4) ne dă:

$$a=12b/(b+12)=12-144/(b+12),$$

$$2a=30b/(2b+15)=15-225/(b+15).$$

In primul caz, nu putem lua decât $b=6$, care ne dă $a=4$. De aci, soluția 4/6 cu 4/3 și inversele acestora 6/4 cu 3/4. A doua nu dă $a$ întreg.

*d)* $d=4$. In acest caz, (5) devine:

$$4b/(b+4) \quad c \quad 20b/(b+20).$$

Cum $20b/(b+20)$ este cel mult 180/29, reese că am puteà lua $c=5$ sau $c=6$. In aceste cazuri, (4) ne dă:

$$a=20b/(b+20)=20-400/(b+20),$$

$$2a=24b/(2b+24)=12b/(b+12).$$

Cum $b$ este cel puțin 6 la prima și 7 la a doua, se vede că nu avem soluții întregi pentru $a$.

*e)* $d=5$. In acest caz, (5) devine:

$$5b/(b+5) \quad c \quad 30b/(b+30).$$

Cum $30b/(b+30)$ este cel mult 270/39, reese că am puteà lua $c=6$ sau $c=7$. In aceste cazuri, (4) ne dă:

$$a=30b/(b+30)=30-900/(b+30),$$

$$2a=70/(2b+35)=35-1225/(2b+35).$$

Cum $b$ este cel puțin 7 la prima și 8 la a doua, se vede că nu putem aveà pe $a$ întreg.

*f)* $d=6$. In acest caz, (5) devine:

$$6b/(b+6) \quad c \quad 42b/(b+42).$$

Cum $42b/(b+42)$ este cel mult 378/51, reese că $c$ nu poate fi decât 7. In acest caz, (4) devine:

$$a = 42b/(b+42) = 42 - 42^2/(b+42).$$

Cum $b$ nu poate fi decât 8 sau 9, se vede că $a$ nu poate fi întreg.

*g)* $d = 7$. In acest caz, nu am puteà lua decât $c = 8$ şi $b = 9$, care introduse în (4), nu dau $a$ întreg.

*h)* Nu putem lua $d$ mai mare ca 7, căci ar eşi $b$ peste 10.

Problema admite dar numai cele $45+36+2+2=85$ soluţii dejà găsite.

Chestiunea se poate generaliză pentru fracţiuni cu termenii oricum. Calculele sunt însă prea lungi.

EMIL ŞTEFĂNESCU.

Soluţiile de sub No. 1 şi 2 au fost găsite de D-nii: O. BRAESTER, I. C. VASILIU, P. I. IONESCU, C. N. POPESCU.

D-l O. BRAESTER a dat şi soluţiile de sub (*c*).

## EXERCIŢII

27. Care este numărul de două cifre egal cu îndoitul produsului cifrelor lui?

C. N. POPESCU.

R. Din $10z + u = 2uz$, se scoate că $z = u/2\,(u-5)$. Deci $u$ este pereche şi mai mare ca 5. Se găseşte că numărul căutat este 36.

28. Se cer numerele pentru care diferenţa dintre cubul şi patratul lor este un patrat.

G. TAILER.

R. Din $n^3 - n^2 = n^2\,(n-1)$, reese imediat că $(n-1)$ este un patrat. Deci soluţiile sunt date de patrate sporite cu 1.

29. Când $n^4 - 10n^3 + 15n^2 + 50n - 56$ se divide cu 1944?

E. ŞTEFĂNESCU.

R. Expresia dată este egală cu $(n-7)\,(n-4)\,(n-1)\,(n+2)$. Cum 1944 se divide cu 3, iar factorii se fac unul din altul adunând 3, reese că toţi se vor divide cu 3, şi deci produsul cu $3^5$. Scoţând acest factor din 1944 rămâne 8. Dar din patru multipli de 3 consecutivi, doi sunt perechi şi deci produsul acelora se divide cu $2 \times 4$.

30. Să se arate că, în orice triunghiu, avem relaţiunea:

$$\Sigma \frac{r^3}{(r-r_a)\,(r-r_b)\,(r-r_c)} = 1.$$

David M. Blumenfeld.

R. Dacă, în identitatea 28 cap. IV din „Culegere Prob. Algebră",

$\Sigma \frac{a_1^3}{(a_1-a_2)\,(a_1-a_3)\,(a_1-a_4)} = 1$, facem: $r=a_1, r_a=a_2, r_b=a_3$ şi $r_c=a_4$, avem relaţiunea propusă.

31. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{r_a}{p-c}+\frac{r_b}{p-a}+\frac{r_c}{p-b}=\frac{p}{r_a}+\frac{p}{r_b}+\frac{p}{r_c}.$$

Tr. N. Angelescu.

R. Se ţine seamă că: $p-a=s/r_a$ etc., $p/r_a=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A$ etc.

32. Să se arate că expresiunea:

$$E=\Sigma \frac{a}{\sin A}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\frac{r_a^2\cos A}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A},$$

este patrat perfect.

Paul I. Ionescu.

R. Folosim relaţiile: $S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$ şi

$$R=\frac{a}{2\sin A}\ ;\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\frac{r_a}{p};\ldots$$

Găsim $E=\frac{2Rp^2}{S}(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$.

Dar $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2S/R$ (Gazeta M. Vol. XXVIII Pag. 478).
Deci $E=4p^2$.

33. Să se demonstreze identitatea :

$$\frac{p}{r} = \sqrt{\frac{r_b + r_c}{r_a - r}} + \sqrt{\frac{r_c + r_a}{r_b - r}} + \sqrt{\frac{r_a + r_b}{r_c - r}},$$

$p$, $r$, $r_a$ , $r_b$ , $r_c$ fiind elemente obicinuite ale unui triunghiu.

C. I. Georgescu.

R. $r = 4R \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$

$r_a = 4R \sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C$, etc.,

$$\Sigma \sqrt{\frac{r_b + r_c}{r_a - r}} = \Sigma \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}A \,.\, \sin\frac{1}{2}(B + C)}{\sin\frac{1}{2}A \,.\, \cos\frac{1}{2}(B + C)}}$$

$$= \Sigma \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A$$

$$= \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{p}{r},$$

căci :

$$p = 4R \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C.$$

34. Să se demonstreze relaţia :

$$\frac{r^2 a}{b'^2 c'^2} + \frac{r^2 b}{c'^2 a'^2} + \frac{r^2 c}{a'^2 b'^2} = R\left(R - \frac{r}{2}\right),$$

$a', b', c'$ fiind laturile triunghiului format din unirea punctelor de contact ale cercului înscris într'un triunghiu ABC.

Ion Coşereanu.

R. Se găseşte uşor că :

$$a' = 2r \cos\tfrac{1}{2}A, \; b' = 2r \cos\tfrac{1}{2}B, \; c' = 2r \cos\tfrac{1}{2}C.$$

De asemenea, avem $da = ra \sin\frac{1}{2}A$ etc, $da$, $db$, $dc$ distanţele dela vârfurile triunghiului la centrele cercurile exinscrise.

Dar : $ra = 4R \sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C = 4R \, \frac{ra}{da} \cdot \frac{b'c'}{4r^2} = R \, \frac{rab'c'}{da}$ ,

sau $da = R\, b'c'$, asemenea $db = R\, a'c'$, $dc = R\, a'b'$.

Dar $$\Sigma \frac{r^2 a}{d^2 a} = \Sigma \sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{2R - r}{2R},$$

sau $$\Sigma \frac{r^2 a}{R^2 b'^2 c'^2} = \frac{2R - r}{2R},$$

sau, în sfârşit, $\Sigma \frac{r^2 a}{b'^2 c'^2} = R\left(R - \frac{r}{2}\right)$.

35. Să se demonstreze că integrala triplă:

$$\iiint [f(x)-f(y)][f(y)-f(z)][f(z)-f(x)]\,dx\,dy\,dz$$

extinsă la cubul mărginit de planele:

$$x=a \quad ; \quad y=a \quad ; \quad z=a$$
$$x=b \quad ; \quad y=b \quad ; \quad z=b$$

este nulă.

MIRON NICULESCU,

R. Se dezvoltă produsul şi se ţine seama că avem:

$$\iint_{(c)} [f(x)]^2 f(y)\,dx\,dy = \iint_{(c)} f(x)\,[f(y)]^2\,dx\,dy,$$

C fiind domeniul pătratului:

$$x=a \quad ; \quad y=a.$$
$$x=b \quad ; \quad y=b.$$

## PROBLEME PROPUSE

3212*). Care sunt patratele inferioare lui 10000, la care suma cifrelor diferă de produsul cifrelor cu un patrat.

G. TAILER.

3241. Există perechi de numere consecutive, pare sau impare, care să aibă acelaş indicator ?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

3242. Să se demonstreze neegalitatea:

$$2a^{n+1} > (a^2-2a+1)\,n^2+(a^2-1)\,n+2a.$$

E. ŞTEFĂNESCU.

3243. Să se demonstreze că dacă $p$ este un număr nepereche iar $n \neq 0$, atunci numărul

$$p^m\,2^n - 1$$

se divide prin $2^{n+2}$.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

*) Problema propusă cu No. 3212, la pagina 79 din „G. M.", anul curent, fiind publicată anterior, de către autorul ei, in „Foaia Matematică", vol. I, pag. 122, se anulează şi se inlocueşte cu prezenta. Ea erà identică — de altfel — cu problema publicată sub No. 2367 in „G. M"., vol. XXI.

3244. Să se găsiască locul ortopolului unei drepte fixe $\Delta$ în raport cu un triunghiu ABC, când latura BC e fixă, iar vârful A descrie o dreaptă $\Delta'$.

N. Botea.

3245. Două triunghiuri asemenea au laturile măsurate prin numere întregi. Raportul a două laturi omoloage poate fi ireductibil?

F. Negretzu.

3246. Ortopolurile unei drepte, în raport cu trei triunghiuri omotetice, având acelaş centru de omotetie, sunt colineare.

M. Focşeneanu.

3247. Să se rezolve ecuaţia:

$$\arcsin x + \operatorname{arctg} x = 0.$$

I. Ionescu.

3248. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{a^4}{x^4} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{a^3}{x^3} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = 0.$$

Mauriciu Ghelber.

3249. Insemnând cu $\sigma_p$ suma determinanţilor minori principali de ordinul $p$ ai unui determinant simetric de ordinul $n$ $(n > p)$, să se demostreze inegalitatea:

$$\sigma_p^2 - \sigma_{p-1} \cdot \sigma_{p+1} > 0.$$

E. Abason.

3250. Se dau expresiunile:

$$n_1 = px + qy + xy, \quad n_2 = qx + py + xy,$$

$p$, $q$ fiind constante reale.

Cum trebue să fie $x, y$ reali, pentru a avea

$$N_1^2 + N_2^2 - 2\alpha N_1 N_2 = 0,$$

unde

$$N_1 = \alpha n_1 + n_2$$
$$N_2 = \alpha n_2 + n_1,$$

iar $\alpha$ un parametru real. Considerând $x, y$ ca fiind coordonatele unui punct în plan, să se dea o reprezintare grafică a soluţiei.

I. St. Teodorescu.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Adam M.* (3182, 212, 22, 24, C); *Bernstein Max* (3222, 25, E); *Beschea G. N.* (E); *Bleiweis P.* (2980, E); *Botea G. N.* (3175, 212, 21, 31, 34); *Brüll M. L.* (2980, 3178, 222, 27); *Budișteanu Al.* (3155); *Căldăraru Leon* (3178, 217, 18, 27, R); *Cazacincu V.* (3212, 18, 22, 25, P); *Ciorănescu I. C.* (2222, 2861, 3115, 212, 25, 31, E, P); *Cohn Haim* (3172); *Cojoc Gh.* (3225); *Constantinescu Gh. I.* (3218); *Coșniță Virgil* (3155, 217, 25); *Diaconescu V. T.* (2929); *Dumitrescu M.* (R); *Gaiu G. Em.* (3172, 212, 25); *Gataiantu B.* (2929); *Georgescu I. I.* (3212, 22, 33); *Ghimicescu I. Gh.* (2972, 3172); *Ghițescu Virgil* (3225); *Giurumescu C.* (3217, 25); *Goldstein F.* (3165, 67, 72, 78, 224); *Iliescu St. Dima* (3091); *Iliescu Emilian* (3225); *Iliescu Mircea* (3225, 31, 33); *Ionescu I. Paul* (2298, 3017, 109, 231, 34, N); *Katz Leon* (3221, 25, P); *Katz Symon* (E, P); *Lăzărescu Fl. St.* (3085); *Manafu Valeriu* (3205, 12, 33); *Marcovici H.* (3172); *Mareș I. Gr.* (3218, 25); *Marin Ștefan* (3196, N, P, R); *Marinescu I. I.* (3202, 12, 22); *Marini P.* (3229); *Mihăilescu Șt. N.* (3222, 27); *Milculescu G. D.* (3212, 22, 25, 31, 33); *Mirescu Petre* (3215, 25); *Miu Ion* (3217, 25); *Mladenovici Al.* (3231); *Nestor G. D.* (3225); *Pătroianu I. M.* (3217, 22, 24, 25); *Păunescu D. Tr.* (3205, 25, 31); *Petrescu St. Al. Dan* (3225); *Pop Alex.* (3172, 231); *Popea O.* (3153, 96, 212, 17, 18, 21, 22, 24, 25); *Popescu Dorin* (2972, 3017); *Popescu Spirea* (3222, 25); *Popovici Th. I.* (3172, 217, 25); *Popoviciu Tib.* (P); *Roșu Al. Al.* (3212, 22, 31, 33, R); *Schächter Ide Arie* (3212); *Scächter M. O.* (3091, 205, P); *Segârceanu N.* (3212, 25, 33); *Simionescu D. Gh.* (3184, 95, 201, 05, 12, 22, 24, 25); *Stoica A.* (3225, 27, R); *Tailer G.* (3184, 221, 22, C); *Țânțăreanu P.* (3196, R); *Tudorache S.* (3217); *Udrisky Tr.* (3175); *Vasiliu G.* (P); *Vasiliu C. I.* (3085, 231, 34); *Vlădea Ion* (3218, 25); *Weiss S.* (3071, 184, 212, 22, 36).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1892, 948, 2038, 91, 116, 91, 222, 81, 89, 95, 332, 37, 43, 44, 46, 47, 54, 56, 58, 59, 77, 81, 83, 96, 97, 421, 31, 40, 575, 86, 91, 640, 43, 51, 61, 75, 83, 719, 73, 92, 838, 79, 906, 18, 31, 55, 71, 78, 86, 91, 3052, 62, 78, 84, 93, 100, 02, 04, 13, 26, 31, 36, 44, 47, 48, 52, 57, 58, 69, 70, 73, 74, 80, 82, 85, 87, 91, 92, 99, 203, 06, 07, 09, 10, 13, 16, 28, 37, 38 și 39, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

## Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

### 29 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

M 2524

Prof. Asociatiunea pentru Cultura și Literatura poporului Român din Sibiu

Biblioteca „ASTRA" — SIBIU —

# ZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

0 - MAR. 2011

ANUL XXX.

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1925.

SUMARUL

1. Asupra relaţiilor de recurenţă lineare, omogene şi cu coeficienţi constanţi . . . . . *A. Angelescu.*
2. Două triunghiuri importante . . . . . *M. Grünbaum.*
3. Note Matematice: 25—31.
4. Chestiuni de examen.
5. Recensii.
6. Bibliografii.
7. Cereri.
8. Probleme rezolvate: 1608, 3056, 3147, 3148, 3196, 3205, 3225, 3231.
9. Exerciţii: 36—42.
10. Probleme propuse: 3233, 3251—3260.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 30

74302

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà in conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu,* in schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli in ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci inainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile in consecinţă.

Nu se admite insă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 71, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 61, 95, 3005, 13, 19, 42, 45, 55, 69, 89, 90, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 90, 92, 94, 200, 08, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 32, 35, 38, 40, 41, 43, 45, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXX *SUPLIMENT* No. 5

## RECREAŢIUNI

1. **Problemă ciobănească.** Câte oi ai moşule?
— Patru cu lapte, cinci de toate şi cu berbecul şapte.
Aştept dela corespondenţi răspunsul precis.

G. B.

* * *

2. **Preţ mixt.** Cineva se duce să cumpere cărămizi şi cere preţul. I se răspunde:
— O cărămidă costă un leu şi o jumătate de cărămidă.
Care este preţul unei cărămizi, în lei numai?
Aştept răspunsul dela corespondenţi.

G. B.

* * *

3. **Numere şi misticism.** In scrierea „LOUIS LAMBERT" a lui HONORÉ DE BALZAC, găsim următoarele:
„*Trei* şi *şapte* sunt cele două numere mai mari spirituale.....
„*Trei* este *formula numerelor* create. El este semnul spiritual al creaţiei, după cum e semnul material al *cercului*. In adevăr, Dumnezeu nu a procedat decât prin *linii circulare*. *Linia dreaptă* este atributul *infinitului*; asemenea, omul care presimte *infinitul*, o reproduce în operele sale. *Doi* este numărul naşterii. *Trei* este numărul existenţei, care conţine generaţia şi produsul. Adăogaţi pe *patru* şi veţi avea pe *şapte* care este *formula cerului*. Dumnezeu este deasupra, este *unitatea*".

A. N. ANAGNOSTE.

* * *

4. EMINESCU şi FIBONACCI. Intr'o poezie, EMINESCU spune:

„Cu mâne zilele-ţi adaogi
Cu eri viaţa ta o scazi
Şi ai cu toate astea în faţă
Deapururi ziua cea de azi".

Dacă notăm $z_{n-1}$, $z_n$ şi $z_{n+1}$ trei zile consecutive, avem dar relaţia

$$z_z = z_{n+1} - z_{n-1},$$

$$z_{n+1} = z_{n-1} + z_n .$$

Aceasta însă nu este decât relaţia de recurenţă a şirului lui FIBONACCI.

M. ADAM.

* * *

5. **Matematică neaplicată.** Un profesor de fizică a dat elevilor săi următoarea problemă:
„Dacă temperatura la suprafaţa pământului este de 10°, la ce adâncime trebuie să vă scoborîţi într'un puţ pentru ca să găsiţi apa clocotind?
Profesorul le explicase că temperatura pământului creşte cu 1° la fiecare 32 m. de adâncime.
*Matematica pură* dă răspunsul: $x = 32 \times (100 - 10) = 2880$ m.

*Matematica aplicată* dă răspunsul: Nu putem ajunge până acolo că ne prăpădim înnainte"! I. I.

* * *

6. **O eclipsă tipografică.** In Geometria Analitică de P. MARINESCU pag. 112, citim: „Prin definiţie *eclipsa* este locul punctelor astfel ca.....".

N. BOTEA.

* * *

7. **Locuri geometrice geografice.** La Congresul Drumurilor, ţinut la Sevila anul trecut, un orator a spus:

„Sevila, oraş incântător unic, locul geometric al principalelor atracţiuni ale Spaniei,....". I. I.

* * *

8. **Egalitate. Neegalitate.** In „*Miserabilii*", VICTOR HUGO spune următoarele:

„Bonaparte pune un vizitiu pe tronul Neapolului şi un sergent pe tronul Suediei, întrebuinţând neegalitatea pentru ca să demonstreze egalitatea".

G. TULEA.

* * *

9. **Cele trei dimensiuni.** In Epistola Sfântului Apostol *Pavel* către Efeseni, se spune:

„Ca întru dragoste fiind înrădăcinaţi şi întemeiaţi, să puteţi cunoaşte, împreună cu toţi sfinţii, ce este *lungimea* şi *lăţimea* şi *adâncul* şi *înălţimea*".

I. I.

* * *

10. **Planul are forma unei conice.** Fie L şi L' două drepte concurente oarecare, iar O un punct fix în planul lor. Prin O ducem o dreaptă variabilă, care taie pe cele două drepte considerate în *m* şi *m'*. Aceste puncte descriu evident două diviziuni homografice pe L şi L'. Deci dreapta *mm'* înfăşoară o conică tangentă la cele două drepte. Cum o dreaptă nu poate avea două înfăşurători, rezultă că, sau *planul este conică*, sau *conica este un plan.*

B. M. BARBĂLATT.

* * *

11. **Formula frumuseţei.** D-l M. G. DUMITRESCU a dat, în Suplimentul dela No. 6. Anul XXIX, după *Vierordot*, formula următoare, pentru a se recunoaşte dacă o femeie este sau nu frumoasă:

$$G = \frac{IT}{2400}.$$

Aci G este greutatea în kg., I înălţimea în cm., T periferia maximă tot în cm. D-l DUMITRESCU nu a discutat de loc această formulă, ca să vază dacă este aplicabilă, sau în ce condiţiuni este aplicabilă, şi probabil că nu a făcut şi aplicaţiuni numerice înnainte de a trimite Recreaţiunea la *Gazeta Matematică.* Voiu dă aci un singur exemplu, din care să se vadă că formula conduce la soluţii imaginare. In adevăr, să considerăm o femee frumoasă, la care se zice că trebuie să avem G = 60,5 kg. Introducând această valoare a lui G în formulă şi gonind numitorii, avem:

$$I.T. = 60{,}5 \times 2400 = 145200.$$

Să considerăm o domnişoară având înnălţimea de 170 cm. Inlocuind pe I cu această valoare şi scoţând valoarea lui T, găsim T=853 cm!!! Aceasta ar conduce, în cazul unei periferii circulare, la un diametru de peste 2,70 m! Ce frumuseţe!

Putem dar zice, că dacă esteticianii se ocupă cu studiul *formulelor*, o nemeresc mai rău decât matematicianii, cari au reuşit în studiul *formelor*.

W. SOLOMON.

Am publicat recreaţiunea d-lui DUMITRESCU, pentrucă intră în vederile expuse la No. 7 al Suplimentului din No. 3., deşi noi nu cunoaştem în materie de frumuseţe decât teorema populară:

„Nu e frumos ce e frumos, ci e frumos ce-mi place mie".

I. I.

* * *

12. **Păreri despre algebră.** Într'una din întâlnirile lor, VOLTAIRE întreabă pe RIVAROL:

„Eh bien, qu'est-ce que c'est que cette algèbre où l'on marche toujours un bandeau sur les yeux" ?

RIVAROL îi răspunde cu toată vioiciunea imaginaţiei sale:

„Il en est des opérations de l'Algèbre comme du travail de nos dentelières, qui, en promenant sur leurs fils au travers d'un labyrinthe d'épingles, arrivent sans le savoir, à former un magnifique tissu".

G. B.

* * *

13. **Memoria.** Iată ce spune A. PELLETAN:

„Aceia cari au memorie bună şi puţină inteligenţă pot să obţină note de superioritate, chiar în matematici". I. I.

* * *

14. **Maşinăria matematică.** Iată ce spune FARADAY:

„Matematicile sunt ca o râşniţă de cafea, care râşnesc admirabil ceeace îi dăm să râşnească, dar care nu dau altceva decât ceeace i-am dat ca să râşnească".

I. I.

* * *

15. **Paradoxuri geometrice.** Fie ABCD şi A'B'C'D' două tetraedre polar reciproce în raport cu o cuadrică (C). După o proprietate clasică, dreptele AA', BB', CC', DD' se întâlnesc într'un punct. Dacă ABCD devine autopolar în raport cu cuadrica (C), atunci A'B'C'D' se confundă cu el şi ABCD devine *omologic cu el însuşi*. Dreapta AA' devine orice dreaptă ce trece prin A; la fel cu BB', CC' şi DD'. De aci rezultă următoarele teoreme:

*Teorema I.* Dreptele ce trec prin vârfurile unui tetraedru sunt concurente.

*Teorema II.* Toate dreptele sunt concurente.

*Teorema III.* Spaţiul are numai două dimensiuni, căci după teorema precedentă este redus la un plan.

Dacă considerăm o conică, din cele spuse, reese că ea este coprinsă în planul spaţiului. Deci polurile dreptelor din teorema II vor fi în linie dreaptă şi, prin urmare, avem o nouă teoremă:

*Teorema IV.* Toate punctele sunt colineare.

De aci, putem conchide apoi:

*Teorema V.* Spaţiul are o singură dimensiune.

*Teorema VI.* Spaţiul are una sau nicio dimensiune. (Se procedează ca mai sus).

În fine putem conchide:

*Teorema VII.* Numărul dimensiunilor spaţiului este egal cu valoarea acestei recreaţii.

B. M. BARBĂLATT.

* * *

16. **Egoism matematic.** Cât egoism reese din următoarele cuvinte ale lui LAMÉ!

„Când ați găsit un nou adevăr matematic, sau ați rezolvat o chestiune importantă, păziți-vă de a-i simplifică expunerea; prezentați-o din contră cât mai puțin clar posibil. Contimporanii voștri vor aprecià, cu atât mai mult descoperirea voastră, cu cât vor reuși mai puțin să o priceapă. Nu imitați deci nici pe LAGRANGE, nici pe POINSOT, urmați mai curând exemplul lui LAPLACE și POISSON, la cari claritatea nu ajungeà la toată perfecțiunea, decât atunci când expuneau lucrările altora". I. I.

* * *

17. **Geometria descriptivă.** Această ramură a științelor matematice ar puteà fi definită astfel:

„Geometria descriptivă este știința care face două sau trei figuri dintr'una și care face o figură din două sau trei altele".

L. WEISS.

* * *

18. **Inginer cu sila.** Există și azi la Primăria din Râmnicul Sărat procesul verbal redactat cam pe la 1885 de Consiliul comunal al acelui oraș, prin care farmacistul SCHUSTER din acea localitate, erà numit *inginerul Comunei*, pe motivul că erà *neamț*. Acesta a refuzat, zicând că nu e decât *Apoteker* și habar nu are de inginerie. Primarul, foarte supărat, îi trimete acasă o delegație din Consiliul comunal, care îl întreabă:

— „D-le SCHUSTER, D-ta nu ești neamț?

— Ba da.

— Apoi dacă ești neamț, trebuie să fii inginerul Comunei!

— Nu pot Domnilor, căci eu sunt Apoteker și nu mă pricep la inginerie.

— Cum să nu te pricepi dacă ești neamț? Trebuie să te pricepi și D-ta să faci o aliniere de străzi. Nu zice românul „Drept ca neamțul"? Nu se poate ca D-ta să nu poți face planuri, etc. pentrucă toate astea sunt treburi nemțești.

Și se spune că bietul neamț nu a avut încotro și a trebuit să facă pe inginerul!

CĂP. GR. ZAPAN.

Corespondenții Râmniceni au cuvântul!

I. I.

* * *

19. **Politica și mecanica.** Extragem următoarele din *„Les illusions du progrès"* par GEORGES SOREL:

„Contimporanii lui FONTENELLE (care a popularizat *ideia stabilității legilor naturale*) erau isbiți mai ales de faptul că vedeau până la ce punct suveranitatea regală a putut să se ridice pe deasupra lucrurilor accidentale, într'un mod care părea definitiv; ei erau cu totul dispuși să raporteze toate *mișcările* sociale la *impulsiunile* pe care societatea le primeà dela autoritatea regală; ei trebuiau deci să priviască instituțiunile regale ca *o forță constantă* care adăogà pe fiecare zi oarecare ameliorare nouă la ameliorările deja realizate. Concepțiunea unei *accelerațiuni* trebuià deci să se impuie lor într'un mod aproape evident și necesar. Ne putem întrebà chiar, dacă *legea accelerațiunii corpurilor în cădere* nu s'a prezentat lui GALILEO în urma unor analogii politice; deja din timpul său, *puterea* monarchilor devenise atât de absolută, în cât se puteà vedeà într'însa un tip de *forță constantă*".

I. I.

# ASUPRA RELAȚIILOR DE RECURENȚĂ LINEARE OMOGENE ȘI CU COEFICIENȚI CONSTANȚI.

1. Căutând să integrăm, cu ajutorul unei serii S, o ecuație diferențială lineară E, ai cărei coeficienți sunt polinoame întregi în raport cu variabila, suntem conduși la o relație de recurență lineară R, între coeficienții seriei S. Dacă cunoaștem însă o integrală particulară, desvoltabilă după puterile întregi ale variabilei, a ecuației E, avem posibilitatea de a avea explicit un șir de numere care satisfac relației R.

Pentru a face aplicația cea mai simplă a acestor generalități, să considerăm ecuația diferențială lineară și omogenă, cu coeficienți constanți, *reali sau imaginari.*

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + a_m y = 0.$$

Insemnăm cu $r_1, r_2, \ldots, r_m$ rădăcinile, presupuse deocamdată *distincte*, ale ecuației caracteristice

$$(2) \qquad x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$

integrala generală a ecuației (1) va fi:

$$(3) \qquad y = \sum_{i=1}^{i=m} C_i e^{r_i x}.$$

Să integrăm ecuația (1), luând pentru $y$ o serie întreagă în $x$

$$(4) \qquad y = u_o + \frac{u_1 x}{1} + \cdots + \frac{u_n x^n}{n!} + \cdots$$

Vedem, substituind lui $y$ această serie în ecuația (1), că șirul coeficienților

$$(5) \qquad u_o, u_1, \ldots, u_n, \ldots$$

va trebui să satisfacă relației de recurență

$$(6) \qquad u_{m+i} + a_1 u_{m+i-1} + \cdots + a_m u_i = 0.$$

Dar integrala generală (3) se poate pune sub forma (4), înlocuind exponențialele prin desvoltările corespunzătoare. Vom avea astfel

$$(3') \qquad y = \sum_{i=0}^{\infty} (C_1 r_1^i + \cdots + C_m r_m^i) \frac{x^i}{i!} .$$

Reese de aci că, dacă luăm

$$(7) \qquad u_p = C_1 r_1^p + c_2 r_2^p + \cdots + c_m r_m^p, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

şirul de numere $u_p$ va satisface relaţiei de recurenţă (6). Şirul de numere $u_p$, ast-fel construit, este şirul cel mai general care satisface relaţiei (6).

Putem, în adevăr, lua pentru cantităţile $u_o, u_1, \ldots, u_{m-1}$ valori arbitrare, determinând apoi constantele $C_1, C_2, \ldots, C_m$ prin sistemul de $m$ ecuaţiuni lineare

$$u_i = C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + \cdots + C_m r_m^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

determinantul coeficienţiilor acestui sistem fiind diferit de zero.

Să considerăm acum cazul când ecuaţia caracteristică (2) ar aveà rădăcini multiple. Pentru simplicitate, să presupunem că am aveà numai o rădăcină dublă $r_1 = r_2 = r$, celelalte rădăcini $r_3, \ldots, r_m$ fiind distincte între ele precum şi de $r$. In acest caz, integrala generală a ecuaţiei diferenţiale (1) este

$$y = (C x + C_2) e^{rx} + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_m e^{r_m x},$$

sau, ordonând după puterile lui $x$ şi înlocuind constanta C prin $C_1 r$,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} [C_1 i + C_2) r^i + C_3 r_3^i + \cdots + C_m r_m^i] \frac{x^i}{i!} .$$

Prin urmare, în acest caz, şirul (7) trebue înlocuit cu

$$(8) \qquad u_p = (C_1 i + C_2) r^i + C_3 r_3^i + \cdots + C_m r_m^i, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

care va fi, pentru cazul considerat, şirul cel mai general, care satisface relaţiei (6).

In cazul când ecuaţia caracteristică (2) are una sau mai multe rădăcini multiple, se găseşte cu uşurinţă, din expresia integralei generale a ecuaţiei (1), care este şirul cel mai general, analog lui (8), ce satisface relaţiei de recurenţă (6). Aşà, spre exemplu, dacă relaţia (6) este de forma

(9) $u_{m+i} - C_m^1 a u_{m+i-1} + C_m^2 a^2 u_{m+i-2} - \cdots \pm a^m u_i = 0,$

ecuația caracteristică va fi

$$(x - a)^m = 0,$$

iar șirul cel mai general, care verifică relația (9), este

$$u_p = (C_m p^m + C_{m-1} p^{m-1} + \cdots + C_1) a^p .$$

Dându-ni-se valorile primilor $m$ termeni ai șirului, $u_0$, $u_1$,..., $u_{m-1}$, vom puteà determinà constantele $C_1$, $C_2$,..., $C_m$.

2. *Funcțiuni generatoare.* Dacă considerăm seria

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n + \cdots,$$

se constată ușor că, relația (6) exprimă că coeficientul lui $x^{m+p}$, pentru $p \geqslant 0$, în produsul seriei $\varphi(x)$ prin polinomul de gradul $m$

$$P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

este nul. Deci acest produs $\varphi(x)\, P(x)$ este un polinom $Q(x)$ de gradul $m-1$ și, prin urmare, $\varphi(x)$ este de forma

(10) $$Q(x)/P(x).$$

Coeficienții polinomului $Q(x)$ vor fi determinați prin valorile alese pentru $u_0$, $u_1$,..., $u_{m-1}$.

Cu ajutorul funcției generatoare (10), se pot regăsì rezultatele stabilite mai sus [1]).

3. Șirul (5), satisfăcând relației (6), se bucură, în anumite cazuri, de proprietăți interesante.

I) Dacă rădăcinile ecuației (2), distincte sau nu, *au toate modulul mai mic de cât unitatea,* atunci

(11) $$\lim_{n=\infty} u_n = 0,$$

ori care ar fi valorile luate pentru primii $m$ termeni $u_0$, $u_1$, ..., $u_{m-1}$ ai șirului (5).

In adevăr, vom puteà pune termenul $u_n$ sub o formă analoagă cu (8), determinând constantele $C_1$, $C_2$,..., $C_m$. Trecând apoi la limită, vom aveà imediat egalitatea (11), căci limita, pentru $n$ infinit, a unei expresiuni de forma

(12) $$n^p \alpha^n ,$$

(1) Goursat, Cours d'Analyse, t. II, p. 152, ed. 1918.

unde $p$ este un număr finit şi $|\alpha| < 1$, este zero; aceasta rezultă din faptul că (12) este termenul general al unei serii absolut convergente.

Se poate întâmplà, în mod excepţional, ca relaţia (11) să subziste cînd numai o parte din rădăcinile ecuaţiei caracteristice au modulul inferior unităţei. Va trebui, pentru aceea, să alegem pentru $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ valori aşà ca, din coeficienţii $C_1, C_2, \ldots, C_m$, să fie nuli toţi aceia cari însoţesc, în expresia lui $u_n$, o rădăcină de modul superior sau egal cu unitatea.

II. Dacă ecuaţia caracteristică (2) are o rădăcină $r$, simplă sau multiplă, *mai mare în modul de cât toate celelalte*, atunci avem, în general,

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r. \tag{13}$$

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, rădăcina $r$ dublă, $r_1 = r_2 = r$; celelalte rădăcini $r_3, r_4, \ldots, r_m$, distincte sau nu, vor aveà toate modulul mai mic decât $(r)$.

Inlocuind în raportul $u_{n+1}/u_n$ pe $u_{n+1}$ şi $u_n$ prin valorile corespunzătoare lor sub forma (8) şi împârţind apoi ambii termeni ai acestui raport prin $r^n$, vom aveà

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[C_1(n+1)+C_2]r+\varepsilon}{C_1 n + C_2 + \eta},$$

$\varepsilon$ şi $\eta$ reprezentând câte o sumă de $m-2$ termeni de forma (12), în afară de factori constanţi. Trecând la limită, toţi termenii de forma (12) anulându-se, avem imediat egalitatea (13).

Demonstraţia dată nu subzistă în cazul când $C_1 = C_2 = 0$, adică, dacă am ales pentru $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, valori excepţionale pentru care valorile lui $C_1$ şi $C_2$ date de sistemul

$$u_i = (C_1 i + C_2) r^i + C_3 r_3^i + \cdots + C_m r_m^i \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

sunt nule. De aci, reese că putem înlocui enunţul propoziţiei II, prin următorul :

Dacă în expresiunea termenului $u_n$, analoagă lui (8), corespunzătoare relaţiei (6) şi valorilor $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ alese, intră o rădăcină $r$ a ecuaţiei caracteristice (2), simplă sau multiplă, *mai mare în modul decât modulul tutulor celorlalte rădăcini* ce figurează în expresia lui $u_n$, avem atunci egalitatea (13).

Vedem, în particular, că limita raportului $u_{n+1}/u_n$ poate fi, în mod excepțional, ori și care din rădăcinile ecuației caracteristice. Așà, de exemplu, dacă voim ca limita să fie rădăcina $r_i$, vom lua șirul

$$u_n = (r_i)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

care verifică relația (6).

In cazul când ecuația caracteristică are mai multe rădăcini *inegale, dar de același modul maxim*, nu mai putem afirmà existența unei limite, în general, pentru raportul $u_{n+1}/u_n$. Așà, spre exemplu, dacă considerăm relația de recurență

$$u_{p+2} + u_{p+1} + u_p = 0,$$

rădăcinile ecuației caracteristice

$$x^2 + x + 1 = 0, \tag{14}$$

au același modul. Să luăm $u_0 = a$, $u_1 = b$; șirul (5) va fi

$$a, b, -a-b, a, b, -a-b, a, \ldots \tag{15}$$

deci $u_{n+1}/u_n$ nu tinde către nicio limită, afară de cazul când

$$(-a-b)/b = b/a,$$

adică dacă $b/a$ este o rădăcină $r$ a ecuației (14). In acest caz, se vede că șirul (15) devine

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots.$$

Să mai enunțăm următoarea propoziție:

Dacă ecuația caracteristică (2) are mai multe rădăcini de același modul maxim, *fără ca aceste rădăcini să fie toate distincte între ele,* una din ele $r$ fiind de un grad de multiplicitate *mai mare* de cât al celorlalte, atunci avem, în general, egalitatea (13).

Demonstrația se va face ca mai sus, împărțind termenii raportului $u_{n+1}/u_n$ prin $r^n$ și trecând la limită [1]).

*Observare.* Luând $m$ valori arbitrare pentru $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ și calculând cu ajutorul relației (6) celelalte cantități $u_m, u_{m+1}, \ldots$, în cazul când $u_{n+1}/u_n$ tinde către o limită, care în general este rădăcina de modul maxim a ecuației (2), calcularea rapoartelor succesive $u_{m+p+1}/u_{m+p}$ ne dă un mijloc de a ne apropià ori cât de mult dorim de acea rădăcină.

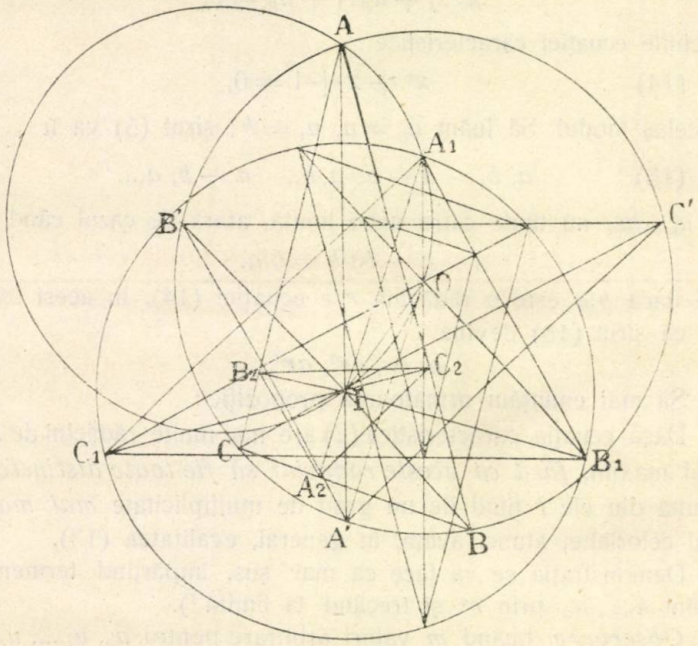
A. Angelescu.

1) Cele stabilite, relativ la limita raportului $u_{n+1}/u_n$, pot servi pentru precizarea și completarea unor afirmări făcute, cu ocazia generalizării problemei 3034, într'un număr trecut.

## DOUĂ TRIUNGHIURI IMPORTANTE.

Fie ABC un triunghiu oarecare, O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris şi A',B',C' punctele de intersecţie ale bisectoarelor AI, BI, CI cu cercul O. Perpendiculara dusă din I pe BC taie cercul AOI a doua oară în $A_1$. Analog, obţinem punctele $B_1, C_1$. *Triunghiul* $A_1B_1C_1$ *este primul triunghiu* ale cărui proprietăţi le vom studiă.

1. O *este ortocentrul triunghiului* $A_1B_1C_1$, *iar* I *este centrul cercului circumscris triunghiului* $A_1B_1C_1$.




In adevăr, patrulaterul $OA_1AI$ fiind inscriptibil, rezultă $\sphericalangle OA_1I = \sphericalangle OAI$, însă $\sphericalangle OAI = \sphericalangle OA'I$, căci $OA = OA'$, deci $\sphericalangle OA_1I = \sphericalangle OA'I$ şi, deoarece $IA_1$ e paralelă cu $OA'$, rezultă că $OA_1$ e paralelă cu $IA'$, deci figura $OA_1IA'$ e un paralelogram şi, prin urmare, $A_1$ e simetricul lui A' în raport cu mijlocul $\omega$ al lui OI şi mai rezultă $IA_1 = OA' = R$ (R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC). Analog, vom demonstră că $B_1, C_1$ sunt respectiv simetricele punctelor B',C' în raport cu $\omega$, deci $B_1C_1$ e paralelă B'C'; însă A'I şi B'C' sunt per-

pendiculare, deci cum $OA_1$ e paralelă cu A'I, rezultă că $OA_1$ e perpendiculară pe $B_1C_1$. Analog, dovedim $OB_1$ e perpendiculară pe $A_1C_1$ şi $OC_1$ pe $A_1B_1$; *rezultă deci că* O *este ortocentrul triunghiului* $A_1B_1C_1$.

Am văzut că $IA_1 = R$. Analog, dovedim că $IB_1 = R = IC_1$, *deci* I *este centrul cercului* $A_1B_1C_1$.

2. *Triunghiurile* ABC, $A_1B_1C_1$ *sunt omologice.*

In adevăr, deoarece dreptele $IA_1$, $IB_1$, $IC_1$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC şi deoarece $IA_1 = IB_1 = IC_1$ rezultă, după o cunoscuta teoremă, a lui KARIYA, că $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sunt concurente, iar centrul de omologie se află pe *hiperbola lui* FEUERBACH a triunghiului ABC.

3. $A_1B_1C_1$ *sunt respectiv centrele cercurilor* B'IC', C'IA', A'IB'.

In adevăr, $A_1O = IA'$ şi cum I este ortocentrul triunghiului A'B'C' şi deoarece ştim că distanţa dela centrul cercului circumscris O la latura B'C' este jumătate din distanţa IA' dela ortocentrul I la vârful opus A', rezultă că $A_1$ e simetricul lui O în raport cu B'C', deci $A_1B' = OB' = OC' = A_1C' = R$ şi deoarece $A_1I = R$, rezultă $A_1B' = A_1C' = A_1I$, deci $A_1$ e centrul cercului B'IC'. Analog, pentru punctele $B_1$ şi $C_1$.

4. A', B', C' *sunt respectiv centrele cercurilor* $B_1OC_1$, $C_1OA_1$, $A_1OB_1$.

In adevăr, am văzut că $A_1, B_1, C_1$ sunt simetricile punctelor A', B', C' în raport cu mijlocul $\omega$ al lui OI, deci $B_1A' = A_1B'$ şi $A'O = A_1'I$ şi $C_1A' = A_1C'$ şi deoarece am văzut că $A_1I = A_1B' = A_1C'$ rezultă că $A'B_1 = A'O = A'C_1$, deci A' e centrul cercului $B_1OC_1$. Analog pentru B' şi C'.

5. *Cercurile* B'IC', C'IB', B'IA', $A_1B_1C_1$, $A_1OB_1$, $B_1OC_1$, $C_1OA_1$ *sunt egale cu cercul* ABC.

Se ţine seamă de proprietatea lui CARNOT că cercurile ce trec prin ortocentru şi două vârfuri, sunt egale cu cercul circumscris.

6. *Triunghiurile* A'B'C', $A_1B_1C_1$, B'IC', $B_1OC_1$, A'IB', $A_1OB_1$, A'IC', $A_1OC_1$ *au acelaş cerc* EULER *al cărui centru este mijlocul lui* OI.

Se ţine seamă de faptul că centrul cercului EULER se găseşte la mijlocul dreptei ce uneşte ortocentrul cu centrul cercului circumscris şi că I este ortocentrul triunghiului A'B'C', O este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$.

7. *Triunghiul* ABC *se poate construi, dacă cunoaştem trei din punctele* $A_1$, $B_1$, $C_1$, O.

Deoarece O este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$, evident că triunghiul $A_1B_1C_1$ se poate uşor construi cunoscând trei din punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$, O. Odată ce am construit triunghiul $A_1B_1C_1$, obţinem imediat punctele A', B', C' luând centrele cercurilor B'IC', C'IA', A'IB' şi obţinem vârfurile triunghiului ABC prin intersecţia înălţimilor triunghiului A'B'C' cu cercul său circumscris.

8. *Triunghiul* ABC *se poate construi, cunoscând punctele* O, I *şi unul din punctele* $A_1$, $B_1$, $C_1$.

Ţinând seamă că O este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$ şi I este centrul cercului circumscris acestui triunghiu, rezultă că triunghiul $A_1B_1C_1$ se poate uşor construi, cunoscând punctele O, I şi unul din punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$. Din triunghiul $A_1B_1C_1$ se obţine uşor triunghiul ABC, sau ca la 7), sau luând direct intersecţiile A, B, C, *ale mediatoarelor acestui triunghiu cu cercurile* $A_1OI$, $B_1OI$, $C_1OI$ respectiv.

9. $A_2B_2C_2$ fiind triunghiul format de punctele de contact ale cercului I cu laturile triunghiului ABC, triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind R: *r*, R şi *r* fiind razele cercurilor circumscris şi înscris în triunghiul ABC.

Triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ au evident laturile paralele, iar raportul de omotetie e raportul razelor cercurilor circumscrise lor, adică R: *r*.

* * *

Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Mediatoarele laturilor BC, CA, AB taie respectiv cercurile AOH, BOH, COH în $A_3$,$B_3$,$C_3$. *Triunghiul* $A_3B_3C_3$ *e al doilea triunghiu pe care-l vom studia.*

10. H *e centrul cercului circumscris triunghiului* $A_3B_3C_3$.

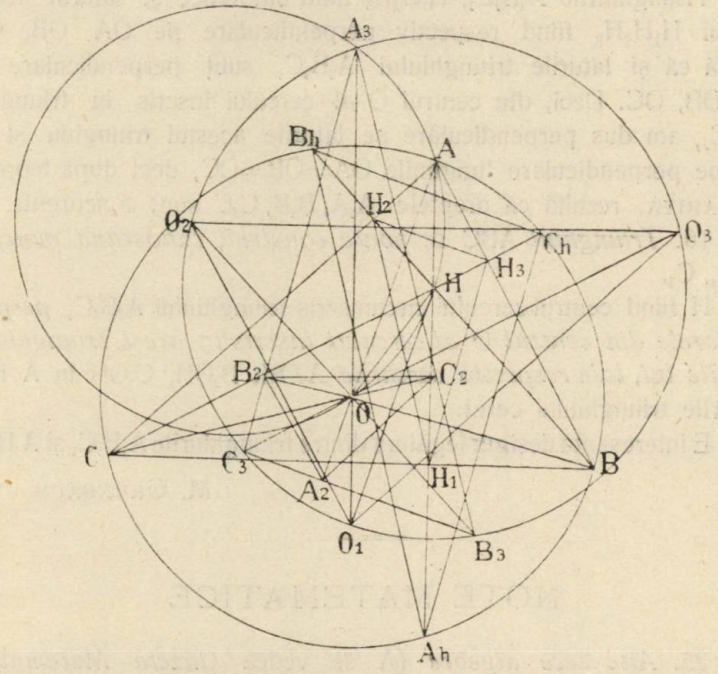
In adevăr, figura $OA_3AH$ e un trapez isoscel, deci $HA_3$=$OA$ =R. Analog $HB_3$=$OB$ şi $HC_3$=$OC$, deci H e centrul cercului $A_3B_3C_3$.

11. $A_h$, $B_h$, $C_h$ fiind punctele unde înălţimile AH, BH, CH intersectează cercul ABC, *triunghiurile* $A_3B_3C_3$, $A_hB_hC_h$ *sunt simetrice în raport cu centrul cercului* EULER *al triunghiului* ABC.

In adevăr, $O_1$, $O_2$, $O_3$ fiind centrele cercurilor BHC, CHA, AHB e evident că $A_3$, $B_3$, $C_3$ sunt simetricile lui O în raport cu laturile triunghiului $O_1O_2O_3$ şi cum triunghiurile ABC, $O_1O_2O_3$ sunt simetrice în raport cu centrul cercului EULER al triunghiului ABC, rezultă că punctele $A_3$, $B_3$, $C_3$ care sunt omoloagele lui $A_h$, $B_h$, $C_h$ din triunghiul

ABC în triunghiul $O_1O_2O_3$, sunt simetricile lui $A_h$, $B_h$, $C_h$ în raport cu centrul cercului EULER al triunghiului ABC.

12. $H_1H_2H_3$ fiind triunghiul ortic al triunghiului ABC, *triunghiurile* $A_3B_3C_3$, $H_1H_2H_3$ *sunt omotetice, raportul de omotetie fiind* 1 : 2, *centrul de omotetie fiind simetricul baricentrului* G *al triunghiului* ABC, *în raport cu centrul cercului* EULER *al aceluiaş triunghiu.*




In adevăr, triunghiurile $A_hB_hC_h$, $H_1H_2H_3$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind H şi raportul 1 : 2, iar triunghiurile $A_hB_hC_h$, $A_3B_3C_3$ sunt simetrice în raport cu centrul $\omega_1$ al cercului EULER al triunghiului ABC; rezultă deci că triunghiurile $H_1H_2H_3$, $A_3B_3C_3$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind 1 : 2 şi centrul de omotetie fiind simetricul lui G în raport cu $\omega_1$.

13. O *este centrul cercului înscris în triunghiul* $A_3B_3C_3$.

In adevăr, triunghiurile $H_1H_2H_3$, $A_3B_3C_3$ sunt omotetice şi deoarece H e centrul cercului înscris în triunghiul $H_1H_2H_3$, iar $HH_1$, $HH_2$, $HH_3$ paralele respectiv cu $OA_3$, $OB_3$, $OC_3$, rezultă că O este centrul cercului înscris în triunghiul $A_3B_3C_3$.

14. $O_1$, $O_2$, $O_3$ *sunt respectiv centrele cercurilor* $B_3OC_3$, $C_3OA_3$, $A_3OB_3$.

In adevăr, se observă că $O_1$, $O_2$, $O_3$ sunt tocmai mijloacele arcelor $B_3C_3$, $A_3C_3$, $B_3A_3$, adică $O_1$, $O_2$, $O_3$ sunt punctele unde bisectoarele $OA_3$, $OB_3$, $OC_3$ ale unghiurilor triunghiului $A_3B_3C_3$ taie cercul $A_3B_3C_3$.

15. *Triunghiurile* ABC, $A_3B_3C_3$ *sunt omologice.*

Triunghiurile $A_3B_3C_3$, $H_1H_2H_3$ fiind omotetice şi laturile triunghiului $H_1H_2H_3$ fiind respectiv perpendiculare pe OA, OB, OC, rezultă că şi laturile triunghiului $A_3B_3C_3$ sunt perpendiculare pe OA, OB, OC. Deci, din centrul O al cercului înscris în triunghiul $A_3B_3C_3$, am dus perpendiculare pe laturile acestui triunghiu şi am luat pe perpendiculare lungimile OA=OB=OC, deci după teorema lui KARIYA, rezultă că dreptele $A_3A$, $B_3B$, $C_3C$ sunt concurente.

16. *Triunghiul* ABC *se poate construi, cunoscând punctele* $A_3$, $B_3$, $C_3$.

H fiind centrul cercului circumscris triunghiului $A_3B_3C_3$, *perpendicularele din centrul* O *al cercului înscris în acest triunghiu pe laturile lui, taie respectiv cercurile* $A_3OH$, $B_3OH$, $C_3OH$ în A, B, C vârfurile triunghiului cerut.

E interesantă desigur legătura dintre triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_3B_3C_3$.

M. GRÜNBAUM.

## NOTE MATEMATICE

25. *Alte zece algebre* (A se vedeà *Gazeta Matematică*, Anul XXIX. Nota matematică 52, pag. 288).

51. **Asociativă.** A se vedeà *Bulletin of the American Mathematical Society*. Vol. XXX, pag. 247.

52. **Excepţională.** Idem pag. 269.
53. **Neasociativă.** » » 198.
54. **Nilpotentă.** » » 250.
55. **Primitivă.** » » 269.
56. **Raţională.** » » 253.
57. **Reductibilă.** » » 263.
58. **Semisimplă.** » » 250.
59. **Simplă.** » » 250.
60. **Specială.** » » 247.

(Va urmà). I. IONESCU.

26. *Asupra unor sume.* In numerele 5 şi 11 din anul precedent, s'au calculat sumele:

$$S_1 = m + mn + mmn + mnmn + \ldots$$

$$S_2 = m + mn + mnn + mnnn + \ldots$$

în care $m$ şi $n$ sunt cifre, iar $p$ numărul termenilor. Iată aci încă câtevă sume de acest fel:

*a)* $S_3 = m + mn + mrn + mrrn + \ldots$

Se găseşte:

$$S_3 = m(10^p - 1)/9 + (p-1)n + 10(10^{p-1} - 9p + 8)r/81.$$

Ion Vasiliu.

*b)* $S_4 = mn + mmnn + mnmnnn + \ldots$

Se găseşte:

$$S_4 = 100(10^{2p} - 1)m - 110(10^p - 1)(m-n) - 99pn.$$

*c)* $S_5 = mrn + mrrn + mrrrn + \ldots$

Se deduce din $S_3$, scăzând $m$ şi $mn$, adică $(11m+n)$ şi modificând pe $p$:

$$S_5 = 10(10^{p-1} - 1)(9m+r)/81 - 10(p-1)r/9 + (p-1)n.$$

Pentru $m = 0$, dăm peste generalizarea problemei 2996 din *Gazeta Matematică*, No. 7, Anul XXVIII. Tot de aci, se pot scoate şi sumele din notele citate la început.

Marin Ştefan.

27. *Asupra problemelor 682 şi 2753.* In problema 682, propusă la pagina 172, Vol. VII şi rezolvată la pagina 157, Vol. VIII, se cere:

*Să se scrie, unul după altul, două numere consecutive de trei cifre fiecare, astfel ca numărul de şase cifre obţinut să fie patrat perfect,* iar în problema 2753, propusă cu număr greşit *) la pagina 288, Vol. XXV şi rezolvată tot cu numărul greşit de 2752, la pagina 100, Vol. XXIX, se cere:

*Se scriu două numere consecutive unul după altul cu un*

*) A se vedeà erata dela pagina 78, Vol. XXVI.

*zero între ele. In ce caz numărul de cinci cifre astfel format este patrat perfect?*

Ambelor acestor probleme, propuse de D-l I. Ionescu, li s'au dat soluțiuni elementare, pur aritmetice. Dacă N și N + 1, sunt cele 2 numere consecutive cerute în fiecare din cele 2 probleme, iar $k^2$ un patrat perfect, trebuie să avem:

$$1000N + N + 1 = k^2 \quad \text{sau} \quad (N + 1)1000 + N = k^2$$

$$\therefore \quad (1)\ N = (k^2 - 1)/1001 \quad \text{sau} \quad (2)\ N = (k^2 - 1000)/1001.$$

Imi propun ca, generalizând problemele 682 și 2753, să găsesc cele mai generale valori ale lui $k$, pentru care numărul N dat de (1) sau de (2) să fie întreg.

I. *Egalitatea* (1) se poate scrie:

$$(3) \qquad N = (k - 1)(k + 1)/7.11.13.$$

De oarece $(k - 1)$ și $(k + 1)$, nu pot admite alți divizori comuni decât pe 2, egalitatea (3) poate da pentru N, valori întregi, în unul din următoarele cazuri:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1°. | $k - 1 = 1001m$ | iar | $k + 1 = 1001m + 2$ |
| 2°. | $k - 1 = 7m$ | » | $k + 1 = 11.13m'$ |
| 3°. | $k - 1 = 11m$ | » | $k + 1 = 7.13m'$ |
| 4°. | $k - 1 = 13m$ | » | $k + 1 = 7.11m'$ |
| 5°. | $k - 1 = 7.11m$ | » | $k + 1 = 13m'$ |
| 6°. | $k - 1 = 7.13m$ | » | $k + 1 = 11m'$ |
| 7°. | $k - 1 = 11.13m$ | » | $k - 1 = 7m'$ |
| 8°. | $k - 1 = 1001m - 2$ | » | $k + 1 = 1001m'$. |

Egalitățile 1° și 8°, dau soluțiunile generale imediate

$$\begin{cases} k = 1001t + 1 \\ N = t(1001t + 2) \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} k = 1001t - 1 \\ N = t(1001t - 2), \end{cases}$$

în care $t$ este un întreg oarecare. Se vede că cea mai mică valoare pozitivă a lui N, se obține pentru $t = 1$, care dă respectiv:

$$\begin{cases} k = 1002 \\ N = 1003 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} k = 1000 \\ N = 999. \end{cases}$$

Să considerăm acum cazurile 2°, 3°, ... 7°.

Din egalitățile 2°, se deduce:

$$7m + 2 = 11.13m'$$

$$\therefore \qquad m = \frac{143m' - 2}{7} = 20m' + \frac{2m' - 2}{7}.$$

Pentru ca $m$ să fie întreg, trebuie să avem:

$$3m' - 2 = 7p \quad \therefore \quad m' = \frac{7p+2}{3} = 2p + 1 + \frac{p-1}{3}$$

$$\therefore \qquad p = 3t + 1.$$

Inlocuind în ecuațiile precedente pe $p$, apoi pe $m'$ în funcție de $t$, găsim:

$$m = 143t + 61,$$

ceeace conduce, din $2^0$ și (3), la

$$k = 1001t + 428 \quad \text{și} \quad N = (143t + 61)(7t + 3).$$

Procedând, în mod absolut analog și pentru cazurile $3^0$, $4^0$,... $7^0$ și totalizând rezultatele, se găsesc următoarele sisteme de soluții ale egalității (1):

| | | |
|---|---|---|
| $1^0$. | $k = 1001t + 1$ , | $N = t(1001t + 2)$ |
| $2^0$. | $k = 1001t + 428$ , | $N = (143t + 61)(7t + 3)$ |
| $3^0$. | $k = 1001t - 274$ , | $N = (91t - 25)(11t - 3)$ |
| $4^0$. | $k = 1001t - 155$ , | $N = (77t - 12)(13t - 2)$ |
| $5^0$. | $k = 1001t + 155$ , | $N = (13t + 2)(77t + 12)$ |
| $6^0$. | $k = 1001t - 727$ , | $N = (11t - 8)(91t - 66)$ |
| $7^0$. | $k = 1001t + 573$ , | $N = (7t + 4)(143t + 82)$ |
| $8^0$. | $k = 1001t - 1$ , | $N = t(1001t - 2)$. |

Dacă se face $t = 0$, egalitățile $2^0$, $6^0$, $7^0$ dau soluțiile problemei 682, iar egalitățile $3^0$, $4^0$, $5^0$ dau soluțiile problemei 2753.

II. Pentru ca N dat de (2) să fie întreg, trebuie ca diferența $k^2 - 1000$ să se dividă cu produsul $7 \times 11 \times 13$. Observ că

$$k^2 - 1000 = k^2 + 1 + 7 \times 143.$$

Pe de altă parte, un patrat perfect $k^2$ poate fi de una din formele următoare, față de divizorul 7:

$$7p;\ 7p+1,\ 7p+4,\ 7p+9,\ 7p+16,\ 7p+25,\ 7p+36.$$

Niciunul din aceste numere, adunat cu 1, nu dă multiplu de 7, prin urmare $k^2 - 1000$ nu se divide cu 7, deci egalitatea (2) nu poate aveà loc în numere întregi.

Problema se poate extinde mai mult, căutându-se un număr

N de $n$ cifre, astfel că dacă se scriu unul după altul numerele N şi $N+1$, să se obţie un patrat perfect.

Ecuaţiile problemei, în acest caz, sunt:

$$N=(k^2-1)/(10^n+1) \quad \text{şi} \quad N=(k^2-1)/(10^n+1).$$

Greutatea, în rezolvarea acestei probleme, este că nu se cunosc factorii primi ai numărului $10^n+1$. Astfel, pentru fiecare caz particular al lui $n$, problema se poate rezolvà ca mai sus, sau urmând căi analoage cu cele date la rezolvarea problemelor 682 şi 2753, în volumele anterioare ale *Gazetei Matematice.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

28. *Asupra unei proprietăţi a dreptei lui* SIMSON. Se cunoaşte următoarea proprietate: unghiul format de dreptele lui SIMSON ale unui triunghiu ABC, în raport cu două puncte M şi N de pe cercul circumscris triunghiului, are drept măsură jumătatea arcului MN. Iată o soluţie simplă:

Fie $M_1$ şi $N_1$ punctele unde perpendicularele duse din M şi N pe latura BC, întâlnesc cercul circumscris. Se ştie că dreapta lui SIMSON a punctului M este paralelă cu $AM_1$. Analog, dreapta lui SIMSON a punctului N este paralelă cu $AN_1$. Deci unghiul ce-l fac dreptele lui SIMSON ale punctelor M şi N va fi egal cu $\sphericalangle M_1AN_1$. Ori, acest unghiu are ca măsură $\frac{1}{2}\,\text{arc}\,M_1CN_1$. Dar $\text{arc}\,M_1CN_1 = \text{arc}M_1N + \text{arc}NN_1 = \text{arc}MAN_1 + \text{arc}NN_1 = \text{arc}MAN$, căci $\text{arc}M_1N = \text{arc}MN_1$ ca arce determinate de coarde paralele şi deci $\sphericalangle M_1AN_1 = \frac{1}{2}$măs. arcMAN, ceeace demonstrează proprietatea *).

MARIN ŞTEFAN.
Constanţa.

29. *Asupra unei identităţi trigonometrice.*

Identitatea

$$\sum_0^n 2^i \operatorname{tg} 2^i a + 2^{n+1}\cot 2^{n+1}a = \cot a,$$

demonstrată de D-l T. ANGELESCU în nota *No. 13*, se poate înve-

*) Asupra acestei proprietăţi, a se vedeà şi nota 14 din *G. M.*, Vol. XIX, p. 211 ş. u.

(N. R.)

derâ pe o altă cale, care dacă nu e tocmai elementară, are avantajul că e susceptibilă de variate aplicaţiuni în această direcţiune.

Observăm că

$$2^n \operatorname{tg} 2^n x = \frac{d}{dx}(\log \cos 2^n x),$$

deci

$$\sum_0^n 2^i \operatorname{tg} 2^i x = -\frac{d}{dx}\sum_0^n \log \cos 2^i x = -\frac{d}{dx}(\cos x \cos 2x \cos 2^2 x \ldots \cos 2^n x).$$

Insă, se arată uşor că

$$\cos x \cos 2x \ldots \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x},$$

astfel că

$$\sum_0^n 2^i \operatorname{tg} 2^i x = \frac{d}{dx} \log \frac{2^{n+1} \sin x}{\sin 2^{n+1} x} = \cot x - 2^{n+1} \cot 2^{n+1} x.$$

M. G.

30. *Generalizarea notei* 53 din *G. M.*, Vol. XXVIII, p. 288. In acea notă, şi tot ca o generalizare a problemei 2704 (*G. M.*, Vol. XXVI p. 187), se caută condiţia ca mediana, simediana şi bisectoara interioară ce pleacă respectiv din vârfurile A, B, C ale unui triunghiu ABC, să fie concurente. Ea este $c^2 = ab$.

Consider, în general, transversala unghiulară AA' a unui punct $M(\alpha, \beta, \gamma)$, isogonala BB' a transversalei BM şi bisectoara interioară a unghiului C. Ele au respectiv ecuaţiile (în coordonate normale):

$$\gamma y - \beta z = 0, \quad \gamma z - \alpha x = 0, \quad x - y = 0.$$

Pentru ca ele să fie concurente, trebue să avem:

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \therefore \quad \gamma^2 = \alpha\beta.$$

Dacă M este centrul de greutate, isogonala transversalei BM este simediană, iar coordonatele normale ale centrului de greutate fiind $(1/a, 1/b, 1/c)$, condiţia $\gamma^2 = \alpha\beta$, devine $c^2 = ab$.

In general, cele trei drepte concură în punctul cu coordonatele $(\beta, \beta, \gamma)$.

Ion C. Vasiliu.
Elev cl. VII, Liceul Mânăstirea Dealului.

Dacă în locul bisectoarei unghiului C, considerăm isogonala CC′ a unei transversale unghiulare CN, coordonatele punctului N fiind $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, atunci condiţia, în coordonate normale, ca AM, BB′ şi CC′, să fie concurente, devine:

$$\alpha_1\gamma^2 = \alpha\beta\beta_1,$$

iar punctul de concurenţă este $(\beta\beta_1, \beta\alpha_1, \gamma\alpha_1)$.

In particular, dacă M este centrul de greutate $G(1/a, 1/b, 1/c)$ şi N centrul cercului circumscris O (cosA, cosB, cosC), atunci obţinem imediat condiţia ca mediana din A, simediana din B şi înălţimea din C să fie concurente; ea este:

$$c^2\cos B - ab\cos A = 0, \quad \therefore \quad c^4 + a^4 = b^2(c^2 + a^2),$$

chestiunea propusă de E. Lemoine (*Mathesis* année 1886, p. 115, question 401).

V. Cristescu.

31. *Asupra notei 23.* Această notă este greşită. Exemplul $f(x) = -1$ şi $g(x) = -2$ arată imediat că:

$$\int_a^b f(x)dx = -(b-a) > -2(b-a) = \int_a^b g(x)dx.$$

Greşala a provenit din faptul că s'a pierdut din vedere că, în analiza matematică, ariile reprezentate de integrale pot fi considerate şi ca negative.

P. Sergescu.

## CHESTIUNI DE EXAMEN

### FACULTATEA DE ŞTIINŢE, CLUJ.

*Seziunea Iunie 1924.*

### ALGEBRA SUPERIOARĂ

Proba teoretică (9 — 12).

1. Dându-se ecuaţiile:

$$f(x) = x^3 + px + q = 0$$
$$\varphi(x) = x^2 + mx + n = 0,$$

să se calculeze expresia

$$E = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma),$$

în funcţie de coeficienţii celor două ecuaţii, $\alpha, \beta, \gamma$ fiind rădăcinile primei ecuaţii, $\alpha'$, $\beta'$ a celei de a doua.

Să se arate că avem:

$$E = f(\alpha') f(\beta') = (q + mn)^2 - (m^2 - n + p)(mq + n^2 - np).$$

Ce putem conchide, dacă E e nul?

*Aplicaţie.* Să se calculeze E pentru ecuaţiile:

$$x^3 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

şi să se aranjeze în ordinea mărimei rădăcinile celor două ecuaţii, fără a le rezolvà.

II. Ecuaţia

$$a^x (1 - x \operatorname{Log} a) - 1 = 0,$$

are o singură rădăcină reală, care este dublă şi care se cere.

Să se folosească aceasta pentru studiul funcţiunei

$$y = x/(a^x - 1)$$

$x$ variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

Cantitatea $a$ este superioară lui 1 iar Log este neperian. Să se figureze curba.

III. Să se studieze natura seriei

$$U_n = a^n \, n^{\alpha n} / n!$$

$a$ fiind pozitiv, iar $\alpha$ real, oarecare.

## MECANICA RAŢIONALĂ (partea I).

### PARTEA TEORETICĂ.

Bara AB, omogenă şi de lungime $2a$, se poate roti în jurul centrului fix O şi în planul vertical căruia îi aparţine. La extremitatea B aplicăm o greutate (cunoscută) $P_1$. Extremitatea A o rezimăm de o bară omogenă O'C, de lungime $2b$, având extremitatea O' fixată pe verticala ce trece prin O, iar $OO' = a$. Fie $P_2$ greutatea cunoscută a barei O'C. Bara O'C se poate mişcà în planul vertical conţinând pe AB. Sistemul este fără frecare.

Să se afle: 1°. Condiţia de echilibru exprimând unghiul $\alpha$ format de verticală şi de bara O'C. 2°. Reacţiunea exercitată de bara O'C asupra barei AB. 3°. Când problema este imposibilă?

(28 iunie, ora 8).

### PROBA PRACTICĂ.

1°. Traectoria unui mobil este o iperbolă, iar acceleraţia totdeauna paralelă cu $Oy$. Să se afle mişcarea (coordonatele, viteza şi acceleraţia) mobilului, în funcţiune de timp.

2°. Un mobil se mişcă pe o dreaptă; acceleraţia lui este îndreptată

constant spre un punct al aceleaşi drepte (centru) şi fiind invers proporţională cu pătratul distanţei la acel punct. Să se afle viteza şi timpul în funcţiune de spaţiu.

(28 iunie, ora 15).

## MECANICA RAŢIONALĂ (partea II).

### PROBA TEORETICĂ.

I. Un punct material e constrâns a se mişcă pe parabola (fără frecare) $y^2 = 2px$, acţionat de o forţă paralelă cu $Ox$, $X = mf(x)$. Se cere: 1°) mişcarea punctului; 2°) reacţiunea curbei; 3°) care trebue să fie funcţiunea $f(x)$, aşă ca să putem dispune convenabil de constantele iniţiale, pentru ca reacţiunea să fie nulă în tot timpul mişcărei.

II. Un tub circular de secţiune infinit de mică, se poate roti fără frecare în jurul unui ax vertical. Pe acest tub se poate mişcă fără frecare un punct material greu. Să se studieze mişcarea sistemului.

(23 iunie, ora 8).

### PROBA PRACTICĂ.

Să se calculeze elipsa de inerţie a unei bucle de sinusoidă relativă la punctul A de abscisa $\frac{1}{2}\pi$ şi apoi elipsa centrală relativă la centrul de greutate G.

(23 Iunie, ora 15).

## ASTRONOMIA.

### PROBA TEORETICĂ.

Latura $b$ a triunghiului sferic ABC ia o creştere $db = CC_1$, care este o cantitate mică de ordinul I faţă de laturile triunghiului. Ducând prin C arcul de cerc mic CD, cu polul în B şi prin B arcul de cerc mare $BC_1$, se formează triunghiul $CDC_1$. Se consideră triunghiul plan $C'D'C'_1$, ale cărui laturi sunt egale cu ale triunghiului $CDC_1$. Neglijând termenii de ordinul al II-a, se cere:

1°. Să se compare unghiurile celor două triunghiuri $CDC_1$ şi $C'D'C'_1$.

2°. Să se stabiliască expresia diferenţială a creşterii unghiului C în funcţie de creşterea laturii $b$, fără a se recurge la diferenţiarea formulelor finite; se va utilizà pentru aceasta noţiunea de exces sferic. Se aminteşte că expresia excesului sferit $\varepsilon$ este, raza sferei fiind $r$,

$$\varepsilon = \frac{360^0}{2\pi} - \frac{T}{r^2},$$

unde T e suprafaţa triunghiului considerat.

(28 iunie, ora 8).

### PROBA PRACTICĂ.

Se dă triunghiul ABC, în care avem $C = 46°27'12''$, $a = 25°4'38'',4$. Se dă laturei $b$ o creştere $db = 1'',7$ şi se cere creşterea corespunzătoare lui C, ştiind că avem $(dC)^0 = \text{cotg}a\,\text{sîn}C(db)^0$.

(28 iunie, ora 15).

# RECENSII

E. BALLY. — *Géomtérie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre.* — Paris, Gauthier-Villars.

Un volum mic, de aproape 100 pagini, de geometrie pură. Autorul studiază, în special, cardioida şi vestita ipocicloidă cu trei puncte de înapoiere, care se întâlneşte în atâtea chestiuni şi pe care au studiat-o atâţi geometrii. Incepe cu epicicloida generală, pentru care găseşte câtevă proprietăţi geometrice şi îi dă o construcţie cu ajutorul unui paralelogram articulat şi a unui fir. Se ocupă de rectificarea curbei şi de centrul de curbură.

In capitolul al doilea, autorul studiază proprietăţile tangenţiale ale ipocicloidei cu trei puncte de înapoiere şi găseşte, în chip unitar, proprietăţile cunoscute privitoare la axele parabolelor înscrise într'un triunghiu şi la axele iperbolelor circumscrise.

Cartea se citeşte uşor şi e foarte potrivită pentru studenţii de anul întâi, cari doresc ca, alături de geometria analitică, să facă şi cevà geometrie pură. E o carte în felul Principiilor de geometrie modernă a lui DUPORCQ, fără să se apropie de aceasta ca eleganţă de expunere.

G. Ţ.

*Oeuvres de* G.-H. HALPHEN, Tome III. — Paris, Gauthier-Villars.

Acest al treilea volum începe cu o biografie a lui HALPHEN, scrisă de C. JORDAN şi cuprinde, în rândul întâi, lucrarea mare, premiată de Academia de ştiinţe din Paris, asupra reducerii ecuaţilor diferenţiale la forme integrabile. La acest premiu, din anul 1880, se prezintase şi POINCARÉ, cu începuturile sale de studii asupra funcţiunilor fuchsiene, dar această chestiune ne fiind dusă pânăla capăt, memoriul lui HALPHEN, mai bogat în rezultate precise, a fost premiat. Acest memoriu remarcabil prin metoadele şi rezultatele obţinute ocupă mai mult de jumătate din volum, exact 260 pagini. Alături de el, e memoriul premiat de Academia de ştiinţe din Berlin (1882, premiul STEINER) asupra clasificării curbelor algebrice din spaţiu. Vine apoi o scurtă notă asupra ecuaţiilor diferenţiale lineare de ordinul al patrulea, în care se dau câtevà aplicaţii ale invarianţilor pe care îi introdusese el. In legătură cu această notă şi cu memoriul cel mare asupra ecuaţiilor diferenţiale lineare, se reproduce un alt

memoriu foarte interesant asupra invarianților ecuațiilor dif. lineare de ordinul al patrulea. E un memoriu care a servit, în timpul din urmă, drept bază cercetărilor infinitezimale asupra curbelor în spațiu D-lui WILCZYNSKI.

Cum se vede, în acest volum, s'au strâns cele mai interesante lucrări ale lui HALPHEN.

G. Ț.

S. LEFSCHETZ. — *L'Analysis situs et la géométrie algèbrique.* Paris, Gauthier-Villars.

In acest domeniu interesant și delicat, la care a contribuit școala matematică franceză prin lucrărlle lui POINCARÉ și HUMBERT și mai ales prin acelea ale D-lui PICARD și școala matematică italiană prin lucrările D-lor ENRIQUES, CASTELNUOVO și SEVERI, erà greu să se adauge cevà nou. Cu toate astea, D-l LEFSCHETZ își câștigase numele de cunoscător adânc al acestui domeniu prin memoriul premiat în 1919 de Academia de științe din Paris. Volumul începe printr'un studiu al proprietăților generale ale varietăților analitice, după aceea trece la suprafețele algebrice și la studiul sistemelor de curbe duse pe ele, studiind și varietățile algebrice cu mai multe dimensiuni. Ultimele două capitole cercetează integralele legate de suprafețele algebrice.

G. Ț.

L. ROUGIER. — *La matière et l'énergie.* Paris. Gauthier-Villars.

Autorul e filosof, încât cartea, păstrând bază științifică, are tendința filosofică. D-l ROUGIER e unul din cei d'intâi care s'a ocupat, în Franța, de teoriile relativității și erà firesc să studieze, într'un volum deosebit, legătura dintre materie și energie. După ce arată greutățile de care se isbește teoria dualității, adică a despărțirii materiei de energie, arată în ce chip teoriile noi înlătură toate aceste greutăți.

Volumul face parte din publicațiile numeroase, care înfățișează diferitele aspecte interesante ale teoriilor relativității.

G. Ț.

## BIBLIOGRAFIE.

**Journal de mathématiques élémentaires** par H. VUIBERT. Anul 49. No. 4 şi 5, Noemvrie—Decemvrie 1924. Paris.

**Societatea română de ştiinţe.** Buletinul de ştiinţe fizice. Anul XXVI. Ianuarie—Decemvrie 1923.

Idem. Anul XXVII. Ianuarie—Decemvrie 1924.

**Foaia matematică.** Anul I. No. 12. Decemvrie 1924. Chişinău. O corespondenţă remarcabilă, de M. GRÜNBAUM.

G. NANEŞ. Projet de calendrier théorique et pratique. Bucureşti. Imprimeria „Speranţa". Str. Pătraşcu-Vodă 3. 1924. Preţul 20 lei.

## CERERI.

*Răspuns la cererea 110.*

Comunic Domnului G. Buicliu, că-i pot procurà Volumul IV din *„Gazeta Matematică"*.

M. ADAM.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1608. *Se cere să se găsiască aria curbei descrisă de centrul de greutate al unui sector circular* OAB, *care are raza* OA *fixă şi constantă.*

ST. N. MIREA.

Fie $2\theta$ unghiul la centru al sectorului AOB şi G centrul său de greutate. Se ştie că avem:

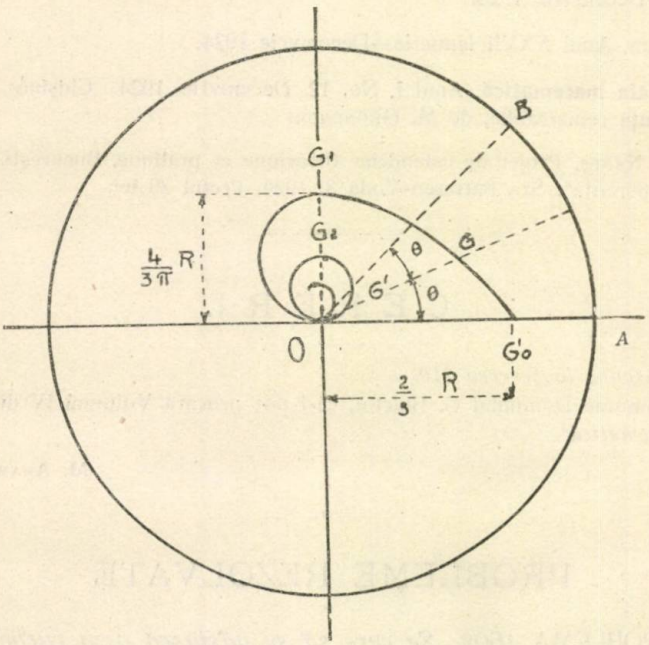
$$OG = \frac{2}{3} R \frac{\sin\theta}{\theta},$$

unde $R = OA$. Astfel fiind, ecuaţiunea locului punctului G, în coordonate polare, este:

$$\rho = \frac{2}{3} R \frac{\sin\theta}{\theta}, \tag{1}$$

O fiind polul şi OA axa polară.

Când $\theta$ variază dela 0 la $+\infty$, locul punctului G e situat în întregime deasupra lui OA şi se compune din ramura $G_0G_1O$ tangentă în O la OA şi dintr'o infinitate de bucle $\beta_1$, $\beta_2$,..., tangente în O la OA, astfel că ramurile $OG'G_2$ sunt din ce în ce mai mari, până se reduc la punctul O.




Ramura $G_0G_1O$ a curbei (1) corespunde valorilor lui $\theta$ cuprinse între 0 şi $\pi$, adică la centrele de gravitate ale sectoarelor al căror unghiu la centru variază dela 0 la $2\pi$. Bucla $\beta_1$ reprezentată prin partea $OG'G_2$ a curbei (1), corespunde valorilor lui $\theta$ cuprinse între $\pi$ şi $2\pi$. Aşà, pentru a aveà centrul de gravitate G' al secţiunile $\pi R^2 + AOB$ trebue să compunem elementele $\pi R^2$ şi $\theta R^2$, care reprezintă aria părţilor componente. Avem astfel:

$$OG' = \frac{\theta}{\pi + \theta} OG \qquad \therefore \qquad OG' = -\frac{2}{3} R \sin \frac{\theta + \pi}{\theta + \pi}$$

şi aşà mai departe pentru celelalte bucle $\beta_2$, $\beta_3$,... mai mici referitoare sectoarelor:

$$2\pi R^2 + AOB, \qquad 3\pi R^2 + AOB....$$

Aria S, pe care se cere s'o calculăm, se compune deci din aria mărginită de ramura $G_0G_1O$ şi dreapta $OG_0$ plus aria tuturor buclelor $\beta_1$, $\beta_2$,... Avem deci

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \rho^2 d\theta = \frac{2}{9}R^2\left\{\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\,d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2(\theta+\pi)\,d(\theta+\pi)}{(\theta+\pi)^2} + \cdots\right\},$$

sau însumând:

$$S = \frac{2}{9}R^2\int_0^{\infty} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\,d\theta.$$

Valoarea integralei din relaţiunea precedentă e cunoscută şi egală cu $\frac{1}{2}\pi$. Această valoare a fost calculată în nenumărate rânduri, chiar în *Gazeta Matematică* (Problema 1009 de Tr. Lalescu, Articolul D-lui Angheluţă Vol. XXX pag. 45, etc.)

Avem deci:

$$S = \frac{\pi R^2}{9}.$$

*Notă.* Au rezolvat problema D-nii: Gh. Balaban, Şerban Gheorghiu, R. T. Ianculescu, Al. Petrescu Pietraru şi Al. N. Stoica. D-l Al. Petrescu-Pietraru a interpretat chestiunea calculând numai aria $G_0G_1O$ cu integrala:

$$S_0 = \frac{2}{9}R^2\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\,d\theta = \frac{2}{9}R^2\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta,$$

desvoltând în serie:

$$S_0 = \frac{2}{9}R^2\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)d\theta,$$

şi integrând:

$$S_0 = \frac{4}{9}\pi R^2\left(1 - \frac{(2\pi)^2}{3.3!} + \frac{(2\pi)^4}{5.5!} - \cdots\right),$$

ceeace arată că parenteza are o valoare mai mică ca $\frac{1}{4}$.

*Observaţiune.* O curbă omotetică curbei (1), care este locul geometric al centrului de greutate al arcelor AB când $\theta$ variază, raportul de omotetie fiind $\frac{3}{2}$ şi centrul de omotetie fiind punctul O, se găseşte studiată în detaliu în cursul de mecanică al lui Collignon (Statique pag. 280 şi următoarele), unde se arată mai multe proprietăţi geometrice foarte interesante, construcţia curbei pe cale mecanică, etc.

St. N. M.

PROBLEMA 3056. *Să se arate că ecuaţiile:*

$$x^3+3(m+1)x^2+(4m+1)x+m=0$$

$$x^4+2(2m+3)x^3+5(2m+1)x^2+(6m+1)x+m=0,$$

*au toate rădăcinile reale, oricare ar fi* m *real.*

TH. ANGHELUŢĂ.

I. Prima ecuaţie se poate scrie

$$f(x)=x^3+3x^2+x+m(3x^2+4x+1)=0.$$

In $f(x)$, să substituim valorile $-1$, $-\frac{1}{3}$, care anulează factorul $(3x^2+4x+1)$.

Obţinem astfel următorul şir de semne:

$$\begin{array}{cccc} f(-\infty) & f(-1) & f(-\frac{1}{3}) & f(+\infty). \\ - & + & - & + \end{array}$$

Ceeace ne arată că $f(x)=0$ are toate rădăcinile reale, oricare ar fi $m$ real şi că aceste rădăcini sunt separate de rădăcinile ecuaţiei

$$3x^2+4x+1=0.$$

Pentru a doua ecuaţie, vom procedă la fel.

$$\varphi(x)=x^4+6x^3+5x^2+x+m(4x^3+10x^2+6x+1).$$

Rădăcinile ecuaţiei

$$4x^3+10x^2+6x+1=0$$

se găsesc lesne, ele fiind:

$$-(2+\sqrt{2})/2\ ,\quad -\tfrac{1}{2}\ ,\quad (-2+\sqrt{2})/2.$$

Substituind aceste valori în $\varphi(x)$, găsim:

$$\varphi\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{(2+\sqrt{2})(10+7\sqrt{2})}{8},$$

de unde, avem imediat:

$$\varphi\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{(2-\sqrt{2})(10-7\sqrt{2})}{8},$$

iar

$$\varphi(-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{6}.$$

Avem deci următorul şir de semne:

$$\varphi(-\infty) \quad \varphi\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \quad \varphi(-\tfrac{1}{2}) \quad \varphi\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right) \quad \varphi(+\infty).$$

$$+ \qquad - \qquad + \qquad - \qquad +$$

Deci ecuaţia $\varphi(x) =$ are toate rădăcinile reale, oricare ar fi $m$ real şi ele sunt separate de rădăcinile ecuaţiei

$$4x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0.$$

Au rezolvat problema, în felul acesta, D-nii: M. ADAM, C. BERDAN, dând rezultate exacte pentru prima ecuaţie.

II. In articolul «Asupra unei clase de ecuaţii algebrice cu toate rădăcinile reale», («G. M.» XXVIII, p. 361), D-l Prof. TH. ANGHELUŢĂ, probează că ecuaţia

$$\mathcal{D}_n = \Delta_n + m D_n = 0,$$

are toate rădăcinile reale, oricare ar fi $m$ real. $D_n$ şi $\Delta_n$ sunt polinoame date sub formă de determinant. Dacă se consideră polinomul

$$\mathcal{D}_3 = \Delta_3 + (m-1)D_3,$$

se găseşte

$$\mathcal{D}_3 = f(x).$$

Iar polinomul

$$\mathcal{D}_4 = \Delta_4 + (m-1)D_4,$$

nu este decât $\varphi(x)$. Deci ecuaţiile, din această problemă, intră în ecuaţiile din articolul citat.

Au rezolvat problema, în modul acesta, D-nii: M. ADAM, M. FOCŞENEANU, E. ŞTEFĂNESCU, O. POPEA.

*Notă.* D-l A. NICULESCU întrebuinţează metoda intersecţiei curbelor. Pentru prima ecuaţie, studiază funcţia

$$y = -\frac{x^3 + 3x^2 + x}{3x^2 + 4x + 1},$$

construeşte curba şi caută intersecţia cu dreapta $y = m$. Găseşte astfel cele 3 rădăcini reale.

Pentru ecuaţia $\varphi(x) = 0$, neconstruind exact curba

$$y = -\frac{x^4 + 6x^3 + 5x^2 + x}{4x^3 + 10x^2 + 6x + 1},$$

nu găseşte rezultatul adevărat.

PROBLEMA 3147. *Să se stabiliască identitatea:*

$$4\begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ c & \beta & a \\ b & a & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta+\gamma+2a & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha+\gamma+2b & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha+\beta+2c \end{vmatrix},$$

*dacă* $a+b+c=0.$

*Avem de asemenea*

$$4\begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ c & \beta & a \\ b & a & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta+\gamma+2a & -\gamma & \beta \\ -\gamma & \alpha+\gamma+2b & -\alpha \\ \beta & -\alpha & \alpha+\beta+2c \end{vmatrix}.$$

A. Guțu.

1. Soluție dată de D-nii: M. Adam și Marin Ștefan (Lic. din Constanța), N. Botea (Lic. Cantemir, București), M. Pătroianu și Gh. Simionescu (Lic. M-rea Dealului), V. Dorneanu, E. Georgescu, M. Georgescu, C. Giurumescu și C. Popovici (Lic. Internat, Iași) și I. Georgescu-Chiriac (Ialomița).

In determinantul din membrul al doilea al identității propuse, scădem ultimele două linii din prima, scoatem factorul comun 2, apoi facem aceeași operație cu coloanele. Obținem succesiv:

$$\Delta=2\begin{vmatrix} a & -(b+\alpha) & -(c+\alpha) \\ \gamma & \alpha+\gamma+2b & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha+\beta+2c \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} \alpha & -(b+\alpha) & -(c+\alpha) \\ -(\alpha+b) & \alpha+\gamma+2b & \alpha \\ -(\alpha+c) & \alpha & \alpha+\beta+2c \end{vmatrix}.$$

Adunăm prima linie la celelalte două și facem aceeași operație cu coloanele; schimbăm semnele elementelor liniei și coloanei întâia; schimbăm linia a doua cu a treia și apoi coloana a doua cu a treia; obținem astfel primul membru al identității propuse.

Pentru a obține identitatea a doua, schimbăm semnele elementelor liniei și coloanei a doua din membrul al doilea al primei identități.

2. Soluție dată de D-l C. Ciorănescu (Lic. M-rea Dealului).

In determinantul din membrul al doilea al identității propuse, adunăm ultimele două linii la prima, apoi ultimele două coloane la prima; scoatem factorul 4, adunăm linia a doua la prima și scă-

dem pe a treia; apoi facem aceleaşi ultime operaţiuni cu coloanele; obţinem astfel primul membru al identităţii propuse.

3. Soluţie dată de D-nii: A. Novac şi O. Burstin (Lic. Internat Iaşi).

In determinantul din primul membru, adunăm coloana a treia la prima, linia a treia la prima; schimbăm linia întâia cu a doua, schimbăm coloana întâia cu a doua; adunăm coloana a treia la prima, adunăm linia a treia la prima şi înmulţim linia a treia cu 2; scădem primele două linii din a treia, după ce am înmulţit-o cu 2 şi, în fine, adunăm primele două linii la a treia; obţinem tocmai determinantul din membrul al doilea.

4. Soluţie dată de D-l Gh. Cosmovici (Lic. Internat Iaşi).

Adunăm, în primul membru, coloana a doua la prima şi a treia la a doua; înmulţim cu 2 coloana a treia şi adunăm diferenţa între prima şi a doua; facem aceleaşi operaţii cu coloanele; schimbăm linia întâia cu a doua, coloana întâia cu a doua, linia a doua cu a treia şi coloana a doua cu a treia; obţinem membrul al doilea.

5. Soluţie dată de D-l V. Vârlan (Lic. Internat Iaşi).

Adunăm, în primul membru, coloana a treia la prima, linia a treia la prima; repetăm operaţia; înmulţim linia a treia cu 2, din care scădem suma celorlalte; facem aceeaşi operaţie cu coloanele şi obţinem membrul al doilea al identităţei propuse.

*Notă.* 1. Au dat soluţiuni, desvoltând ambii membri după regula lui Sarrus, D-nii: L. Căldăraru, A. Comănescu, D. Popescu, D. Teodorescu, N. Mateescu şi I. Vlădea.

2. Identitatea a doua a fost stabilită, în toate soluţiunile, la fel ca în prima soluţie.

3. D-l M. Adam, făcând ipoteza mai generală:

$$a+b+c=2p,$$

stabileşte identitatea:

$$4\begin{vmatrix} \alpha+p & c-p & b-p \\ c-p & \beta+p & a-p \\ b-p & a-p & \gamma+p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta+\gamma+2a & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha+\gamma+2b & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha+\beta+2c \end{vmatrix}$$

şi o identitate analoagă, în ipoteza

$$-a+b-c=2p,$$

care, de fapt, se deduce din prima, schimbând pe $a$ în $-a$, iar pe $c$ în $-c$.

M. G.

PROBLEMA 3148. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{pn^p(n+2)^p} \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p(n+1)^{2p}}.$$

*După aceea, să se rezolve ecuația:*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p(x+1)^{2p}} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{p(x+1)^p} + a = 0.$$

*Câte soluții reale avem în general? Problema e totdeauna posibilă?*

P. SERGESCU.

Soluție dată de D-nii: NICU P. ARCADIAN (cl. VIII Caracal) și EDGAR RUSSU (Lic. Internat, Iași).

Pentru ca problema să aibă un sens, trebue ca seriile date să fie convergente. Vom considerà deci cele două serii care formează identitatea. Raportul a doi termeni consecutivi în seria cu toți termenii pozitivi $\sum \frac{1}{p(n+1)^{2p}}$, este $\frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$. Când $p$ tinde către $\infty$, limita acestui raport e $1/(n+1)^2$. Deci seria nu poate fi convergentă, în baza «teoremei raportului», decât când

$$(n+1)^2 \geqslant 1 \qquad \therefore \qquad n(n+2) \geqslant 0.$$

Deci:

$$\text{sau } n > 0, \qquad \text{sau } n < -2.$$

Căci pentru cazurile limită $n = 0$ și $n = -2$, seria din partea I a identității nu are niciun sens. De altfel, când $n > 2$ sau $n < -2$, seria $\sum \frac{(-1)^{p+1}}{pn^p(n+2)^p}$ are termenii cu semne alternate. Pentru ca ea să fie convergentă, e deajuns ca valoarea absolută a termenului general să tindă către 0. Cu alte cuvinte, trebue ca $p[n(n+2)]^p$ să tindă către $\infty$, când $p$ tinde către infinit. Dar aceasta nu se întâmplă când $|n(n+2)| < 1$, căci atunci limita produsului este *zero*. In adevăr, produsul e atunci de forma $p/a^p$, unde $|a| > 1$. Prin urmare, pentru ca seria să fie convergentă, trebue să avem:

$$|n(n+2)| \geqslant 1 \qquad \therefore \qquad n^2 + 2n - 1 \geqslant 0.$$

Deci:

$$\text{sau } n \leqslant -1 - \sqrt{2}, \qquad \text{sau } a \geqslant -1 + \sqrt{2}.$$

($n$ e presupus *real*). Aceste limite cuprind pe cele găsite mai sus pentru convergența seriei din partea a doua. De altfel, «teorema raportului» permite să deducem că dacă $n < -1-\sqrt{2}$ sau $n > -1+\sqrt{2}$, seria alternată e absolut convergentă. In definitiv, pentru ca seriile, care formează identitatea, să aibă un sens, trebue: Sau $n < -1-\sqrt{2}$, sau $n > -1+\sqrt{2}$. Numai când $n$ satisface la una din aceste identități, problema e posibilă.

Un raționament analog dovedește că ecuația propusă nu are niciun sens, decât când seriile sunt convergente, ceeace se întâmpă când $|x+1|>1$; adică:

$$(x+1)^2 > 1. \qquad \therefore \qquad x > 0; \qquad x < -2.$$

Seriile date sunt cazuri particulare ale desvoltării în serie a funcțiunei $\log(1+\alpha)$. Această desvoltare este cunoscută. Pentru $|\alpha|<1$, avem:

$$\log(1+\alpha) = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \ldots = \sum \frac{(-1)^{p+1}\alpha^p}{p}.$$

Punând:

$$\alpha = 1/n(n+2),$$

obținem:

$$\sum \frac{(-1)^{p+1}}{pn^p(n+2)^p} = \log\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) = \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

sub condiția:

$$\left|\frac{1}{n(n+2)}\right| < 1 \qquad \therefore \qquad |n(n+2)| > 1,$$

condiție pe care am întâlnit-o mai sus și pe care am presupus-o îndeplinită (pentru ca problema să fie posibilă).

De asemenea, punând:

$$\alpha = -1/(n+1)^2,$$

avem:

$$+\sum \frac{1}{p(n+1)^{2p}} = -\log\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$= \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)},$$

cu condiția

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| < 1 \qquad \therefore \qquad (n+1)^2 > 1.$$

care e satisfăcută. Din compararea celor două şiruri de egalităţi, care au un membru comun: $\log (n+1)^2/n(n+2)$, se deduce identitatea propusă.

E uşor de construit o infinitate de identităţi analoage, dând lui $\alpha$ succesiv valorile $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ alese astfel ca:

$$(1+\alpha_1)(1-\alpha)=1,$$

căci atunci

$$\sum \frac{(-1)^{p+1}\alpha_1^p}{p} = \log(1+\alpha_1) = -\log(1-\alpha_2) = \sum \frac{\alpha_2^p}{p}.$$

Evident, se pot face generalizări de tot felul, dar trebue să se ţină seamă totdeauna de condiţiile în care problema e posibilă.

Pentru rezolvarea ecuaţiei, observăm că punând

$$\alpha = -1/(x+1)^2,$$

primul termen se reduce la:

$$\sum \frac{1}{p(x+1)^{2p}} = -\log\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \log\frac{(x+1)^2}{x(x+2)},$$

iar punând

$$\alpha = 1/(x+1),$$

avem:

$$\sum \frac{(-1)^{p+1}}{p(x+1)^p} = \log\left(1+\frac{1}{x+1}\right) = \log\frac{x+2}{x+1}.$$

Ca atare, când problema are un sens, ecuaţia dată se reduce la:

$$\log\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} + 2\log\frac{x+2}{x+1} + a = 0,$$

$$\log(x+2)/x + a = 0,$$

$$(x+2)/x = e^{-a},$$

$$x = 2/(e^{-a}-1) = 2e^a/(1-e^a).$$

Ecuaţia are o singură rădăcină. Mai trebue să verificăm că această rădăcină satisface la condiţia ca ecuaţia să aibă un sens, adică este: sau pozitivă, sau negativă inferioară lui $-2$.

Când $a<0$, avem $e^{-a}>1$, deci $x>0$, una din negalităţi e satisfăcută. Când $a>0$, avem $0<e^{-a}<1$ şi, prin urmare, $x=2/(e^{-a}-1)<-2$, cealaltă din inegalităţi e satisfăcută. In definitiv, ecuaţia admite o rădăcină când $a\neq 0$. Pentru $a=0$, ecuaţia devine

$$(x+2)/x = 1$$

şi nu are soluţie finită.

PROBLEMA. 3196 *Să se rezolve sistemul*:

$$\sin(x+y) = \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y,$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \sin x + \sin y.$$

I. IONESCU.

Sinusul și tangenta se anulează pentru aceleași unghiuri. De aci, rezultă o primă serie de soluții:

$$x = k_1\pi, \qquad y = k_2\pi. \tag{1}$$

Prima ecuație ne dă:

$$\sin(x+y) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y},$$

$$\frac{\sin(x+y)(1-\cos x \cos y)}{\cos x \cos y} = 0.$$

Cum $\cos x$ și $\cos y$ nu pot deveni infiniți, reese că această ecuație se desface în următoarele două:

$$\sin(x+y) = 0, \qquad \cos x \cos y = 1. \tag{2}$$

Prima ne dă:

$$x + y = k\pi. \tag{3}$$

Pentrucă cosinusul nu trece în valoare absolută peste 1, a doua ecuație nu poate fi satisfăcută de cât în modul următor:

$$\cos x = 1, \quad \cos y = 1, \quad \text{sau} \quad \cos x = -1, \quad \cos y = -1,$$

de unde scoatem:

$$\begin{aligned} x &= 2m\pi, \quad \text{sau} \quad x = (2p+1)\pi, \\ y &= 2n\pi, \qquad\quad y = (2q+1)\pi. \end{aligned} \tag{4}$$

Aceste soluții sunt însă coprinse în cele date de (1), căci putem pune $k_1 = 2m$, $k_2 = 2n$, sau $k_1 = 2p+1$, $k_2 = 2q+1$. De aceea, nu ne vom mai ocupă de aceste soluții. Rămâne de examinat cazul (3). Inlocuind pe $(x+y)$ în a doua din ecuațiile date, găsim:

$$0 = \sin x + \sin y,$$
$$\sin x = -\sin y = \sin(-y),$$
$$\begin{aligned} x &= 2k'\pi - y, \quad \text{și} \quad x = (2k''+1)\pi + y, \\ x + y &= 2k'\pi, \qquad\quad x - y = (2k''+1)\pi. \end{aligned}$$

Prima din aceste ecuații coincide cu cea dela (3), dacă luăm pe $k$ cu soț. Deci dacă $\alpha$ este un unghiu oarecare, atunci avem noua serie de soluții:

$$x = \alpha, \qquad y = 2k'\pi - \alpha. \tag{5}$$

A doua din relațiile (4), combinată cu (3), ne dă:

$$x = (k + 2k'' + 1)\tfrac{1}{2}\pi, \qquad y = (k - 2k'' - 1)\tfrac{1}{2}\pi.$$

Vom deosebi două cazuri, după cum $k$ este pereche sau nepereche. In primul caz, punem $k = 2r$ și în al doilea $k = 2s + 1$, și avem:

$$\begin{cases} x = (r + k'')\pi + \tfrac{1}{2}\pi, \\ y = (r - k'')\pi - \tfrac{1}{2}\pi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (s + k'' + 1)\pi \\ y = (s - k'')\pi. \end{cases}$$

Prima soluție intră în tipul (5), căci putem lua $\alpha = (r + k'')\pi + \tfrac{1}{2}\pi$ și $k' = r$. A doua soluție intră în tipul (1), căci putem lua $k_1 = (s + k'' + 1)$ și $k_2 = (s - k'')$.

Rămân dar ca soluții numai seriile de valori date de (1) și (5). Ele nu sunt însă complet independente, căci în (5) se coprind și unele din soluțiile date de (1), și anume acelea pentru care $\alpha = k_1\pi$ și $k_2 = (2k - k_1)$. Numai dacă $k_1$ și $k_2$ sunt de paritate diferită, soluțiile date de (1) nu intră în tipul (5). Pentru ca (1) să dea soluții diferite de (5), vom lua:

$$x = k_1\pi, \qquad y = (k_1 + 2k_2 + 1)\pi. \tag{6}$$

Soluțiile problemei sunt deci date de (5) și (6).

Dacă ne raportăm la cercul trigonometric, putem enunța astfel rezultatul obținut: Sunt soluții ale problemei:

1. Două arce cu extremitățile simetrice față de diametrul AA' pe care se măsoară cosinusurile. Aci intră și cazul când extremitățile celor două arce se confundă de odată în A sau în A'.

2. Două arce, având unul extremitatea în A și altul în A'.

Primul caz corespunde tipului (5), și al doilea tipului (6).

Toți corespondenții nu au discutat amănunțit soluțiile găsite, din care cauză nu au obținut decât soluții parțiale. Astfel:

1. Au găsit arcele având deodată extremitățile în A și A', D-nii: I. C. Vasiliu, C. I. Ciorănescu, O. Braester, L. Căldăraru, P. I. Ionescu, O. Florescu.

2. Arcele date de (1), D-nii: L. Kahane, M. Adam.

3. Arcele cu extremitatea în A, D-nii: I. Teodorescu, C. Giurumescu, G. Simionescu, C. C. Popovici, E. Pălărieru, M. Stamatiu, G. David.

4. Arcele date de (5), D-nii: M. I. Pătroianu, L. Weiss, N. Botea.

PROBLEMA 3205. *Să se construiască trei cercuri de raze date, astfel ca centrul lor radical să fie centrul unuia din aceste cercuri.*

C. D. MIHĂESCU.

Să căutăm, mai întâi, condiția pentru ca axa radicală a două cercuri $O_1$ și $O_2$ să treacă prin centrul unuia din aceste două cercuri. Fie M intersecția dintre axa radicală și dreapta $O_1O_2$ care unește centrele celor două cercuri, $R_1$ și $R_2$ razele lor și să presupunem că avem $R_1 < R_2$.

După definiția axei radicale, avem:

$$\overline{MO_1}^2 - R_1^2 = \overline{MO_2}^2 - R_2^2. \qquad (1)$$

Se vede ușor că $\overline{MO_2}$ nu poate fi nulă, căci am obține pentru $\overline{MO_1}$ o valoare imaginară. Deci axa radicală nu poate trece prin centrul cercului celui mai mare.

Dacă M coincide cu $O_1$, atunci relația (1) ne dă pentru distanța între centrele celor două cercuri

$$\overline{O_2O_1}^2 = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1), \qquad (2)$$

a cărei determinare este cunoscută.

Vom construi deci, mai întâi, cercul cu raza cea mai mică $R_1$, iar prin centrul său $O_1$ vom duce o dreaptă oarecare $d_1$. Prin centrul $O_1$ ducem o perpendiculară pe care luăm o lungime $O_1O_2$ egală cu cea dată de formula (2). Cercul, care are ca centru punctul $O_2$ și trece prin punctele de intersecție ale dreptei $d_1$ cu cercul $O_1$, are ca rază pe $R_2$, iar axa radicală a cercurilor $O_1$ și $O_2$ este dreapta $d_1$.

In mod analog, după ce ducem prin $O_1$ o altă dreaptă $d_2$ și facem aceiași construcție ca mai sus, obținem centrul $O_3$ al celui de al treilea cerc.

Pentru o poziție a lui $O_1$, putem avea pentru $O_2$ o infinitate de poziții, iar după ce pozițiile lui $O_1$ și $O_2$ sunt fixate, putem avea pentru $O_3$ o infinitate de poziții. Problema este deci nedeterminată, sau mai bine zis putem construi o infinitate de cercuri cu razele $R_2$, $R_3$, $R_4$,... $R_n$ al căror centru radical să fie în centrul unui cerc $O_1$ cu raza $R_1$, cu condiția ca

$$R_1 < R_i \qquad (i = 2, 3, \ldots n).$$

In mod absolut analog, putem rezolvà problema și în cazul unor sfere.

MIRCEA ADAM.
Constanța.

D-nul C. I. VASILIU a dat o soluţie analoagă cu precedenta.

Au rezolvat problema şi D-nii: GH. D. SIMIONESCU, M. I. FOCŞENEANU, M. I. PĂTROIANU, N. G. BOTEA, PAUL I. IONESCU, VALERIU MANAFU, O. POPEA, TR. D. PĂUNESCU (Piteşti), LEON CĂLDĂRARU, OTTO I. BRAEŞTER, I. A. SCHÄCHTER, SOLOMON WEISS, GH. N. PREDESCU şi ILIE POPA.

---

PROBLEMA 3225. *Se consideră un patrat* ABCD *şi triunghiul* AED, *al cărui vârf* E *se află pe cercul circumscris patratului. Fie* H *ortocentrul triunghiului* AED *şi* L, M *intersecţiile dreptelor* BH *şi* CH *cu laturile* EA *şi* ED. *Să se demonstreze că dreapta* LM *este paralelă cu latura* BC *a patratului şi egală cu jumătatea ei.*

ION ŢIGOIU.

Soluţie dată de D-nii: ION C. VASILIU, OVIDIU BOLGIU, N. G. BOTEA, SOLOMON WEISS, VIRGIL GHIŢESCU, DUMITRU G. NESTOR (Elev Cl. V Liceul Cantemir), AL. AL. ROŞU, I. I. GEORGESCU, PAUL IONESCU, VALERIU MANAFU, GH. D. SIMIONESCU, M. I. PĂTROIANU, C. I. CIORĂNESCU, SPIREA POPESCU (Elevi Liceul Mânăstirea Dealului), VASILE VÂRLAN, V. S. DORNEANU, ADRIAN NOVAC, C. GIURUMESCU (Elevi Liceul Internat, Iaşi), H. MARCOVICI, HAMI COHN, SYMON KATZ, L. KATZ (Elevi Liceul Laurian, Botoşani), VIRGIL COŞNIŢĂ, EM. GH. GAIU (Elevi Liceul Codreanu, Bârlad), DAN AL. PETRESCU (Elev Cl. VI Liceul Militar, Craiova), ION TH. POPOVICI, O. POPEA, MAX BERNSTEIN, AURELIU STOICA, V. A. CAZACINCU (Cl. VIII particulară), TR. D. PĂUNESCU (Piteşti), GR. I. MAREŞ (Elev Cl. VI Liceul Ferdinand, Bacău), ION VLĂDEA (Elev Cl. VII Liceul A. Şaguna, Braşov), ION M. MIU (Elev Cl. VI Liceul Caracal), GH. COJOC (Cl. VII Liceul Piatra-N.), N. C. SEGĂRCEANU, LEON M. BRÜLL (Elevi Liceul Cantemir), CONST. IONESCU-BUJOR, ARNO KAHANE, LEON CĂLDĂRARU, PAUL BLEIWEISS, FILIP S. GOLDSTEIN, EUGEN PĂLĂRIERU, CORNELIU N. POPESCU (Elevi Cl. V, Giurgiu), VALERIU G. STAMAŢESCU, PETRE MIRESCU, EMILIAN ILIESCU (Studenţi), D. G. MILCULESCU, MIRCEA ILIESCU (Elevi Cl. VI Liceul Mânăstirea Dealului), OCTAVIAN M. FLORESCU (Liceul Caracal), GH. N. PREDESCU (Cl. VIII, Piteşti), D. I. SEVASTRE (Liceul Bârlad), CONST. C. POPOVICI, MARIUS GEORGESCU (Liceul Internat, Iaşi), VASILE P. ANASTASIU (Liceul Laurian), R. I. SPATHY (Liceul

Matei Basarab), ILIE POPA (Liceul Internat Iaşi), ATH. RADEV (Iambol, Bulgaria).

Dreptele DH şi CE sunt paralele fiind ambele perpendiculare pe EA. La fel, EH e paralelă cu CD. Urmează că figura CDHE este un paralelogram şi deci M este mijlocul diagonalei DE.

Analog, demonstrăm că L este mijlocul diagonalei AE a paralelogramului BAHE. Rezultă atunci, din triunghiul EAD, că LM este paralelă cu AD şi egală cu jumătatea acestei laturi. LM va fi deci paralelă cu BC şi egală cu $\frac{1}{2}\overline{BC}$.

D-nii: ION C. VASILIU, OVIDIU BOLGIU, N. G. BOTEA, SOLOMON WEISS, VIRGIL GHIŢESCU şi DUMITRU G. NESTOR au arătat că problema subsistă când, în loc de un patrat, considerăm un dreptunghiu ABCD şi facem aceleaşi construcţiuni.

---

PROBLEMA 3231. *Să se demonstreze neegalitatea:*

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > \sqrt[4]{64ab(a+b)^2}.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: A. POP (Student, Cluj); AL. AL. ROŞU, D. G. MILCULESCU, M. ILIESCU, I. VASILIU, P. I. IONESCU, C. I. CIORĂNESCU, M. PĂTROIANU, I. I. GEORGESCU RACOVIŢĂ (Lic. Mănăstirea Dealului); N. BOTEA, AL. CR. MLADENOVICI (Lic. Cantemir, Bucureşti); TR. D. PĂUNESCU (Lic. Piteşti); P. G. CRISTEA, N. TEODORESCU (Lic. Sp. Haret, Bucureşti); A. MARCOVICI, C. HANN, S. KATZ (Lic. Botoşani); G. N. PREDESCU (Lic. Piteşti); C. N. POPESCU (Lic. Giurgiu); P. G. SPACU (Cluj); S. WEISS (Lic. Galaţi); N. G. BEŞCHEA (Lic. Meşotă Braşov); POPA ILIE, M. GEORGESCU, V. DORSEANU, C. C. POPOVICI, V. VÂRLAN (Lic. Iaşi); P. BLEIWEISS (Lic. Cantemir, Bucureşti); R. I. SPATHY (Lic. Matei Basarab, Bucureşti); E. MASSLER, L. CĂLDĂRARU, A. IONESCU.

Ridicând la puterea a doua ambii membri ai neegalităţii date, avem:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4 > \sqrt{64(a+b)^2 ab},$$

$$(a+2\sqrt{ab}+b)^2 > 8(a+b)\sqrt{ab},$$

$$a^2+4a\sqrt{ab}+6ab+4b\sqrt{ab}+b^2>8a\sqrt{ab}+8b\sqrt{ab},$$

$$a^2-4a\sqrt{ab}+6ab-4b\sqrt{ab}+b^2>0,$$

$$(a-2\sqrt{ab}+b)^2>0,$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4>0.$$

Această neegalitate este evidentă. Neegalitatea devine egalitate pentru $a=b$, ceeace se poate verifică şi direct.

*Notă.* Calculele se uşurează dacă punem $\sqrt{a}=\alpha$, $\sqrt{b}=\beta$, după cum au arătat mai mulţi corespondenţi.

Soluţie şi generalizare dată de D-l E. Ştefănescu (Student, Bucureşti).

Fie :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2n}=(a^n+C_{2n}^2\,a^{n-1}\,b+C_{2n}^4\,a^{n-2}\,b^2+\cdots+b^n)+$$
$$\sqrt{ab}\,(C_{2n}^1\,a^{n-1}+C_{2n}^3\,a^{n-3}\,b+\cdots+C_{2n}^1\,b^{n-1}).$$

Scriind că media aritmetică a celor două părţi întrece media aritmetică avem :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2n}>\sqrt[4]{16ab(a^n+C_{2n}^2a^{n-1}b+\ldots+b^n)^2(C_{2n}^1a^{n-1}+\ldots+C_{2n}^1b^{n-1})^2}.$$

In mod analog găsim :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\cdots+\sqrt{l})^2>\sqrt[4]{64(a+b+\ldots+l)^2\,(\Sigma ab)^2}.$$

Pentru trei termeni avem :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2>\sqrt[4]{24(a+b+c)^2(ab+ac+bc+2\sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}.$$

## EXERCIŢII

36. Care sunt patratele de cinci cifre, care rămân tot patrate, dacă schimbăm între ele primele două cifre şi ultimele două ?

G. Vasiliu.

R. Ultimele cifre nu pot fi decât 00, 16, 44, 61, 69 şi 96, căci numai acestea inversate mai pot terminà un patrat. Se caută patratele de cinci cifre terminate cu ele şi se găsesc soluţiile 22500, 44100, 44944, care sunt patratele numerelor 150, 210, 212.

37. Care sunt patratele de cinci cifre la care numărul format de cifra a treia şi a patra este îndoitul numărului format de primele două cifre ?

P. BLEIWEISS.

R. Fie *dmszu* patratul căutat. Dacă *zu* este 00, atunci *s* poate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9, şi găsim apoi pe *dm* luând jumătatea lui *sz*. Cercetăm dacă numărul de cinci cifre este patrat.

Se găsesc soluţiile 10201, 40804, 42849, care sunt patratele numerelor 101, 202, 207.

38. Se cere restul împărţirii prin 31, al sumei :

$$1925^{1895} + 1895^{1925}.$$

S. KATZ.

R. Avem $1925 = 62 \times 31 + 3$ şi $1895 = 61 \times 31 + 4$. Apoi $1895 = 63 \times 30 + 5$ şi $1895 = 64 \times 30 + 5$. Deci trebue căutat restul lui :

$$(3^{63})^{30} \times (3^5) + (4^{64})^{30} \times 4^5.$$

După teorema lui FERMAT, parentezele dau restul 1. Se găseşte apoi că $3^5$ dă restul 26 şi $4^5$ restul 1. Restul căutat este 27.

39. Există perechi de fracţiuni, aşà că adunând numărătorul uneia cu numitorul celeilalte, sumele să fie în acelaş raport ca şi suma numărătorilor către suma numitorilor ?

C. I. CIORĂNESCU.

R. Din :

$$\frac{a+b'}{b+a'} = \frac{a+a'}{b+b'},$$

ese :

$$(a'-b')\ (a+b+a'+b') = 0.$$

Deci $a' = b'$. A doua fracţie trebuie să fie egală cu 1.

40. Fie O centrul radical a trei cercuri date, cu centrele A, B, C ; $A_1$, $A_2$ ; $B_1$, $B_2$ ; $C_1$, $C_2$ punctele de contact ale tangentelor duse din O la cele trei cercuri. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor $AA_1A_2$, $BB_1B_2$, $CC_1C_2$ au punctul O ca centru radical.

SERGIU VASILACHE.

R. Unghiurile din $A_1$ şi $A_2$ fiind drepte, cercul descris pe OA ca diametru trece prin $A_1$ şi $A_2$, etc.

41. Să se construiască un triunghiu cunoscând centrul O al cercului circumscris, ortocentrul H şi distanţa *d* dela ortocentru la o latură.

SYMON KATZ.

R. Direcţia laturei este aceea a unei tangente dusă la cercul descris din H ca centru cu *d* ca rază. Piciorul A' al perpendicularei scoborîte din O pe

tangentă va fi mijlocul laturei. Determinăm apoi centrul de greutate G, împărţind pe OH în raportul 1 : 2 ; prelungim pe A'G cu distanţa GA=2 GA'; A este un vârf al triunghiului, iar celelalte două se obţin descriind cercul cu centrul O şi raza OA.

42. Intre unghiurile unui triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\frac{\cos A \cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C} + \frac{\cos B \cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C \sin\frac{1}{2}A} + \frac{\cos C \cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B} = 8 \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C.$$

EMIL ŞTEFĂNESCU.

R. Dacă înmulţim ambele părţi cu $4 \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$, obţinem relaţia cunoscută $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$.

## PROBLEME PROPUSE*).

*) *Rectificare.* La problema 3194, relaţia ce se cere a se demonstră este

$$\frac{\overline{XA_1}}{R+r-h_a} = \frac{\overline{YB_1}}{R+r-h_b} + \frac{\overline{ZC_1}}{R+r-h_c},$$

BC fiind latura cea mai mare a triunghiului ABC.

(V. C.)

3233. *) Care patrate de trei cifre sunt alături de numere prime, în şirul natural al numerelor?

G. TAILER.

3251. Intr'un tratat vechiu de măsuri şi greutăţi, găsesc următoarele: «*Stogul*, un volum de fân, care are 8 stânjeni peste cap şi 9 împrejur la bază sau burta cea mare.»

Câţi stânjeni cubi are un stog? Se va presupune că stogul este conic, sau jumătatea de jos cilindrică şi cea de sus conică. Studenţii şi elevii ingineri vor presupune că generatoarea este o parabolă.

I. IONESCU.

3252. Fie A, B, C, D patru numere întregi prime faţă de un al cincilea număr N. Să se găsiască condiţia ca expresiunea:

*) Problema propusă cu acest număr, fiind cunoscută, se anulează şi se înlocueşte cu prezenta. Cu această ocazie, se reaminteşte corespondenţilor noştri că articolele, notele, exerciţiile şi problemele propuse ce ne trimit spre publicare, să fie originale, nu luate de prin cărţi, reviste străine, sau numere mai vechi ale revistei noastre.

$$E \equiv A.B^{\lambda} + B.C^{\lambda} + C.D^{\lambda} + D.A^{\lambda}$$

să fie divizibilă prin N, știind că $(\lambda - 1)$ este indicatorul lui N.

CĂPITAN GR. ZAPAN.

3253. La o serbare militară, fiecare armă: infanterie, cavalerie, artilerie, geniu, etc., trimit ca reprezentanți un general și un colonel. In câte moduri ar puteà fi așezați acești ofițeri superiori pe o linie, așà în cât niciodată un colonel dintr'o armă să nu se afle la dreapta generalului din aceeași armă?

C. I. CIORĂNESCU.

3254. Cercurile adjuncte (BC) și (CB) ale unui triunghiu ABC taie laturile AB, AC respectiv în $M_1$ și $M_2$. Să se arate:

1) Că tangentele în $M_1$ și $M_2$ la cercurile (BC) și (CB) se taie într'un punct M al cercului $AM_1M_2$;

2) Că tangentele în B și C la cercurile (BC) și (CB) se taie pe cercul circumscris lui ABC, iar dreapta lui SIMSON a punctului de intersecție, în raport cu triunghiul ABC, este paralelă cu diametrul AO al cercului ABC.

B. M. BARBĂLATT.

3255. Fie D, E, F, punctele de contact ale cercului înscris într'un triunghiu ABC, cu laturile BC, CA, AB. Dreptele DE și DF taie cercul circumscris triunghiului ABC respectiv în punctele $C_1$, $C_2$, și $B_1$, $B_2$ (punctele $B_1$, $C_1$ fiind situate deasupra laturei BC și $B_2$,$C_2$ dedesupt). Să se găsiască relația ce trebue să existe între laturile triunghiului ABC, pentru ca perechile de drepte $AB_2$, $BC_1$, și $AC_2$, $CB_1$ să se întâlniască pe dreapta EF și să se arate că, în acest caz, BC este simediană în triunghiurile $BB_2C_1$ și $CC_2B_1$.

OCTAV ORĂNESCU.

3256. Intr'un triunghiu dreptunghic $A_1B_1C_1$, fie $O_1$ mijlocul ipotenuzei $B_1C_1$ și A, B, C simetricele vârfurilor $A_1, B_1, C_1$ în raport cu laturile opuse; iar în triunghiul ABC, fie: H ortocentrul, O centrul cercului circumscris, A' piciorul înălțimei AH, A'' punctul unde AH întâlnește a doua oară cercul circumscris, $H_1$ mijlocul segmentului AH. Se cere să se demonstreze:

1) Că figura $OAO_1H$ este un paralelogram;

2) Că avem relațiunile

$$tgB = 3\,tgB_1, \quad tgC = 3\,tgC_1, \quad tgA \geqslant 3:4,$$

$$\overline{HA'} = \frac{1}{2}\overline{A_1H} = \frac{1}{4}\overline{HH_1} = \frac{1}{6}\overline{AA_1} = \frac{1}{9}\overline{AA'} = \frac{1}{10}\overline{AA''}.$$

V. Cristescu.

3) Să se afle cea mai mare valoare pe care o poate luà raportul dintre razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și ABC.

Emil Ștefănescu.

3257. Să se demonstreze că, dacă A, B, C, D, E, F sunt coeficienții termenilor unei ecuațiuni complete de gradul al doilea în $x$ și $y$ și dacă $a$ și $b$ sunt un sistem de soluțiuni ale sistemului de ecuații:

$$(AC-B^2)x^2+(B^2-AC)y^2+2(CD-BE)x$$
$$+2(BD-AE)y+CF-AF+D^2-E^2=0$$

$$(AC-B^2)xy+(AE-BD)x+(CD-BE)y+DE-BF=0,$$

atunci fiecare din sumele

$$2B(Ba+Cb+D)+(Aa+Bb+E)[A-C\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}]$$

sunt nule.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

3258. Să se găsiască limita expresiei:

$$E = \frac{\lg.[(q+1)^p+(q+2)^p+\ldots\ldots+(q+n)^p]}{\lg(q+n)},$$

când $n$ crește nemărginit, $p$ și $q$ fiind numere oarecare.

Marin Ștefan.

3259. Să se rezolve ecuația:

$$x^{x-2}-x!=x.$$

Căpitan I. Linteș.

3260. Să se determine funcțiunea $f(x)$, așà în cât:

$$f(a-x)=\alpha f(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x),$$

$a$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ fiind constante.

A. Angelescu.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Adam M.* (N); *Adolf Marcel* (3222); *Bădescu R.* (P); *Beschia N.* (3231, 33, E, R); *Blaha N.* (P): *Bleiweiss P.* (3207, 31, 37); *Bolgiu O.* (3244, N); *Botea N.* (3191, 96, 237, 42, 46, 47, P); *Braișter I. Otto* (3191); *Brüll Leon* (3237); *Căldăraru L.* (3237, 47, N); *Călin Gh.* (3222, 33, E); *Ciorănescu I. C.* (3102, 26, 52, 87, 91, 216, 37, 47, E, N, R); *Ciorănescu I. N.* (3234); *Coșniță V.* (3216); *Cristea P.* (3222); *Cristescu I.* (3233); *David Gh.* (3196, 202, 21, 22, N, P); *Diaconescu T.* (3092, 207, 22, E); *Dimitrescu M.* (3062, 217, 22, E, R); *Dorneanu V.* (3207, 31); *Drâmbă C.* (3202, 15); *Felix C. S. C.* (3247); *Florescu O.* (3196, 207, 18, 22); *Gataianțu V. B.* (3093, 207, 22, E); *Georgescu M.* (3222, 31); *Georgescu-Racoviță I.* (2929, 3017, 62, 224, 31, C, E); *Ghelber M.* (3247); *Ghimicescu Gh.* (3207); *Goldstein F.* (3191, 233, 34); *Hann C.* (3231); *Ianculescu O.* (3207, P); *Ionescu A.* (3231); *Ionescu-Bujor C.* (3102, E); *Ionescu Paul* (3102, 26, 237, E); *Istinie I. C.* (3222); *Kahane A.* (3217, 21); *Katz S.* (3157, 212, 31, P); *Manafu V.* (2929, 3172, 207, 22, 24); *Manoil Ad.* (3217); *Marcovici H.* (3231); *Marin St.* (3078, E, N); *Massler M. E.* (3202, 22, 31, 44); *Mihăescu N.* (R); *Mihăilescu N.* (3162, 72); *Mihoc Gh.* (3131); *Mirescu P.* (3237); *Miu I.* (2929, P); *Păiărieru E.* (3131); *Pătroianu M.* (3136, 82, 87, 202, 04, 06, 09, 18, 31, E); *Petru C. Gr.* (3231); *Pop Alex.* (3237); *Popa I.* (3207, 18, 31, R); *Popea O.* (3102, 58, 82, 91, 224, 37, P); *Popescu C.* (3158, 231); *Popescu D.* (3247, E); *Popescu Sp.* (2929, 3062); *Popovici C.* (3231); *Popovici Th. I.* (3222, E, N, P); *Predescu G.* (3231); *Radeff At.* (3214, 18, 25, 39, 47, 48); *Roșu Al. Al.* (2929, 3024, 31, 62, 202, 07, E); *Samoilă D.* (3207, 18); *Schächter I.* (3093, 158, E); *Schächter O.* (3158); *Segărceanu N.* (3207); *Simionescu D. G.* (3164, 65, 82, 91, 206, 13, 18); *Spacu P.* (3218, 31, 48); *Spathy R.* (3222, 31, 48); *Stamatiu M.* (3167, 96); *Stoica A.* (3207, 47, E); *Stroescu Gh.* (3207); *Tailer G.* (E, N, P): *Țânțăreanu P.* (3158); *Tauber Al.* (3131, 97); *Teodorescu N.* (3131, 91, 207, 18, 31, N, P); *Țigoiu I.* (3172); *Udrisky T.* (3199); *Vârlan V.* (3207, 31); *Vasilescu C. I.* (3191); *Vasiliu I.* (2298, 3126, 216, 17, 36, 37, E, N, R); *Velea M.* (3247, 48, R); *Vulpanovici B.* (3102); *Weiss S.* (3187, 231, 44, 46, N, P).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2346, 59, 95, 421, 36, 43, 640, 83, 94, 706, 861, 79, 91, 906, 18, 20, 31, 3040, 42, 59, 92, 140, 58, 67, 73, 84, 85, 95, 203, 13, 29, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43 și 48, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

## Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE"

### 29 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu**, *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu**, *Tratat de Geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu**, (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, București).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.**

Mod Asociațiunea pentru cultură și literatura Poporului Român Sibiu

# GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1925.

SUMARUL

1. Chestiunea calendarului . . . . . *C. D. Orăşanu.*
2. Patrate decapitate . . . . . *Emil Ştefănescu.*
3. Note Matematice: 32—38.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografii.
6. Cereri: 119.
7. Probleme rezolvate: 1891, 2764, 2950, 2994, 3164, 3172, 3213, 3217, 3247.
8. Exerciţii: 43—53.
9. Probleme propuse: 3261—3270.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 67

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

---

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

---

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

---

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

---

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

---

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 55, 69, 89. 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 90, 92, 94, 200, 08, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 32, 35, 38, 40, 41, 49, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

# CHESTIUNEA CALENDARULUI.

Oamenii, pentru a-şi regulă ocupaţiunile lor, au avut nevoe, încă dela început, să-şi divizeze timpul. Este multă probabilitate că oamenii au evaluat timpul în zile şi nopţi, dar această diviziune, după scurtă durată, s'a găsit că nu este suficientă, fiind relativ mică în decursul chiar al vieţei omeneşti. Era nevoe deci de o măsură de timp mai mare. Reîntoarcerea căldurei sau a frigului—perioade care aduc epoca fructelor sau dispariţiei lor—le-au dat ideia anotimpurilor, deci a unei unităţi de timp mai mari. Cum însă reîntoarcerea căldurei sau a frigului nu venià cu destulă regularitate, a trebuit să se caute semne mai sigure, care să separe epocile de timp între ele.

Luna, din cauza fenomenului de periodicitate ce prezintă, a fost utilizată la început, pentru diviziunea timpului, dar ea neputând indicà anotimpurile a fost lăsată, pentru a fi folosit Soarele, care domină diviziunea timpului, prin cele două mişcări aparente:

1. Rotaţiunea sa zilnică în jurul Pământului, care ne dă ziua şi noaptea şi

2. Ocolirea sa anuală (revoluţia), care ne dă anotimpurile şi a cărei durată completă constitue anul.

*

In cele ce urmează, ne vom ocupà numai de calendarele romane, adică de cel Iulian şi de cel Gregorian. Dacă le vom cunoaşte bine, ne vom da seama dacă avem erori la baza vreunuia şi vom alege pe cel mai bun pentru noi.

Regulele urmate pentru a grupà zilele lucrătoare şi zilele de sărbătoare constituesc ceeace se numeşte calendar. Numele acesta vine dela latinescul «*calendae*» (gr. *καλέω* = a chemà) care însemnează chemare, fiind obiceul la Romani ca să se cheme poporul în adunare în primele zile ale fiecărei luni.

După întemeierea Romei, ROMULUS, dorind a reglementà ocupaţiunile supuşilor săi, se gândì la introducerea unui calendar. Neconsultând cerul, decretă ca anul să aibă 304 zile. Cu acest număr de zile, anul nu erà nici lunar nici solar, căci atât Soarele cât şi Luna refuzară să-şi acorde timpul de revoluţiune, cu timpul decretat de primul şef al Romei, pentru mişcarea lor. Urmaşii lui ROMULUS

s'au văzut obligaţi—văzând acest refuz—să-şi aranjeze ei calendarul după mişcările astrelor rebele.

NUMA POMPILIU, găsind mai mult farmec în Lună, a ales anul lunar şi cum aveà un cult deosebit pentru numerele impare «*Numero Deus impare gaudet*» mări anul la 355 zile pentru a fi de bun augur. Nepotrivirea anului lunar cu cel solar, făcù ca după un număr mic de ani, lunile de vară să cadă în mijlocul iernei, iar căldura în mijlocul lunilor de iarnă.

Şefii colegiului de auguri «*Pontificii*» imaginară perioade arbitrare de corecţiune, pe care le adaogă anului de 355 zile, în scop de a-l face să corespundă cu realitatea. Ce s'a întâmplat însă? Pontificii—cari nu ţineau prea mult cu cele sfinte—abuzând de puterea lor discreţională, avansau sau întârziau scadenţele poliţelor debitorilor, măriau sau micşorau beneficiile periodice ale fiscului, prelungiau durata magistraturei partizanilor lor, etc., astfel încât calendarul, în loc să reglementeze ocupaţiunile cetăţeneşti, ajunsese un mijloc revoltător de fraudă. Aceasta era situaţiunea, când IULIU CESAR veni în fruntea statului ca Pontifex maximus.

In timpul lui CESAR, trăià în Egipt filosoful peripatetician SOSIGENE, care făcea parte din colegiul astronomilor din Alexandria. In Şcoala din Alexandria, se învăţà că anul şcolar este de 365 zile şi 6 ore. Găsirea lungimei anului de 365 zile şi 6 ore este datorită lui EUDOXIU din *Cnida*, astronom din şcoala lui PLATON, care a trăit între anii 409—356 a. CR. SOSIGENE erà un astronom cunoscut. El citise pe ARISTOTEL şi comentà cartea acestuia «*De celo*».

CESAR cheamă pe SOSIGENE la Roma şi-i încredinţează reforma calendarului roman. Problema ce aveà de rezolvat SOSIGENE erà următoarea:

1. A stabili coincidenţa între calendar şi timp şi

2. A reglementà calendarul pentru ca eroarea să nu se mai repete.

1. Pentru stabilirea coincidenţei, Sosigene intercală 23 zile în luna Februarie şi apoi două luni între Noembrie şi Decembrie, astfel că anul se făcu acuma de 445 zile. Aceasta s'a petrecut în anul 708 al fundaţiei Romei, adică în anul 45 înainte de Isus Cristos. Incurcătura a fost aşà de mare că s'a numit atunci «*anul confuziei*».

2. Pentru regularea calendarului ca eroarea să nu se mai repete, reforma propusă de Sosigene, care ştia că anul este de 365 zile

şi 6 ore, a fost ca anul să se adopte de 365 zile, şi să se adauge câte o zi la 4 ani. Propunerea a fost admisă şi adăogarea acestei zile s'a făcut—nu cum erà natural să se facă la sfârşitul anului sau la sfârşitul vre-unei luni ci—după 23 Februarie «*sexta die ante calendas*». Luna Februarie aveà la Romani un caracter religios, fiind o lună de purificare şi, pentru a nu se modifică cele 28 zile—considerându-se modificarea ca sacrilegiu—au considerat ziua ce se adaugă în plus la patru ani, ca dublă zilei de 23 Februarie şi erà cunoscută sub numele de „*bisexto calendas*". Ea dublează sărbătoarea fugirei regelui TARQUINIU.

MARCU ANTONIU, pentru a perpetua aducerea aminte a unei astfel de binefaceri, decretă că luna în care se născu IULIU CESAR să se numească «*Iulie*».

Se păreà că neregulile au luat sfârşit, dar Pontificii, succesorii lui CESAR, comiseră o dublă eroare.

1. Socotiseră anul unu, începutul anului în loc de anul zero şi
2. Intercalară un an bisextil, după o perioadă trienală în loc de quatrienală.

Se menţinù această eroare, timp de 36 de ani, până când împăratul AUGUST, luând cunoştinţă de ea, ordonă suspendarea bisextililor timp de doisprezece ani, pentru a stabili din nou coincidenţa între calendar şi timp, fixând că ziua de 21 Martie trebue să fie în ziua când soarele trece la echinoxul de primăvară.

Faptul a fost aşà de important, încât Senatul Roman, pentru a-şi reaminti de ultimul reformator al calendarului, decretă în anul 730 (23 a. Cr.), schimbarea lunei Sextilis în August.

Prin această reformă, neregulile la Romani luară sfârşit.

*

Reforma lui IULIU CESAR—după cum am văzut-o—erà fondată pe mărimea anului astronomic de 365 zile şi 6 ore. Atât de mare ştià SOSIGENE că este lungimea unui an astronomic. In realitate, lungimea aceasta este numai aproximativă; lungimea adevarată a anului astronomic este de 365 zile, 5 ore, 48 minute, 45,5 secunde. SOSIGENE se înşelase în aprecierea lungimei anului cu 11 minute, 12,5 secunde. S'ar păreà că această diferenţă n'ar aveà nicio importanţă, fiind extrem de mică, ea însumându-se, face o zi la 128 de ani şi jumătate.

Dacă în viaţa unui om, această diferenţă de 11 minute şi 12,5

secunde nu reprezintă nimic, nu se petrece acelaş lucru în viaţa popoarelor, adică după un număr mare de ani, căci la fiecare 128 de ani diferenţa de 1 zi merge crescând şi odată cu ea echinoxul de primăvară se depărtează de 21 Martie, data când în calendarul Iulian erà fixată trecerea Soarelui la echinox.

Desigur că ne vom întrebà: ce legătură are echinoxul de primăvară cu ziua de 21 Martie în chestiunea reglementărei zilelor lucrătoare şi zilelor de sărbătoare, adică în chestiunea calendarului? Iat-o:

Paştile, cari sunt cea mai mare sărbătoare creştinească, se serbează în amintirea învierei lui Isus Cristos; ori patimile şi învierea lui Isus Cristos sunt în legătură cu începutul primăverei. Patimele Mântuitorului s'au întâmplat într'o Vinere, ce căderà în ziua de 2 Aprilie (echivalent în calendarul Evreesc cu ziua de 14 a lunei Nisan). Primii creştini, chiar dela început, au sărbătorit Paştele în zile diferite şi anume:

1. Cei din orient, constituiţi de apostolul Ioan, au înţeles a sărbători Paştele, amintindu-şi de patimele Mântuitorului şi deci ţiniau ziua de 14 Nisan, adică odată cu Paştile Evreilor; de aceea se numiau *Quatro decimani.*

2. Alţi creştini au ales sărbătorirea Paştilor în Duminica Învierei, adică două zile mai în urmă şi în sfârşit,

3. Alexandrienii şi Romanii, convertiţi de apostolii Petre şi Paul, preferară o altă Duminică pentru a nu sărbători Paştele odată cu Evreii (μετὰ τῶν Ἰουδαίων).

O unire a tuturor creştinilor, ca să serbeze în acelaş timp acèastă zi sfântă, erà de mult dorită de toţi Părinţii Bisericei. In acest scop, în anul 325 d. C., Impăratul Constantin Cel Mare convoacă un Sinod sfânt şi ecumenic la *Niceia*, astăzi Istnic, o localitate în Anatolia (Asia Mică).

Textul adevărat al hotărîrilor consiliului dela Niceia nu există; s'a pierdut. Există însă o preţioasă lucrare, cunoscută sub numele de *Cartea celor 50 de titluri* datorită lui Ioan Scolasticul, Patriarh de Constantinopole († 575), care s'a găsit în dublu manuscris. Un manuscris este conservat în biblioteca naţională din Paris. Savantul călugăr benedictin Don Pitra, prefectul arhivelor celebre ale Vaticanului, mort cardinal, comparând ambele texte cu încă alte două: un fragment syriac şi un canon arab, expune hotărârile con-

siliului dela Niceia în lucrarea sa «*Jursis eclesiastici Grecorum historia et monumenta*».

Citind cu atenţiune textul, se vede că Consiliul dela Niceia s'a preocupat în special de acordul tuturor bisericilor creştine, în ceeace priveşte sărbătorirea Paştelui „*ut in una eademque die corde voceque unanimi omnes Christi fideles Des laudes precesque offerant*". (Pentru ca în o singură şi aceeaşi zi, toţi supuşii lui Crist să ofere lui Dumnezeu laudele şi rugăciunile lor).

Cu această ocaziune, Consiliul constată că trei părţi din lumea creştină cunoscută, urmau în ceeace priveşte sărbătorirea Paştilor obiceiul Romei şi al Alexandriei, adică sărbătoriau Paştile în prima Duminică după Luna plină ce cădeà la începutul primăverei.

Erà suficient deci ca astronomii din orice timp să determine cu anticipaţie data când se găseşte pe cer luna plină, care vine imediat după echinoxul de primăvară, sau odată cu el, şi creştinii să serbeze Paştile în prima Duminică după aceasta.

(Va urmà)

Inginer-Şef C. D. Orăşanu.
Licenţiat în matematici.

## PATRATE DECAPITATE.

Problema, care se pune, este următoarea: Să se găsiască patratele perfecte, cărora suprimându-le prima cifră, să obţinem alte patrate perfecte. Este vorba numai de grupele de câte două patrate, întrucât găsirea şirurilor de patrate, astfel ca un patrat din acel şir să se obţină din precedentul prin suprimarea primei cifre, este o problemă prea complicată. Totuşi, se pot găsi şi grupe de astfel de patrate, spre ex:

$$3330625 = 1825^2,$$
$$330625 = 575^2,$$
$$30625 = 175^2,$$
$$625 = 25^2,$$
$$25 = 5^2.$$

Se observă că, dacă avem o soluţie, atunci prin adăugarea unui număr pereche de nule, obţinem alte noi soluţii, de exemplu:

$5625 = 75^2$; $562500 = 750^2$; $56250000 = 7500^2$; . . . etc.
$625 = 25^2$; $62500 = 250^2$; $6250000 = 2500^2$;

In baza acestei observaţii, de aci înainte, nu voiu considerà patratele cari se termină cu nule.

* * *

Fie $A^2$ de $(n+1)$ cifre, căruia suprimându-i prima cifră $a$, să obţinem patratul $N^2$, de cel mult $n$ cifre. Rezultă că avem:

$$A^2 = a.10^n + N^2;\quad 10^n < A^2 < 10^{n+1};\quad N^2 < 10^n.\ 1 \leqslant a \leqslant 9 \quad (1)$$

Dar:

$$A^2 - N^2 = (A+N)(A-N)\,a.10^n.$$

Fie $a = p.q$ şi deci $1 \leqslant p.q \leqslant 9$. ($p$ şi $q$ întregi).

Vom lua acum:

$$A+N = p.2^{n-\alpha}.5^{n-\beta} \text{ şi } A-N = q.2^{\alpha}.5^{\beta},\ (0<\alpha<n, 0<\beta<n) \quad (2)$$

de unde:

$$A = p.2^{n-\alpha-1}.5^{n-\beta} + q.2^{\alpha-1}.5^{\beta} \text{ şi } N = p.2^{n-\alpha-1}5^{n-\beta} - q.2^{\alpha-1}5^{\beta}. \quad (3)$$

Din (1), deducem:

$$10^n < A^2 < (a+1).10^n. \quad (4)$$

Inlocuind pe A şi N prin valorile lor din (3), în (1) şi (4), găsim:

$$10^{\frac{n}{2}} < p.2^{n-\alpha-1}.5^{n-\beta} + q.2^{\alpha-1}.5^{\beta} < 10^{\frac{n}{2}}.\sqrt{a+1}, \quad (5)$$

$$p.2^{n-\alpha-1}.5^{n-\beta} - q.2^{\alpha-1}.5^{\beta} < 10^{\frac{n}{2}}. \quad (6)$$

Adunăm aceste două inegalităţi:

$$10^{\frac{n}{2}} < p.2^{n-\alpha}.5^{n-\beta} < 10^{\frac{n}{2}}(1+\sqrt{1+a}). \quad (7)$$

Dar N este pozitiv, aşà că avem

$$p.2^{n-2\alpha}.5^{n-2\beta} > q, \quad (8)$$

iar înmulţind aceasta cu $9 > p.q$, găsim

$$q < 3.\frac{\sqrt{10^n}}{2^{\alpha}.5^{\beta}}. \quad (9)$$

Inainte de a trece la rezolvarea directă a problemei, voiu face o observaţie. Toate patratele decapitate sunt $\mathcal{M}25$, afară de trei excepţii, care sunt:

$$81 = 9^2; \qquad 64 = 8^2; \qquad 49 = 7^2.$$

$$1 = 1^2; \qquad 4 = 2^2; \qquad 9 = 3^2.$$

In adevăr, pentru ca patratele să fie prime cu 5, trebuesc indeplinite condiţiile:

$\beta = 0$, $q$ prim cu 5 sau $\beta = n$, $p$ prim cu 5.

Dacă $\beta = 0$, deducem din (7):

$$p.2^{n-\alpha}.5^n < 10^{\frac{n}{2}}(1+\sqrt{1+a}) \quad , \quad p.2^{\frac{n}{2}-\alpha}.5^{\frac{n}{2}} < 1+\sqrt{1+a},$$

dar:

$$1+\sqrt{1+a} \leqslant 1+\sqrt{10} = 4{,}1624,$$

deci

$$p \cdot \frac{10^{\frac{n}{2}}}{2^\alpha} < 4{,}1624. \qquad (10)$$

Avem că $\alpha \leqslant n$. Fie $\alpha = n$, atunci avem:

$$p^2.5^n < 17{,}324.2^n,$$

care nu poate fi satisfăcută decât pentru $n \leqslant 3$. Găsim:

$n = 1$ şi $p = 1; 2$ ; $n = 2$; $p = 1$ ; $n = 3$; $p = 1$.

Dar, dacă $\alpha = n$, trebue ca $p = \mathcal{M}2$, căci A este un număr întreg; putem lua dar numai $\alpha = n = 1$ şi $p = 2$, care ne dă patratele 81 şi 49.

Dacă $\alpha = n - 1$, avem:

$$p^2.5^n < 17{,}324.2^{n-2}.$$

Trebue să luăm $n = 1$; $p = 1$; $\alpha = 0$ şi găsim patratul 64.

Pentru $\alpha \leqslant n - 2$ nu mai găsim nicio valoare întreagă a lui $n$, deoarece inegalitatea (10) dă $p < 1$ chiar pentru $\alpha = n - 2$.

Fie acum $\beta = n$. Trebue să avem, după (7):

$$p^2.2^{n-2\alpha} < 5^n.$$

Deci $\alpha$ va lua valori mici şi găsim $n \leqslant 4$. Procedând ca în

cazul precedent, găsim aceleaşi soluţii. Deci toate celelalte patrate decapitate căutate sunt $\mathcal{M}25$ şi se vor termină cu 25.

Voiu deosebi, acum, mai multe cazuri, după cum se prezintă $n$ faţă de $\alpha$ şi $\beta$.

I. $n > 2\alpha$ şi $n > 2\beta$.

Egalitatea (3) ne dă:

$$A = 2^{\alpha-1} 5^{\beta} (p.2^{n-2\alpha} 5^{n-2\beta} + q),$$

iar, din (7), deducem:

$$p.2^{\frac{n}{2}-\alpha}.5^{\frac{n}{2}-\beta} < 4{,}1624, \quad (\text{căci } 1 + \sqrt{1+a} < 1+\sqrt{10}\,). \quad (11)$$

Fie $n = 2k+1$, deci $k \geqslant \alpha$ şi $k \geqslant \beta$. Găsim:

$$p.2^{k-\alpha}.5^{k-\beta} < 1{,}31623,$$

$(k-\alpha)$, $(k-\beta)$ sunt numere întregi pozitive, putând fi şi nule. Pentru ca să existe această inegalitate trebue să luăm: $k = \alpha$, $k = \beta$, $p = 1$. Atunci $A = 5\,(10+q)$. Dar, din (6), deducem că $10 - q < 2\sqrt{10} = 6{,}32...$, deci $q = 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9$ şi găsim $A = 70;\ 75;\ 80;\ 85;\ 90;\ 95$, care dau următoarele patrate decapitate (distincte):

$49 = 7^2;\ 64 = 8^2;\ 81 = 9^2;\ 5625 = 75^2;\ 7225 = 85^2;\ 9025 = 95^2.$

Fie $n$ pereche. In acest caz, $(\frac{1}{2}n - \alpha)$, $(\frac{1}{2}n - \beta)$ sunt numere întregi pozitive şi diferite de zero. Valorile lor cele mai mici sunt 1; deci am puteà lua $\frac{1}{2}n - \alpha = 1$ şi $\frac{1}{2}n - \beta = 1$; dar nici acestea nu verifică inegalitatea (11). Deci, în acest caz, nu avem soluţii.

II. $n = 2\alpha$.

Atunci:

$$A = 2^{\alpha-1}.5^{\beta}\,[p.2^{2(\alpha-\beta)} + q], \qquad \text{dacă } \alpha < \beta.$$

Din (7), deducem:

$$p.5^{\alpha-\beta} < 1 + \sqrt{1+a}, \qquad \text{sau} \qquad p.5^{\alpha-\beta} < 4{,}1624.$$

Trebue să luăm $\alpha - \beta = 0$, de unde rezultă $p \leqslant 4$. Dar, din (8) şi (9), deducem $p > q$ şi $q < 3$, deci $q = 1$ sau 2.

Dacă $q = 1$, găsim $p = 2$ şi dacă $q = 2$, găsim $p = 3$, căci din (6), avem $p - q < 2$. Acestea ne dau patratele 225 şi 625.

Dar avem şi

$$A = 2^{\alpha-1} 5^{2+\beta}\,[p + q.5^{2(\beta-\alpha)}], \qquad \text{dacă } \alpha < \beta.$$

Trebue ca:

$$p > q.5^{2(\beta-\alpha)},$$

deci $\beta-\alpha=0$, sau $\alpha=\beta$.

Acest caz e tocmai cel precedent, deci nu-l mai studiem.

De acum înainte, vom presupune $\alpha \neq \beta$, căci $\alpha = \beta$ l-am studiat.

III. $n = 2\beta$.

Avem:

$$A = 5^{\beta}\, 2^{\alpha-1}\,[p.2^{2(\beta-\alpha)} + q], \qquad \text{când } \alpha < \beta.$$

Inegalitatea (7) devine:

$$p.2^{\beta-\alpha} < 4{,}1624.$$

$(\beta-\alpha)$ fiind întreg şi pozitiv, putem lua numai $\beta-\alpha=1$, deci $p=1$; 2 sau $\beta-\alpha=2$ deci $p=1$.

Fie $\beta-\alpha=1$. Atunci avem $A=25\,(4p+q)$. Din (9), deducem $q<6$ apoi $4p>q$, iar din (6) obţinem $4(p-1)<q<6$. Dacă $p=1$; $q<4$, găsim $q=1,2,3$ şi dacă $p=2$; $4<q<6$, găsim $q=5$. De aci, rees patratele $225=15^2$; $15625=125^2$; $30625=175^2$; $105625=325^2$.

Dacă $\beta-\alpha=2$ şi $p=1$, avem $A=125\,(16+q)$, şi din (7), scoatem $16-q<8$, deci $q=9$. Găsim patratul $9765625=3125^2$, din care suprimând prima cifră, adică pe 9, găsim patratul $765625=875^2$.

Când $\alpha > \beta$, avem:

$$A = 5^{\beta}\, 2^{2\beta-\alpha-1}\,[p + q\,.\,2^{2(\alpha-\beta)}].$$

Trebue ca $p > q.4^{\alpha-\beta}$. Apoi $(\alpha-\beta)$ fiind întreg şi pozitiv nu poate fi decât 1; deci $p>4q$. Din (9), deducem $2q<3$; $q=1$ şi deci $p=5$. Găsim patratul $81=9^2$. Deacum înainte, voiu presupune $n \neq 2\alpha$ şi $n \neq 2\beta$, întrucât aceste cazuri le-am examinat.

IV. $n<2\alpha$ şi $n<2\beta$.

Avem:

$$A = 2^{n-\alpha-1}\, 5^{n-\beta}\,[p + q.2^{2\alpha-n}\, 5^{2\beta-n}].$$

Trebue să luăm:

$$p > q.2^{2\alpha-n}.5^{2\beta-n}.$$

Cum $p$ este de o cifră, trebue să avem $2\beta - n = 0$, sau 1. Prima dă $n = 2\beta$, caz studiat mai sus şi a doua ne dă :

$$p > 5.2^{2\alpha - n}.q,$$

deci $2\alpha - n = 0$, adică $n = 2\alpha$. Dar $n = 2\beta + 1$, ceeace ne spune că $n$ este şi pereche şi nepereche, lucru imposibil. Aşà că acest caz nu ne prezintă soluţii noi.

(Va urmà). EMIL ŞTEFĂNESCU.
Student Matematici, anul I.

## NOTE MATEMATICE

32. *Zece analize diverse.* (A se vedeà *Gazeta Matematică*, Anul XXVII, pag. 150).

1. **Algebrică.** *E. Cesaro.* — Corso di analisi algebrica. Turin 1894.
2. **Elementară.** *W. A. Granville & D. E. Smith.* — Elementary analysis.
3. **Eliptică.** *A. Macfarlane.* — Principles of elliptic and hyperbolic analysis.
4. **Inferioară.** *B. Sporer.* — Niedere Analysis. Lipsca.
5. **Infinitezimală.** *Aouste.* — Analyse infinitésimale des courbes planes. 1873.
6. **Iperbolică.** Vezi No. 3 de mai sus.
7. **Matematică.** *E. Goursat.* — Cours d'analyse mathematique. Paris.
8. **Modernă.** *T. Wittacker & G. N. Watson.* — A course of modern Analysis. 1720.
9. **Practică.** *Horst von Sanden.* — Praktische Analysis. Lipsca.
10. **Vectorială.** *J. W. Gibbs.* — Vectors Analysis.

(Va urmà) I. IONESCU.

33. *O generalizare elementară a teoremei lui* FERMAT.

Se ştie că, dacă $p$ e un număr prim, care nu divide pe $a$, atunci (teorema lui FERMAT), avem :

(1) $$a^{p-1} - 1 = \mathcal{M}.p,$$

sau:

$$a^{p-1} = 1 + k.p.$$

Ridicând ambele părți la puterea $m$ și dezvoltând partea a doua după formula binomului, avem:

$$a^{m(p-1)} = 1 + (k.p)^m + m.k.p.Q,$$

unde Q este întregul care reprezintă suma termenilor interiori ai binomului, divizați cu $m.k.p$. Aceasta ne arată că:

(2) $$a^{m(p-1)} - (k.p)^m - 1 = \mathcal{M}.(m.p).$$

Făcând acum $m = p^{\alpha-1}$, găsim:

$$a^{p^{\alpha-1}(p-1)} - 1 = \mathcal{M}.p^{\alpha},$$

unde termenul $(k.p)^m$, fiind divizibil cu $p^{\alpha}$, l'am eliminat.

Sau, mai putem scrie:

(3) $$a^{\varphi(p^{\alpha})} - 1 = \mathcal{M}.p^{\alpha}.$$

Și, înfine, se ajunge ușor la relația generală:

(4) $$a^{\varphi(N)} - 1 = \mathcal{M}.N.$$

De fapt însă, relația (2) este cea mai generală.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

34. *Asupra exercițiului 20.* D-l M. ADAM își propune în exercițiul 20, publicat la pagina 116, Vol. XXX, să găsiască 2 patrate care să difere prin un cub. Soluția dată de D-sa este parțială. Fie

$$x = \alpha_1^{m_1}.\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_n^{m_n}$$

un număr care satisface condiției

(1) $$x^3 = y^2 - z^2$$

și ai cărui factori primi sunt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Relația (1) se mai poate scrie:

$$\alpha_1^{3m_1}.\alpha_2^{3m_2}\ldots\alpha_n^{3m_n} = (y+z)(y-x),$$

de unde se deduce:

(2) $$y - z = \alpha_1^{p_1}.\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_n^{p_n}$$

(3) $$y+z=\alpha_1^{3m_1-p_1}\cdot\alpha_2^{3m_2-p_2}\ldots\alpha_n^{3m_n-p_n}.$$

Din (2) şi (3), se scoate soluţia cea mai generală:

$$y=\tfrac{1}{2}\cdot\alpha_1^{p_1}\cdot\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_n^{p_n}\left[\alpha_1^{3m_1-2p_1}\cdot\alpha_2^{3m_2-2p_2}\ldots\alpha_n^{3m_n-2p_n}+1\right]$$

$$z=\tfrac{1}{2}\cdot\alpha_1^{p_1}\cdot\alpha_2^{p_1}\ldots\alpha_n^{p_n}\left[\alpha_1^{3m_1-2p_1}\cdot\alpha_2^{3m_2-2p_2}\ldots\alpha_n^{3m_n-2p_n}-1\right].$$

Pentru ca $y$ şi $z$ să fie întregi, trebuie ca numerele $m_i$ şi $p_i$, să fie supuse la condiţia

$$3m_i-2p_i\geqslant 0,$$

iar factorii $\alpha_i$ trebuie să fie toţi nepereche. Se vede că soluţia generală este tot aşà de nedeterminată ca şi soluţia parţială, dată exerciţiului la locul citat.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

35. *Impărţirea unui unghiu în 3 părţi egale.* In nota 37, dela pagina 211, Vol. XXVIII *Gazeta Matematică*, am dat un mijloc foarte elementar de a împărţi un unghiu în trei părţi egale. Dau, în cele ce urmează, o altă metodă dedusă din o problemă de analitică. Fie F, F'; A, A' şi 0, focarele, vârfurile şi centrul unei hiperbole, ale cărei asimptote fac cu FF' unghiuri de 60°. Directoarea corespunzătoare focarului F taie pe FF' în B. Fie C un punct de pe ramura corespunzătoare focarului F şi K proecţia lui C pe directoare. Este uşor de stabilit că, în asemenea condiţiuni,

$$CB/CK=AB/AF=2.$$

Dacă se prelungeşte CK cu o lungime KD = CK, atunci figura A'DCF este un trapez isoscel, în care A'D = DC = CF şi KD perpendicular pe mijloacele laturilor CD şi FA'. Este uşor de văzut că avem $\sphericalangle DCA'=\sphericalangle CA'F$, ca alterne interne şi $\sphericalangle CA'F=\sphericalangle DFA'$ prin construcţie. Apoi $\sphericalangle CDF=\sphericalangle DFA'$, tot ca alterne interne. Din aceste egalităţi, se deduce CA'F = CFD = DFA', iar dacă M este un punct pe prelungirea lui FC, $\sphericalangle MCA'=3\sphericalangle CA'F$.

De aici, urmează construcţia ce se caută. Fie $\sphericalangle MCA'=\theta$ unghiul de împărţit în 3 părţi. Pe A'F se construeşte un segment de cerc capabil de unghiul $A'CF=\pi-\theta$, cerc care taie hiperbola în A', C, $C_1$ şi $C_2$. Prin C, se duce o paralelă la A'F şi se obţine unghiul DCA', care este egal cu $\frac{1}{3}\theta$.

Pentru împărțirea unui unghiu în trei părți egale, se pot utiliză și problemele 21 și 22 din Cap. II Geometria, *Culegere de Probleme* de I. Ionescu, G. Țițeica, A. Ioachimescu și V. Cristescu.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

36. *Asupra distanței dintre ortocentrul și centrul cercului circumscris.* Fie H ortocentrul unui triunghiu ABC, O centrul cercului circumscris, P piciorul înălțimei AH și $A_1$ punctul unde AH taie a doua oară cercul circumscris. Aplicând teorema lui Stewart triunghiului $AOA_1$, avem

$$\overline{OH}^2 \cdot AA_1 = \overline{OA}^2 \cdot HA_1 + \overline{OA_1}^2 \cdot AH - AA_1 \cdot AH \cdot HA_1$$

Dar $\overline{OA}^2 = \overline{OA_1}^2 = R^2$ și $AH + HA_1 = AA_1$, deci

$$\overline{OH}^2 \cdot AA_1 = \overline{OA}^2 (HA_1 + AH) - AA_1 \cdot AH \cdot HA_1$$

$$\therefore \quad \overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - AH \cdot HA_1.$$

Se știe însă că avem $AH = 2R\cos A$,
iar $HA_1 = 2HP = 4R\cos B\cos C$; deci

$$\overline{OH}^2 = R^2 - 8R^2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\therefore \quad \overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C).$$

Teorema lui Stewart ne permite, deci, a calculă distanța OH mai ușor decât metoda clasică prin calcularea laturei OH din triunghiul OAH.

F. Dobrescu-Băbici.

37. *Asupra problemei* 2642 (*G. M.* Vol. XXV, pag. 136). In această problemă, se cere a se demonstră relația următoare, dintre elementele unui triunghiu:

$$\sum a\cos B\cos C = \frac{r}{R}\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}.$$

Această relațiune e interesantă prin aceea că ambele sale părți reprezintă semiperimetrul triunghiului ortic. In adevăr, la soluția problemei, s'a arătat că ambele părți sunt egale cu raportul S:R, care reprezintă tocmai semiperimetrul $p'$ al triunghiului ortic, căci din *Culegere de Probleme, Trigonometria*, XIX. 13, p. 402, avem:

$$p' : p = r : R, \qquad \therefore \qquad p' = pr : R = S : R,$$

iar partea a doua a relației propuse este egală cu $pr : R$, sau $S : R$.

Bazați pe aceasta, putem da problemei o soluție simplă, care învederează cele de mai sus.

Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic; patrulaterul $BCB'C'$ fiind inscriptibil, avem relațiunea:

$$BB' \cdot CC' = BC' \cdot CB' + BC \cdot B'C'. \qquad (1)$$

Dar $BB' = 2S : b$, $CC' = 2S : c$, $BC' = a \cos B$, $CB' = a \cos C$, $BC = a$, iar latura triunghiului ortic $B'C' = a \cos A$.

Inlocuind în (1), împărțind cu $a$ și înlocuind pe $abc$ prin $4RS$, obținem

$$S : R = a \cos B \cos C + a \cos A$$

$$\therefore \qquad 3S : R = \Sigma a \cos B \cos C + 2p'$$

$$\therefore \qquad 3p' = \Sigma a \cos B \cos C + 2p', \quad \therefore \quad p' = \Sigma a \cos B \cos C.$$

Ion Coșereanu.

38. *Asupra notei 19*, dela pag. 132. Proprietatea demonstrată în această notă este cu totul restrictivă, ea fiind un caz particular al unei proprietăți mai generale a parabolei și anume:

1°. Parabolele, care sunt înscrise într'un acelaș triunghiu, sunt autopolare (conjugate) în raport cu triunghiul anticomplimentar.

2°. Parabolele autopolare cu un acelaș triunghiu sunt înscrise în triunghiul complimentar.

Fie atunci $ABC$ triunghiul în care e înscrisă o parabolă $P$ și $A_1B_1C_1$ triunghiul anticomplimentar al lui $ABC$. După proprietatea 1° de mai sus, $A_1$ este polul dreptei $B_1C_1$ și atunci, în virtutea unei cunoscute teoreme, polara în raport cu parabola $P$ a unui punct oarecare $M$ de pe dreapta $B_1C_1$ trece prin $A_1$, iar dreapta $MA_1$ este împărțită în două părți egale de $BC$.

Proprietatea demonstrată în nota 19 este, deci, un caz particular dintr'o infinitate de cazuri ale unei proprietăți generale.

V. Cristescu.

# CHESTIUNI DE EXAMEN

## FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN BUCUREŞTI.

*Sesiunea octombrie 1924.*

### ANUL I.

### ALGEBRA.

I. Se consideră ecuaţiunea

$$x^3 + 3x^2 + 6ax + 6a = 0.$$

1°) Să se determine natura rădăcinilor pentru $a = 1$.

2°) Să se determine natura rădăcinilor şi semnul lor când $a$ variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

3°) Să se calculeze, cu două zecimale, rădăcina negativă a ecuaţiei, în cazul $a = \frac{1}{2}$.

II. Să se descompună în fracţiuni simple, expresiunea:

$$\frac{2x^4 + 5x^3 + 17x^2 + 11x + 12}{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2}.$$

## FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ.

*Sesiunea octombrie 1924.*

### MATEMATICE GENERALE.

I, Să se studieze variaţia funcţiunii

$$y = \frac{x^3}{2(x-1)^2},$$

determinând, totodată, punctul de intersecţie al curbei cu asimptota oblică, precum şi ecuaţia tangentei în punctul de inflexiune al curbei.

II. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$y'' + 3y' - 4y = 30e^{2x}.$$

III. Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\text{Log}\,2}^{\text{Log}\,3} \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{4x} - 1}\, dx.$$

## ALGEBRA SUPERIOARĂ.

1. Dându-se ecuaţiile :

$$f(x) = x^3 + px + q,$$

$$\varphi(x) = x^2 + mx + n,$$

să se calculeze expresia

$$E = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma),$$

în funcţie de coeficienţii celor două ecuaţii, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ fiind rădăcinile primei ecuaţii, $\alpha'$, $\beta'$ ale celei de a doua ; să se arate că avem :

$$E = f(\alpha')\,f(\beta') = (q + mn)^2 - (m^2 - n + p)\,(mq + n^2 - np).$$

Ce putem conchide, în cazul când această expresie este nulă ?

*Aplicaţie.* Să se calculeze expresia de mai sus pentru ecuaţiile :

$$x^3 - 2x + 2 = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

şi să se aranjeze în ordinea mărimii rădăcinile celor două ecuaţii, fără a le rezolvà.

II. Ecuaţia $a^x\,(1 - x\mathrm{L}a) - 1 = 0$, are o singură rădăcină reală, care este dublă şi se cere să se folosiască aceasta pentru studiul variaţiei fracţiei

$$y = \frac{x}{a^x - 1},$$

$x$ variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

III. Să se studieze natura seriei, al cărei termen general este

$$u_n = \frac{a^n\, n^{\alpha n}}{n!}, \quad a > 0,$$

$\alpha$ real.

IV. Să se vadă natura rădăcinilor ecuaţiei

$$f(x) = x^5 - 5x - 1 = 0$$

şi să se calculeze, cu două zecimale, rădăcina cuprinsă între $-1$ şi $0$.

## GEOMETRIA ANALITICĂ.

I. 1) Să se scrie ecuaţia parabolei (P) tangentă în origină la axa $Ox$, având pe $Oy$ ca axă şi trecând prin punctul $A_{(1,2)}$.

2) Să se scrie ecuaţia generală a conicelor (C) tangente în O la parabola (P) şi care trec prin punctul A şi printr'un punct M, variabil pe parabola (P).

3) Printre conicele (C), sunt o infinitate de conice ($\Gamma$), care au bisectoarea întâi ca direcţie asimptotică. Să se afle ecuaţia conicelor $\Gamma$. Să se afle pentru o conică oarecare ($\Gamma$) cele două asimptote ale sale. Să se afle locul centrelor conicelor ($\Gamma$).

4) Printre conicele (C), se află o iperbolă echilateră. Să se construiască această iperbolă echilateră, determinându-se poziţia şi mărimea axelor sale.

II. Să se construiască curba

$$yx^2 = x^3 - 3x + 2.$$

## ANALIZA MATEMATICĂ.

*(Partea I).*

I. Să se determine extremele funcţiunei

$$z = \frac{x+y-1}{x^2+y^2}.$$

II. Să se calculeze

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\, dx.$$

III. Să se calculeze sub formă de număr zecimal

$$\int_2^3 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+8}}\, \frac{dx}{x}.$$

## ANALIZA MATEMATICĂ.

*(Partea II).*

I. Să se integreze sistemul

$$y''' = ze^x$$
$$z' + 2y'e^{-x} = z + ye^{-x} - 8xe^x.$$

II. Să se găsiască integrala generală a ecuaţiei

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\left[x\frac{\partial z}{\partial x} - z\right].$$

III. Să se calculeze suprafaţa şi volumul porţiunei din cilindrul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a>c),$$

situată în primul octant şi cuprinsă între planele $y = 0$, $y = mx$.

# BIBLIOGRAFIE.

**Foaia matematică.** Anul II. No. 1. Chişinău 1925. După un an (Comitetul). Asupra seriei hipergeometrice, de S. Weiss.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul IV. No. 11. Timişoara 1925. Asupra discuţiei rădăcinilor unei ecuaţii de gradul II.

**Dr. E. Cech.** *Sur les surfaces qui admettent* $\infty^1$ *déformations projectives en elles mêmes.* Brün 1924.

**B. Hostinsky.** *Les fonctions fondamentales du problème de Dirichlet* Brün 1924.

**Dr. E. Cech.** *Courbes tracées* sur une surface dans l'espace projectif I Brün 1924.

**T. Kauchy.** Teoria ecuaţiilor anexe cu diferenţe finite (în limba cehă cu un rezumat în limba franceză). Brün 1924.

**Dr. T. Sahanek.** Asupra undelor herţiene emise de un arc electric (în limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). Brün 1924.

**O. Borusska.** Asupra unor tipuri de suprafeţe, care sunt proectiv aplicabile pe ele însăşi (în limba cehă, cu un rezumat în limba franceză). Brün 1924.

(Cele 6 publicaţiuni precedente sunt făcute de Facultatea de Ştiinţe a Universităţii *Massaryk* din Brün).

## CERERI.

119. Cari sunt primii români, cari au trimes soluţii de probleme la revistele de matematici?

I. I. Georgescu-Racoviţă.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1891. $x_1$, $x_2$, $x_3$ *fiind rădăcinile ecuaţiunei:*

$$x^3 + p\,x + q = 0, \tag{1}$$

*se cere să se calculeze valoarea expresiunei:*

$$E = x_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p\,\partial q} + x_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial p\,\partial q} + x_3 \frac{\partial^3 x_3}{\partial p\,\partial q}.$$

St. N. Mirea.

Soluţie dată de D-nii: V. Grigorescu, I. Margulies, O. Mayer, P. Mélas, Al. Stoica, I. Timotin şi M. Weinrauch.

Din ecuaţiunea: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2p$, deducem succesiv:

$$x_1 \frac{\partial x_1}{\partial p} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial p} + x_3 \frac{\partial x_3}{\partial p} = -1,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p} + x_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p \partial q} + \ldots\ldots = 1,$$

relaţiune care ne arată că avem:

$$(2) \qquad E = -\sum \frac{\partial x_1}{\partial p} \frac{\partial x_1}{\partial q}.$$

Insă, din ecuaţiunea (1), deducem, în general, prin derivare:

$$3x^2 \frac{\partial x}{\partial p} + x + p \frac{\partial x}{\partial p} = 0,$$

$$3x^2 \frac{\partial x}{\partial q} + p \frac{\partial x}{\partial q} + 1 = 0,$$

ceeace ne dă:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{x}{3x^2 + p},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{1}{3x^2 + p},$$

relaţiuni care, aplicate în speţa ecuaţiunei (2), dau:

$$E = -\sum \frac{x_1}{(3x_1^2 + p)^2}.$$

Facem transformarea:

$$(3) \qquad y = \frac{x}{(3x^2 + p)^2}$$

şi eliminăm pe $x$ între (1) şi (3). Găsim succesiv:

$$x^3 + p x + q = 0,$$

$$3py x^2 + (1 + 9yq) x - p^2 y = 0,$$

sau:

$$3py \cdot x^2 + (1 + 9yq) x - p^2 y = 0,$$

$$(1 + 9yq) x^2 - 4y p^2 x - 3pqy = 0,$$

sistem al cărui eliminant este:

$$p^4 y = [(1+9qy)^2 + 12p^3y^2][4p^4y + 3pq(1+9qy)],$$

sau:

$$(4p^3+27q^2)^2 y^3 + 9q(4p^3+27q^2)y^2 + (p^3+27q^2)y + q = 0.$$

Valoarea expresiunei căutate este deci:

$$E = 9q/(4p^3+27q^2).$$

---

PROBLEMA 2764. *$x$ şi $y$ fiind coordonatele unui punct din plan, să se împartă planul în regiuni după cum una sau alta din expresiunile:*

$$E_1 = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{y^2+2xy}}{y} - \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{x+y},$$

$$E_2 = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{y^2+2xy}}{y} + \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{x+y},$$

*păstrează o valoare constantă. Unghiurile definite de* arc tg *şi* arc sin *sunt coprinse între* $-\frac{1}{2}\pi$ şi $+\frac{1}{2}\pi$.

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-l ADRIAN CRISTEA (cl. VIII, lic. Focşani).

Pentru fixarea ideilor, vom presupune că avem $+$ înaintea radicalului şi vom notă:

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{y^2+2xy}/y = \alpha \qquad \operatorname{arc\,sin} x/(x+y) = \beta.$$

Pentru ca unghiul $\alpha$ să existe, trebue să avem:

$$y^2 + 2xy \geqslant 0 \qquad \therefore \qquad y(y+2x) \geqslant 0.$$

Fie DD' dreapta $y+2x=0$. (Insemnăm cu D extremitatea de aceeaşi parte cu $y$ faţă de $x'x$). Atunci $y+2x>0$ în semiplanul determinat de DD", în care se găsesc punctele $x$ şi $y$, iar $y+2x<0$ în celălalt semiplan. Rezultă că $y(y+2x)\geqslant 0$ în unghiurile $DOx$ şi $x'OD'$. In unghiurile $DOx'$ şi $D'Ox$ punctul $(x\,y)$ dă $y^2+2xy<0$, radicalul e imaginar deci problema nu are nici un sens.

Cu notaţiile adoptate, avem:

$$E_1 = 2\alpha - \beta, \qquad E_2 = 2\alpha + \beta.$$

Apoi,

$$\cos 2\alpha = (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = -x/(x+y),$$

$$2\alpha = \arccos - x/(x+y) \quad \therefore \quad 2\alpha = \arccos(-\sin\beta).$$

Când punctul $(x,y)$ se găseşte în unghiul $DOx$, avem $y > 0$, deci $\operatorname{tg}\alpha > 0$ şi, în baza convenţiilor făcute în enunţ:

$$0 \leqslant \alpha \leqslant +\tfrac{1}{2}\pi \quad \therefore \quad 0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi$$

Insă, avem din formula care dă valoarea lui $2\alpha$:

$$(K) \qquad \cos 2\alpha = -\sin\beta$$

Se deosebesc două cazuri: $\sin\beta > 0$ şi $\sin\beta < 0$.

*Cazul I.* $\sin\beta > 0$, atunci $0 < \beta < \tfrac{1}{2}\pi$; iar $\cos 2\alpha$ e negativ. Prin urmare, $2\alpha$ e cuprins între $\tfrac{1}{2}\pi$ şi $\pi$. Ţinând seama de formula (K), se deduce imediat că $2\alpha - \beta = \tfrac{1}{2}\pi$.

*Cazul II.* $\sin\beta < 0$, $\beta$ e cuprins între 0 şi $\tfrac{1}{2}\pi$; însă $\cos 2x$ e pozitiv şi deci $2\alpha$ e cuprins între 0 şi $\tfrac{1}{2}\pi$. Şi în acest caz, formula (K) ne arată că $2\alpha - \beta = \tfrac{1}{2}\pi$.

Prin urmare: când punctul $(x_1 y)$ e în unghiul $DOx$, expresiunea $E_1 = \tfrac{1}{2}\pi = \text{const.}$

Când punctul $(x_1 y)$ se găseşte în unghiul $x'OD'$, avem $y < 0$ deci $\operatorname{tg}\alpha < 0$, unghiul $\alpha$ e cuprins între 0 şi $\tfrac{1}{2}\pi$, iar unghiul $2\alpha$ e cuprins între 0 şi $-\pi$:

$$0 \geqslant \alpha \geqslant -\pi.$$

Şi aci, avem două cazuri deosebite, după semnul lui $\sin\beta$.

*Cazul I.* $\sin\beta > 0$. $\beta$ e cuprins între 0 şi $+\tfrac{1}{2}\pi$; $\cos 2\alpha$ e negativ şi deci $2\alpha$ e cuprins între $-\tfrac{1}{2}\pi$ şi $-\pi$. Ţinând seama de (K), se deduce imediat $2\alpha + \beta = -\tfrac{1}{2}\pi$.

*Cazul II.* $\sin\beta < 0$. $\beta$ e cuprins între 0 şi $-\tfrac{1}{2}\pi$; $\cos 2\alpha = -\sin\beta$ e positiv, deci $2\alpha$ e cuprins între 0 şi $-\tfrac{1}{2}\pi$. Se deduce ca mai sus, că: $2\alpha + \beta = -\tfrac{1}{2}\pi$.

Prin urmare: când punctul $(x, y)$ e în unghiul $x'OD'$, expresiunea $E_1 = -\tfrac{1}{2}\pi = \text{const.}$

PROBLEMA 2950. *Să se găsiască numărul întreg* ab, *format din numerele* a *şi* b *scrise unul după altul, ştiind că rădăcina patrată a lui* ab *este numărul zecimal* $a_2$, $b_2$, *în care* $a_2$ *şi* $b_2$ *se obţin din* a *şi* b *sporindu-le toate cifrele cu* 2.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l E. ILIESCU (Liceul Militar, Mânăstirea Dealului).

Soluţia acestei probleme se poate găsi urmând aproape cuvânt cu cuvânt, soluţia pe care a dat-o D-l LOCOT. COL. GH. BUICLIU problemei 1766, la pagina 243, din *Gazeta Matematică*, vol. XXVIII.

Pentru aflarea lui $a_2$, $b_2$ se împart cifrele lui $ab$ în grupe de câte 2 cifre dela dreapta la stânga. Ultimul grup, dela stânga, dă prima cifră a lui $a_2$, cum această cifră e cu 2 mai mare ca prima cifră dela stânga lui $ab$, urmează că prima cifră a lui $a_2$, este rădăcina unui număr de 2 cifre dela stânga lui $ab$ şi că, deci, $ab$ are $2n$ cifre. Pe de altă parte, la fiecare grup de 2 cifre a lui $ab$, corespunzând o cifră peńtru partea întreagă a lui $a_2$, $b_2$, urmează că $a_2$ şi deci şi $b_2$, au câte $n$ cifre.

Se deosebesc acum următoarele 3 cazuri:

**Cazul I.** $a_2$, $b_2$ *este rădăcina pătrată a lui* ab *cu aproximaţie în minus.* Conform enunţului, $ab$ trebuie să îndeplinească condiţiile:

$$(1) \qquad ab + 2_{2n} < 10^n \sqrt{ab} < ab + 2_{2n-1}3$$

unde $I_p$ înseamnă numărul ce se obţine, scriind cifra I de $p$ ori una după alta.

**Cazul II.** $a_2$, $b_2$ *este rădăcina pătrată a lui* ab *cu aproximaţie în plus.* Ca la cazul I, trebuie să avem:

$$(2) \qquad ab + 2_{2n-1}1 < 10^n \sqrt{ab} < ab + 2_{2n}.$$

Neegalităţile (1) şi (2) se pot contopi în

$$(3) \qquad ab + 2_{2n-1}1 < 10^n \sqrt{ab} < ab + 2_{2n-1}3,$$

care dă soluţiile pentru cele 2 cazuri considerate. Din (3), se deduce

$$(4) \quad ab + 2_{2n-1}1 < 10^n \sqrt{ab} \quad \text{şi} \quad (5) \quad 10^n \sqrt{ab} < ab + 2_{2n-1}3,$$

care conduc respectiv la neegalităţile

(6) $ab^2 + (4_{2n-1}2 - 10^{2n})ab + 2_{2n-1}1^2 < 0,$

(7) $0 < ab^2 + (4_{2n-1}6 - 10^{2n})ab + 2_{2n-1}3^2.$

Considerând în (6) şi (7) trinoamele în $ab$, se ştie că (6) are loc când

$$(8)\quad A = \frac{10^{2n} - 4_{2n-1}2 - 10^n\sqrt{10^{2n} - 8_{2n-1}4}}{2}$$

$$< ab < \frac{10^{2n} - 4_{2n-1}2 + 10^n\sqrt{10^{2n} - 8_{2n-1}4}}{2} = B,$$

iar (7) are loc când

$$(9)\quad ab < \frac{10^{2n} - 4_{2n-1}6 - 10^n\sqrt{10^{2n} - 8_{2n-2}92}}{2} = C,$$

sau când

$$(10)\quad D = \frac{10^{2n} - 4_{2n-1}6 + 10^n\sqrt{10^{2n} - 8_{2n-2}92}}{2} < ab.$$

Comparând între ele numerele A, B, C, D, se găseşte uşor că

$$A < C < D < B$$

şi cum neegalităţile (8), (9), (10) dau valorile lui $ab$, care satisfac neegalităţile simultane (3), urmează că numerele $ab$ trebuie să satisfacă condiţiile:

$$A < ab < C, \qquad \text{sau} \qquad D < ab < B.$$

Efectuând calculele în valorile lui A, B, C, D, se găseşte că soluţiile problemei sunt date de neegalităţile:

$$(11)\quad \frac{5_{2n-1}8 - 10^n\sqrt{1_{2n-1}6}}{2} < ab < \frac{5_{2n-1}4 - 10^n\sqrt{1_{2n-1}08}}{2},$$

$$(12)\quad \frac{5_{2n-1}4 + 10^n\sqrt{1_{2n-2}08}}{2} < ab < \frac{5_{2n-1}8 + 10^n\sqrt{1_{2n-1}6}}{2},$$

care se mai pot scrie încă:

$$(13)\quad 27_{2n-2}9 - 10^n\sqrt{27_{2n-3}9} < ab < 27_{2n-1} - 10^n\sqrt{27_{2n-2}},$$

$$(14)\quad 27_{2n-1} + 10^n\sqrt{27_{2n-2}} < ab < 27_{2n-2}9 + 10^n\sqrt{27_{2n-3}9}.$$

Soluţiile problemei sunt date de neegalităţile (11), (12) sau

de neegalităţile (13), (14). Pentru $n = 1$, se vor aplică mai cu folos neegalităţile (11), (12). Prima dă:

$$\frac{58 - 10\sqrt{16}}{2} < ab < \frac{54 - 10\sqrt{8}}{2},$$

$$\therefore \quad 9 < ab < 27 - 10\sqrt{2} = 27 - 14{,}1 = 12{,}9,$$

aşă că avem soluţiunile 10, 11, 12. In adevăr,

$$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2 \; ; \; 3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4 \; ; \; 3{,}4 < \sqrt{12} < 3{,}5.$$

Neegalitatea (12), dă:

$$\frac{54 + 10\sqrt{8}}{2} < ab < \frac{58 + 10\sqrt{16}}{2},$$

$$\therefore \quad 41 < ab < 49.$$

Soluţiile problemei sunt 42, 43, şi 47, căci 48 nu convine. In adevăr,

$$6{,}4 < \sqrt{42} < 6{,}5 \; ; \; 6{,}5 < \sqrt{43} < 6{,}6 \; ; \; 6{,}6 < \sqrt{44} < 6{,}7;$$

$$6{,}7 < \sqrt{45} < 6{,}8 \; ; \; 6{,}7 < \sqrt{46} < 6{,}8 \; ; \; 6{,}9 < \sqrt{48} < 7{,}0.$$

Pentru $n = 2$, soluţiile problemei sunt date de neegalităţile:

$$2779 - 100\sqrt{279} < ab < 2777 - 100\sqrt{277},$$

$$2777 + 100\sqrt{277} < ab < 2779 + 100\sqrt{279}.$$

**Cazul III.** $a_2$, $b_2$ *este rădăcina exactă a lui* ab. Ecuaţia problemei este:

$$ab^2 + (4_{2n} - 10^{2n})ab + 2_{2n}^2 = 0,$$

$$\therefore \quad ab = \frac{10^{2n} - 4_{2n} \pm 10^n \sqrt{10^{2n} - 8_{2n}}}{2} = \frac{5_{2n-1}6 \pm 10^n \sqrt{1_{2n-1}2}}{2},$$

care nu poate fi un număr întreg, căci $1_{2n-1}2$, terminându-se cu 2, nu poate fi pătrat perfect. Deci, în cazul III, problema nu are soluţie.

*Observaţiuni.* 1°. D-l C. Schönfeld a găsit numai sistemul de soluţii dat de neegalităţile (11). Printr'un raţionament greşit, D-sa a arătat că neegalităţile (12) nu dau soluţii.

2°. D-l D. Blumenfeld a studiat cazul particular al numerelor $a$ şi $b$ de câte o cifră.

3°. D-l N. Tailer a găsit numai soluţia 11.

PROBLEMA 2994. *Fie* $\Omega_1$ *primul (punctul retrograd) şi* $\Omega_2$ *al doilea punct (punctul direct) al lui* BROCARD *al unui triunghiu oarecare* ABC, O *centrul cercului circumscris,* K *punctul lui* LEMOINE, $\omega$ *unghiul lui* BROCARD *al triunghiului* ABC. *Fie* A'B'C' *triunghiul format prin intersecţiile paralelelor duse prin vârfurile* A, B, C *respectiv cu dreptele* $C\Omega_1$, $A\Omega_1$, $B\Omega_1$ (A' *este intersecţia paralelelor duse prin* A *şi* B, B' *a paralelelor duse prin* B *şi* C, *etc.),* O' *centrul cercului circumscris şi* $\Omega'_1$ *punctul retrograd al lui* BROCARD *din triunghiul* A'B'C'. *Se cere să se demonstreze că:*

1. *Raportul de asemănare dintre triunghiurile* A'B'C' *şi* ABC *este egal cu* $2\cos\omega$;

2. *Triunghiurile* $AA'\Omega_2$, $BB'\Omega_2$, $CC'\Omega_2$, $\Omega_1\Omega_2\Omega'_1$ *sunt triunghiuri isoscele asemenea, unghiul lor la bază fiind* $\omega$;

3. $\Omega_2$ *este punctul direct al lui* BROCARD *din triunghiul* A'B'C';

4. $\Omega_1$ *este punctul lui* LEMOINE *din triunghiul* A'B'C';

5. *Centrul* O *este şi centrul cercului lui* BROCARD *al triunghiului* A'B'C'.

V. CRISTESCU.

Soluţie dată de D-nul MICU GRÜNBAUM.

Din modul de construcţie a punctelor lui BROCARD, se ştie că unghiurile $A\Omega_1C$ şi BAC sunt suplimentare; însă unghiurile $A\Omega_1C$ şi AA'B sunt şi ele suplimentare, ca având, prin construcţie, laturile paralele şi de sens contrar. Rezultă deci că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle AA'B$ şi, analog, dovedim că $\sphericalangle B$ din triunghiul ABC este egal cu $\sphericalangle B'$ din triunghiul A'B'C'; deci *triunghiurile* ABC, A'B'C' *sunt asemenea.*

Unghiul $A\Omega_2B$ e suplimentul unghiului BAC, lucru ce rezultă chiar din modul de construcţie a punctului BROCARD direct; deci

$$\sphericalangle A\Omega_2B + \sphericalangle AA'B = 180^0,$$

adică patrulaterul $AA'B\Omega_2$ e inscriptibil în cercul adjunct (BA), de unde urmează că

$$\sphericalangle A\Omega_2A' = \sphericalangle ABA' = \sphericalangle BA\Omega_1 = \omega \quad \text{şi}$$
$$\sphericalangle AA'\Omega_2 = \sphericalangle BA\Omega_2 = \omega,$$

deci *triunghiul* $AA'\Omega_2$ *e isoscel, unghiurile dela bază fiind* $\omega$.

Analog, demonstrăm că şi triunghiurile $BB'\Omega_2$, $CC'\Omega_2$ sunt isoscele, unghiul dela bază fiind $\omega$. Deci:

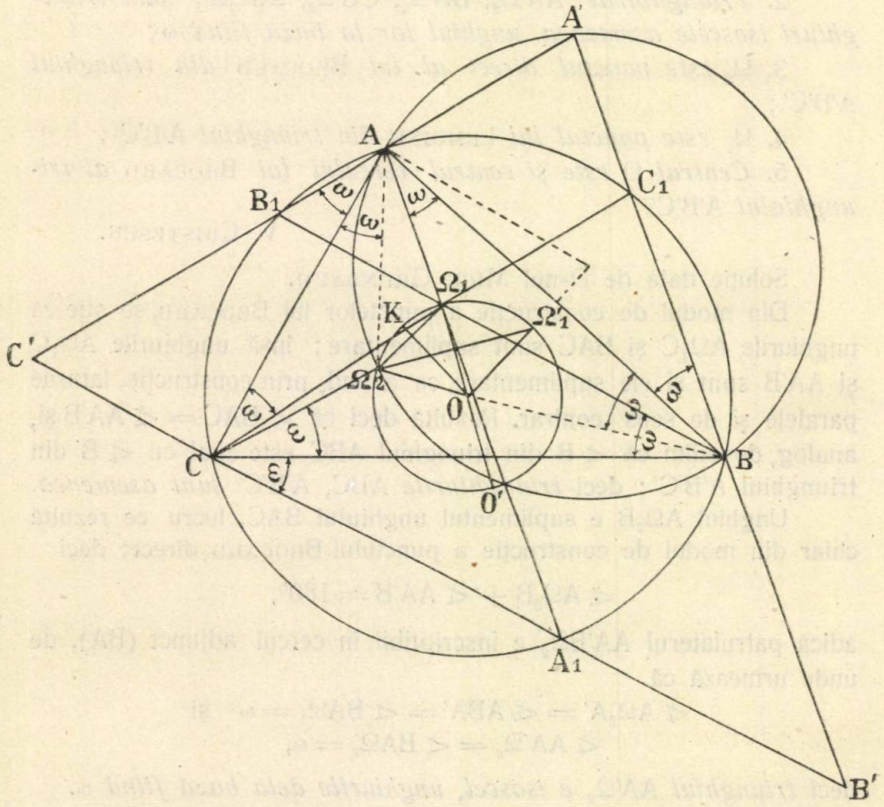
$$\sphericalangle C'A'\Omega_2 = \sphericalangle B'C'\Omega_2 = \sphericalangle A'B'\Omega_2 = \omega.$$

Dar triunghiurile ABC şi A'B'C' sunt asemenea şi au acelaş unghiu BROCARD; rezultă deci că $\Omega_2$ *este punctul direct al lui* BROCARD *din triunghiul* A'B'C'.

Fie $A_1$ intersecţia lui $A\Omega_1$ cu B'C'; $A_1$ este situat pe cercul ABC, căci prin construcţie avem

$$\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$$

şi, analog, demonstrăm că $B\Omega_1$ şi $C\Omega_1$ întâlnesc respectiv pe C'A' şi A'B' în punctele $B_1$ şi $C_1$ situate pe cercul ABC. Observăm deci că paralelele duse prin $\Omega_1$ la laturile lui A'B C' determină, pe laturile acestui triunghiu, şease puncte conciclice $A_1$, C, $B_1$, A, $C_1$, B. Rezultă atunci că $\Omega_1$ *este punctul lui* LEMOINE *al triunghiului* A'B'C', iar cercul O, e primul cerc al lui LEMOINE al acestui triunghiu.




Se ştie însă că centrul primului cerc al lui LEMOINE, al unui triunghiu oarecare, e la mijlocul dreptei care uneşte punctul lui

LEMOINE cu centrul cercului circumscris al acelui triunghiu. Deci, centrul O al cercului ABC este mijlocul segmentului $\Omega_1 O'$ şi deci centrul O *e centrul cercului lui* BROCARD *din triunghiul* A'B'C'.

$\Omega_2$ fiind punct direct BROCARD în ambele triunghiuri asemenea ABC şi A'B'C', rezultă că $\Omega_2$ este propriul său homolog din aceste triunghiuri şi deci raportul de asemănare dintre triunghiurile A'B'C' şi ABC este egal cu $\Omega_2 A' : \Omega_2 A$. Insă triunghiul $\Omega_2 AA'$, ne dă:

$$\frac{\Omega_2 A'}{\Omega_2 A} = \frac{\sin \Omega_2 AA'}{\sin AA'\Omega_2} = \frac{\sin(180^0 - 2\omega)}{\sin \omega} = \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega} = 2\cos\omega.$$

$\Omega_2$ fiind punctul direct şi $\Omega'_1$ punctul retrograd al lui BROCARD din triunghiul A'B'C', se ştie că coarda $\Omega_2\Omega'_1$ e perpendiculară pe diametrul $\Omega_1 O'$ al cercului lui BROCARD şi că e văzută din punctul O' sub un unghiu egal cu îndoitul unghiului lui BROCARD al triunghiului. Deci $\sphericalangle \Omega_2 O' \Omega'_1 = 2\omega$, $\sphericalangle \Omega_2 \Omega_1 \Omega'_1 = 180^0 - 2\omega$, de unde rezultă că unghiul dela bază al triunghiului isoscel $\Omega_1\Omega_2\Omega'_1$ este $\omega$.

D-nul MIHAIL I. FOCŞENEANU a dat o bună soluţie, bazându-se pe următoarea teoremă cunoscută:

Paralelele la laturile unui triunghiu duse prin punctul lui LEMOINE al triunghiului, taie laturile în şease puncte ale unui aceluiaş cerc, (primul cerc al lui LEMOINE) având centrul în mijlocul dreptei care uneşte centrul cercului circumscris cu punctul lui LEMOINE.

Au rezolvat bine problema, D-nii: EUGEN I. BALLAN, ALEX. NICULESCU, CONST. I. GEORGESCU, ION M. ŞERBĂNESCU, ADRIAN A. BUŞILĂ, TIBERIU POPOVICIU, TRAIAN UDRISKY, TEODOR I. POPA, WILHELM I. SOLOMON, EMIL S. DRĂGĂNESCU (Huşi), B. M. BARBĂLATT, OVIDIU G. POPEA, G. MATEESCU, ION C. VASILIU, SOLOMON WEISS, PAUL I. IONESCU.

---

PROBLEMA 3164. *Dreptele, care unesc vârfurile triunghiului ortic al unui triunghiu* ABC *cu punctele unde medianele lui* ABC *taie a doua oară cercul lui* EULER, *concură pe dreapta lui* EULER *în isogonalul punctului lui* GERGONNE *al triunghiului ortic.*

M. I. FOCŞENEANU.

Soluţie dată de D-nii: GH. MIHOC (Elev Cl. VII Liceul Gheorghe Şincai) şi GH. D. SIMIONESCU (Elev Liceul Mănăstirea Dealului)

Insemnăm, în triunghiul ABC, prin A', B', C' picioarele înălțimilor, prin $A_1$, $B_1$, $C_1$ mijloacele laturilor, prin A'', B'', C'' punctele unde înălțimile taie a doua cercul lui EULER (cercul celor nouă puncte), prin $A_2$, $B_2$, $C_2$ punctele unde medianele taie a doua oară acelaș cerc, prin G, O, I centrul de greutate, centrul cercului circumscris și înscris, prin H, $H_1$, $H_2$, $H_3$ ortocentrul și proiecțiile lui H respectiv pe laturile B'C', C'A', A'B' ale triunghiului ortic.

Se știe că înălțimile triunghiului ABC sunt bisectoarele triunghiului ortic; H este deci centrul cercului înscris în triunghiul ortic. Avem $\sphericalangle C'A'A'' = \sphericalangle A''A'B'$; dar $\sphericalangle A''A'B' = \sphericalangle A''A_1B'$ căci au aceeași măsură în cercul lui EULER; triunghiurile dreptunghice $A_1B'A''$ și $A'H_2H$ sunt deci asemenea, de unde deducem

$$A''B' : HH_2 = A''A_1 : HA'. \qquad (1)$$

Insă $HH_2 = HH_1$ și $A''B' = HA'' = AA''$, căci A'' e mijlocul hipotenuzei AH a triunghiului dreptunghic AHB'. Avem deci

$$AA'' : HH_1 = A''A_1 : HA'. \qquad (2)$$

Insă dreapta $A_1A''$ este perpendiculară pe B'C', căci ea este diametru în cercul lui EULER și extremitatea sa A'' este mijlocul arcului B'C'; rezultă că dreptele $HH_1$ și $A''A_1$ sunt paralele și deci unghiurile $AA''A_1$ și $A'HH_1$ sunt egale ca alterne externe și, prin urmare, ținând seamă și de (2), triunghiurile $AA''A_1$ și $H_1HA'$ sunt asemenea și deci unghiurile $A''A_1A_2$ și $HA'H_1$ sunt egale. Insă $\sphericalangle A''A_1A_2 = \sphericalangle A''A'A_2$ ca având aceeași măsură în cercul lui EULER; deci $\sphericalangle HA'H_1 = \sphericalangle A''A'A_2$, ceeace ne arată că dreptele $A'H_1$ și $A'A_2$ sunt isogonale în raport cu unghiul A' al triunghiului ortic.

La fel, demonstrăm că dreptele $B'H_2$, $B'B_2$ și $C'H_3$, $C'C_2$ sunt isogonale respectiv în raport cu unghiurile B' și C' ale triunghiului ortic A'B'C' și cum dreptele $A'H_1$, $B'H_2$, $C'H_3$ determină, prin intersecția lor, punctul lui GERGONNE al triunghiului ortic A'B'C', rezultă că punctul de concurență K al dreptelor $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$ este isogonalul punctului lui GERGONNE al triunghiului ortic.

E lucru știut însă că isogonalul punctului lui GERGONNE al unui triunghiu oarecare se află pe dreapta OI, care unește centrul cercului circumscris cu centrul cercului înscris al acelui triunghiu. Ori, dreapta OI a triunghiului ortic A'B'C' este tocmai dreapta lui EULER OH a triunghiului ABC, ceeace demonstrează și ultima parte a problemei.

Altă soluţie a fost dată şi de D-nul Tr. Udrisky. D-nii I. C. Vasiliu, C. I. Ciorănescu şi Paul I. Ionescu au rezolvat problema cu ajutorul coordonatelor baricentrice.

D-nul Gh. Mihoc a demonstrat geometriceşte că triunghiurile ABC, A'B'C', $A_2B_2C_2$ sunt homologice, două câte două, şi că au aceeaşi axă de homologie şi anume axa ortică a triunghiului ABC (axa radicală a cercului circumscris şi a cercului lui Euler a triunghiului ABC). Rezultă atunci, după o teoremă cunoscută, că centrele de homologie ale acestor triunghiuri sunt în linie dreaptă. Ori, centrul de homologie al triunghiurilor ABC şi A'B'C' este H, iar al triunghiurilor ABC şi $A_2B_2C_2$ este G, de unde D-sa conchide că centrul de homologie K al triunghiurilor A'B'C' şi $A_2B_2C_2$ se află pe dreapta GH.

*Notă.* Problema propusă nu este, în întregime, nouă.

N. R.

---

PROBLEMA 3172. *Un pătrat este scris cu cifrele 1, 2, 3, 5, 8. Rădăcina lui patrată are suma cifrelor egală cu suma cifrelor patratului. Se cere acel patrat.*

I. Vasiliu.

I. Soluţie dată de D-nii: Marius Georgescu, Eug. D. Georgescu, C. Giurumescu şi C. C. Popovici (Cl. VII R. Lic. Internat, Iaşi); V. Vârlan (Lic. Internat, Iaşi); I. Ţigoiu (Şc. Sup. Comerţ, Constanţa); Arno Kahane, O. M. Florescu (Caracal); Th. Vainfeld (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti); M. Adam (Constanţa); N. Arcadian, L. Genazzini şi P. Petreanu (Caracal); P. Bleiweiss şi N. G. Botea (Lic. Cantemir, Bucureşti); I. I. Georgescu şi Valeriu Manafu (Lic. M-tirea Dealului); Gh. I. Grofşoreanu (Timişoara); Eug. Pălărieru, O. Popea, Corneliu N. Popescu (Giurgiu); Dorin Popescu (Constanţa); B. Reinhorn, H. Cohn, H. Marcovici şi A. Tauber (Botoşani); I. St. Teodorescu (Ploeşti); N. Vasiliu (Lic. Unirea, Focşani); Paul Ionescu şi M. Pătroianu (Lic. M-tirea Dealului).

Numărul cel mai mare ce se poate formă cu cifrele date este 85321, a cărui rădăcină patrată, cu aproximaţie prin lipsă, este 292.

Suma cifrelor date în enunţ fiind 19, trebue să se caute pentru rădăcina patrată numere mai mici ca 292, la care suma cifrelor să fie tot 19. Aceste numere se pot scrie lesne şi anume:

199 şi 289.

Dintre acestea, numai ultimul corespunde problemei, având

$$(289)^2 = 83521.$$

II. Soluție dată de D-l Mihail Stamatiu (Sc. Politechnică, București).

Pentru ca numărul format din cifrele date să fie patrat perfect, trebue să se termine în 1 sau 5. Rădăcina patrată se va termină atunci în 9, 5 sau 1.

Numărul cel mai mare, care se poate formă cu aceste cifre, începe cu 8; deci cea mai mare cifră cu care începe rădăcina patrată este 2.

Cum suma cifrelor rădăcinei patrate este 19, aceasta nu se poate termină cu 1 sau 5, căci ar rezultă ca cifra zecilor să fie mai mare ca 10, ceeace nu se poate.

Atunci, rădăcina patrată se termină cu 9. Numerele care ar satisface condițiilor: *a)* să fie patrat perfect: *b)* suma cifrelor rădăcinei patrate să fie egală cu suma cifrelor patratului, sunt:

$$(199)^2 \text{ și } (289)^2,$$

dintre care numai $(289)^2 = 83521$ satisface și ultimei condiții, adică să fie scris cu cifrele 1, 2, 3, 5 și 8.

Au dat soluții analoage D-nii: Al. Pop (Student, Cluj); Ioan Th. Popovici, Em. Ștefănescu, Eug. Pălărieru, Al. Al. Roșu, M. Ghelber, Th. Diaconescu, B. Gataianțu, Ion Miu, Gh. Ionescu-Zane, N. Jojea, Em. Gaiu, Otto Braiești er, N. Teodorescu.

D-nii: M. Brătescu-Danubiu, L. Brüll, Al. Comănescu-Brătenii, V. Dorneanu, L. Genazzini, Gh. Ghimicescu, C. Ionescu-Bujor, Paul Ionescu, Virg. Iliescu, V. Lăzărescu, I. I. Marinescu, N. St. Mihăilescu, Alex. Mladenovici, N. Nicolescu, (Șc. de Artilerie, Timișoara); M. Pătroianu, Ilie Popa, O. Schächter, Gh. D. Simionescu, Al. Stoica, Gh. G. Vasiliu, Ioan C. V. Vasiliu, I. Vlădea, P. Bleiweiss, au format cu cifrele date numerele ce se termină cu 21, 25, și 81 și, prin încercarea în totalitate sau în parte a acestor numere, au găsit soluția $(289)^2 = 83521$.

Alte soluții s'au primit dela D-nii: David Gh., F. Goldstein, Ide Arie Schächter, Gh. Gh. Vasiliu, M. Dimitrescu, V. Lepădatu, D. Popovici, R. Spathy.

*Observații.* 1. D-nii: Paul Ionescu și Gh. D. Simionescu (Lic. M-tirea Dealului) observă că cifrele din enunț sunt primii termeni ai lui Fibonacci.

2. D-nii: M. Adam, Dorin Popescu, Ilie Popa, Mihai Pătroianu şi Paul Ionescu observă că, lipsind chiar condiţiunea ca suma cifrelor patratului să fie egală cu suma cifrelor rădăcinei lui, se găseşte aceeaşi soluţie.

De fapt, această ultimă condiţie a fost pusă, pentru a nu se face prea multe incercări, la care ar conduce eliminarea uneia din ambele condiţiuni din enunţ.

Maior G. I. Liteanu.

---

PROBLEMA 3213. *Să se arate că, dacă* $\alpha$ *este cel mai mare exponent al lui* a *(prim), care împarte produsul* N!, *atunci:*

$$\frac{N}{a} \leqslant \alpha \leqslant \frac{N}{(a-1)}.$$

Căpitan I. Lintеş.

Soluţie dată de D-nii: M. Adam (Constanţa), C. I. Ciorănescu (M-rea Dealului), F. G. Goldstein (Lc. Gh. Şincai), P. I. Ionescu (M-rea Dealului), M. Gh. Livada, Alex. Ch. Mladenovici (Bucureşti), Eug. Pălărieru (absolvent de liceu), O. Popea (Lc. Ploeşti), Gh. A. Simionescu (M-rea Dealului), Gh. Tailer, N. Teodorescu (Lc. Spiru Haret), I. C. Vasiliu (M-rea Dealului).

Observăm că:

$$\alpha = E\left(\frac{N}{a}\right) + E\left(\frac{N}{a^2}\right) + \cdots,$$

unde E(I) înseamnă întregii cuprinşi în I (notaţia lui Legendre).

Aşă fiind, avem:

$$\frac{N}{a} \leqslant \alpha \leqslant \frac{N}{a} + \frac{N}{a^2} + \cdots$$

Cum însă:

$$\frac{N}{a} + \frac{N}{a^2} + \cdots = \frac{N}{a-1},$$

urmează că:

$$\frac{N}{a} \leqslant \alpha \leqslant \frac{N}{a-1}.$$

*Observaţie.* 1. Mai mulţi corespondenţi au arătat că enunţul ar fi trebuit scris:

$$\frac{N}{a} \leqslant \alpha < \frac{N}{a-1}.$$

Au observat aceasta, D-nii: M. ADAM, A. MLADENOVICI, G. SIMIONESCU, GH. TAILER, N. TEODORESCU.

Enunţul s'ar mai fi putut scrie şi astfel:

$$\frac{N}{a} \leqslant \alpha < \frac{N-1}{a-1},$$

căci e suficient să punem $N = a^n$ spre a găsi că:

$$\alpha = \frac{N-1}{a-1},$$

ceeace evidenţiază observaţia corespondenţilor mai sus citaţi.

Deasemenea, D-l O. POPEA observă că, în multe cazuri, $\alpha$ se poate deduce exact numai din aceste relaţiuni de neegalitate.

CĂPITAN I. L.

---

PROBLEMA 3217. *Să se demonstreze că, între unghiurile unui triunghiu, avem relaţiunea:*

$$\Sigma \sqrt{(\cos B+\cos C+\sin A)(\cos B+\cos C-\sin A)(\cos C+\sin A-\cos B)(\cos B+\sin A-\cos C)} = 2 \sin A \sin B \sin C.$$

GH. D. POPESCU.

1. Soluţie dată de D-nul ION C. VASILIU (Elev Cl. VII Liceul Mânăstirea Dealului).

Fie H ortocentrul unui triunghiu ABC. Avem:

$$\text{aria BHC} + \text{aria CHA} + \text{aria AHB} = \text{aria ABC}. \qquad (1)$$

Dar aria ABC $= 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, iar ariilor BHC, CHA, AHB le vom aplică formula

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

şi vom observă că avem, pentru triunghiul BHC,

$$BC = 2R \sin A, \quad BH = 2R \cos B, \quad CH = 2R \cos C,$$

iar pentru triunghiurile CHA şi AHB valori analoage. Vom simplifică apoi cu $R^2$ şi obţinem formula din enunţ *).

2. Soluţie dată de D-nii: Vasile Vârlan, Adrian Novac, V. S. Dorneanu, Const. Giurumescu (Elevi Liceul Internat, Iaşi), Ion M. Miu (Elev Cl. VI Liceul Ioniţă Asan, Caracal), Mircea Adam, Marin Ştefan (Constanţa), M. Dimitrescu (Elev Cl. VII Liceul Roman-Vodă, Roman), Manoil Adolf (Elev particular, Roman), S. Tudorache (Iaşi), Leon Căldăraru (Elev particular, Cl. VII, Bucureşti), I. S. Teodorescu, V. I. Lepădatu, C. Ionescu-Bujor, N. P. Arcadian.

Primii doi factori de sub radical îi putem pune sub forma:

$$(\cos B+\cos C)^2-\sin^2 A=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos B\cos C-1$$
$$=2\cos B\cos C-2\cos A\cos B\cos C=2\cos B\cos C(1-\cos A).$$

In mod analog, găsim că produsul ultimilor doi factori este egal cu $2\cos B\cos C(1+\cos A)$.

Aşă dar, prima parte a relaţiei propuse se poate scrie:

$$\Sigma\sqrt{4\cos^2 B\cos^2 C(1-\cos^2 A)}=2\,\Sigma\cos B\cos C\sin A$$
$$=2\sin A\sin B\sin C,$$

ultima egalitate fiind dedusă din identitatea cunoscută

$$\sin(A+B+C)=\Sigma\sin A\cos B\cos C-\sin A\sin B\sin C,$$

făcând $A+B+C=180^0$.

3. Soluţie dată de D-nii: Ovidiu Popea (Chişinău), Virgil Coşniţă (Elev Cl. VII Liceul Bârlad), Ion C. Vasiliu, Gh. D. Simionescu, Paul I. Ionescu, C. I. Ciorănescu, M. I. Pătroianu (Elevi Liceul Mânăstirea Dealului), C. C. Popovici (Elev Cl. VII, Liceul Internat), I. Th. Popovici, Filip S. Goldstein (Elevi Cl. VII Liceul Gh. Şincai), Valeriu I. Stamatescu (Student), Arno Kahane, P. Gr. Cristea, I. L. Grigorescu.

Transformând sumele din fiecare paranteză în produs, avem:

$$\cos B+\cos C+\sin A=4\sin\tfrac{1}{2}A\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}B)\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}C),$$
$$\cos B+\cos C-\sin A=4\sin\tfrac{1}{2}A\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}B)\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}C),$$
$$\cos C-\cos B+\sin A=4\cos\tfrac{1}{2}A\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}B)\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}C),$$

*) Aceeaşi soluţie ne-a fost indicată de autorul problemei, la trimeterea ei.

(N. R.).

$$\cos B - \cos C + \sin A = 4\cos\tfrac{1}{2}A \sin(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B)\cos(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}C),$$

aşà că prima parte a expresiei propuse devine

$$\Sigma 16 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}A \sin(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B)\cos(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B)\sin(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}C)\cos(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}C)$$
$$= 2\Sigma \sin A \sin(\tfrac{1}{2}\pi - B)\sin(\tfrac{1}{2}\pi - C) = 2\Sigma \sin A \cos B \cos C$$
$$= 2\sin A \sin B \sin C.$$

*Observaţie.* Problema, astfel cum a fost propusă, are loc numai pentru cazul când triunghiul are toate unghiurile ascuţite. Totuşi, problema subsistă cu o modificare de semn şi în cazul când unul din unghiurile triunghiului este obtuz. Eleganta soluţie a D-lui I. C. Vasiliu ne arată foarte uşor care e acea modificare. Aşteptăm dela corespondenţii noştri să ne trimeată o notă în această privinţă.

(V. C.).

---

PROBLEMA 3247. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\arcsin x + \operatorname{arc\,tg} x = 0.$$

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: C. I. Ciorănescu (Lic. Mânăstirea Dealului); M. Ghelber (Seminarul pedagogic, Bucureşti); C. S. C. Felix (Lic. Cantemir, Bucureşti); G. I. Zane, N. Segârceanu, C. T. Ionescu, Ath. Radev, P. G. Cristea, N. Teodorescu, A. Opran, E. M. Masoler, P. Bleiweiss, V. G. Dorneanu.

Punem:

$$\arcsin x = u, \qquad \operatorname{arc\,tg} x = v, \qquad u + v = 0.$$
$$\sin u = x, \qquad \operatorname{tg} v = x,$$
$$\sin u = \operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(-u) = -\frac{\sin u}{\cos u},$$

cum $u = \frac{1}{2}\pi$ nu satisface ecuaţia, putem goni numitorul şi avem:

$$\sin u (1 + \cos u) = 0,$$
$$\sin u = 0, \qquad \cos u = -1.$$

A doua ecuaţie are soluţiile coprinse printre ale primei. Deci rămâne:

$$\sin u = x = 0.$$

Alte soluţii de D-nii: N. G. Botea, A. Stoica (Lic. Cantemir, Bucureşti); D. A. Popescu (Lic. Târgovişte); M. G. Velea (Lic. Militar, Craiova); N. Arcadian, L. M. Brüll, O. M. Schächter, V. Vârlan, A. Novac, S. Weiss, C. C. Popescu, M. Blumen.

# EXERCIŢII

43. Ce condiţie trebue să indeplinească $n$ pentruca expresiunea:

$$\frac{(1+2+3+\ldots+n)(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3},$$

să fie număr întreg?

CĂPITAN GR. ZAPAN.

R. Avem:

$$S_1 = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{3}.$$

$$S_2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}.$$

$$S_3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Deci:

$$\frac{S_1 S_2}{S_3} = \frac{2n+1}{3},$$

de unde se vede că $n$ trebuie să fie de forma

$$\mathcal{M}3+1.$$

44. Se cere un număr de trei cifre aşà ca suma tutulor numerelor de una, două şi trei cifre, ce se pot formà cu acele cifre, să fie un patrat perfect.

S. KATZ.

R. Suma numerelor de o cifră este $(s+z+u)$; de două cifre 22 $(s+z+u)$ şi de trei cifre este 222 $(s+z+u)$; suma totală 245 $(s+z+u)=7^2.5(s+z+u)$. Deci $(s+z+u)=5$; sau $(s+z+u)=20$. Acestea sunt condiţiunile.

45. Care patrate de patru cifre rămân patrate dacă le scrim răsturnate?

DAVID GHEORGHE.

R. Numerele încep şi se sfârşesc cu 1; 4; 5; 6 sau 9. Fie $1sz1$ şi $1zs1$ patrate. Rădăcina primului începe cu 3 sau 4 şi se termină cu 1 sau 9, şi fiind mai mare ca $\sqrt{1000} > 31^2$, nu poate fi decât 39 sau 41. Se verifică că nu convin. Se găseşte, pe calea aceasta, soluţia:

$$1089 = 33^2 \quad \text{şi} \quad 9801 = 99^2.$$

46. In ce caz, cubul unui număr terminat cu 5 are ultimele trei cifre ale sale identice cu ultimele trei cifre ale patratului acelui număr?

I. M. MIU.

R. Trebuie găsit $n$ aşà în cât:

$$(10n+5)^3-(10n+5)^2 = \mathcal{M}1000,$$

$$(2n+1)^2(5n+2) = \mathcal{M}20.$$

$$2n+1 = \mathcal{M}5, \qquad 5n+2 = \mathcal{M}4.$$

A doua cere $n$ pereche; deci $n = 2m$, şi avem:

$$4m + 1 = \mathcal{M}5, \qquad 5m + 1 = \mathcal{M}2.$$

A doua cere $m$ nepereche; deci prima cere $m$ terminat cu 1. Deci $m = \mathcal{M}10 + 1$ şi $n = \mathcal{M}20 + 2$. Numărul căutat este $10n + 5 = \mathcal{M}200 + 25$ Ultimele trei cifre ale numărului căutat pot fi numai 025; 225; 425; 625; 825.

47. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând latura BC, lungimea medianei ce pleacă din A şi distanţa vârfului A la ortocentrul H.

MARIN ŞTEFAN.

R. Fie M mijlocul laturei BC şi O centrul cercului circumscris. Se ştie că OM este perpendiculară pe BC şi avem $OM = \frac{1}{2}AH$. Putem deci construi cercul circumscris, iar vârful A va fi la intersecţia acestui cerc cu cercul descris din M ca centru cu lungimea medianei drept rază.

48. Dreptele care unesc vârfurile unui triunghiu ABC cu un punct oarecare din planul triunghiului, taie laturile opuse în punctele A', B', C'. Dreapta AA' împarte triunghiul considerat în două triunghiuri ABA', ACA', a căror arie să o însemnăm cu $S_1$ şi $S'_1$. Fie $S_2$, $S'_2$ şi $S_3$, $S'_3$ ariile triunghiurilor determinate de celelalte două drepte. Să se demonstreze că avem relaţia:

$$S_1S_2S_3 = S'_1S'_2S'_3.$$

CONST. I. CIORĂNESCU.

R. Triunghiurile ABA', ACA' au aceeaşi înălţime, deci ariile lor sunt proporţionale cu bazele lor CA' şi BA', etc. Avem deci

$$\frac{S_1S_2S_3}{S'_1S_2S'_3} = \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1.$$

49. Fie $d_a$, $d_b$, $d_c$ distanţele dela vârfurile unui triunghiu ABC la ortocentrul său şi $R_a$, $R_b$, $R_c$ razele cercurilor circumscrise triunghiurilor OBC, OCA, OAB, O fiind centrul cercului circumscris. Să se demonstreze relaţiunile:

$$\frac{d_a^2 + a^2}{R_a} + \frac{d_b^2 + b^2}{R_b} + \frac{d_c^2 + c^2}{R_c} = 8(R + r),$$

$$\sqrt{\frac{d_a}{R_a}} + \sqrt{\frac{d_b}{R_b}} + \sqrt{\frac{d_c}{R_c}} = 2\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

MARIN ŞTEFAN.

R. Se ştie că $d_a = 2R\cos A$, etc., iar în *Culegere de Probleme Trigonometrie* pag. 476, găsim $R_a = R : 2\cos A$, etc. Deci:

$$\frac{d_a^2 + a^2}{R_a} = \frac{4R^2(\cos^2 A + \sin^2 A)}{R} \cdot 2\cos A = 8R\cos A, \text{ etc.},$$

$$\Sigma \frac{d_a^2 + a^2}{R_a} = 8R \Sigma \cos A = 8(R + r).$$

$$\frac{d_a}{R_a} = (2\cos A)^2, \quad \Sigma \sqrt{\frac{d_a}{R_a}} = 2 \Sigma \cos A = 2\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

50. Fie O centrul unui cerc dat. Pe mijlocul M al unei raze OP, se ridică o perpendiculară care taie cercul în B. Prin mijlocul lui MB, se duce o perpendiculară pe MB, care taie cercul cu centrul M şi raza MB în punctul C, iar raza OB întâlneşte acelaş cerc în punctul A. Se cere să se demonstreze: 1) că punctele A şi C sunt simetrice faţă de M; 2) că triunghiul ABC este dreptunghic în B; 3) să se afle locul punctului C.

MAX. A. BERNSTEIN.

R. Triunghiul OBP este echilateral, căci OB=OP ca raze, iar OB=PB ca oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei. Pentru motive analoage, triunghiul MBC este echilateral. Deci $\sphericalangle BMC = 60^0$, $\sphericalangle CMP = 30^0$; $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBO = 30^0$; $\sphericalangle BMA = 120^0$; $\sphericalangle OMA = 30^0$; deci unghiurile CMP şi OMA sunt egale şi cum sunt opuse la vârf, MA şi MC sunt în prelungire. Apoi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABM + \sphericalangle MBC = 30^0 + 60^0 = 90^0$; $MA = MB = MC$. Triunghiul OPC este de mărime constantă, căci OP e raza cercului dat, $\sphericalangle OPC = 120^0$, $\sphericalangle COP = 30^0$. Locul lui C este un cerc concentric cu O.

51. Să se demonstreze că distanţa dela centrul cercului circumscris unui triunghiu până la piciorul înălţimei scoborîte din vârful A este egală cu

$$R\sqrt{1 - \sin 2B \sin 2C}.$$

KAHANE ARNO.

R. Fie O centrul cercului ABC, A' piciorul înălţimei AA'. Se ştie că dreptele AA' şi AO sunt isogonale, iar $\sphericalangle OAA' = \pm (B - C)$. Avem apoi $OA = R$, $AA' = b \sin C$, sau $AA' = 2R \sin B \sin C = R[\cos(B-C) - \cos(B+C)]$.

In triunghiul OAA', avem atunci

$$\overline{OA'}^2 = R^2 + R^2[\cos(B-C) - \cos(B+C)]^2 - 2R^2[\cos(B-C) - \cos(B+C)]\cos(B-C)$$

$$\therefore \quad \overline{OA'}^2 = R^2 + R^2[\cos^2(B-C) - \cos^2(B+C)]$$

$$\therefore \quad \overline{OA'}^2 = R^2(1 - \sin 2B \sin 2C).$$

52. Fie $l_a$, $l_b$, $l_c$ lungimile bisectoarelor interioare, $l'_a$, $l'_b$, $l'_c$, lungimile bisectoarelor exterioare ale unui triunghiu oarecare ABC. Să se demonstreze relaţiunea

$$\frac{l_c}{l'_c} - \frac{l_a}{l'_a} - \frac{l_b}{l'_b} = \frac{l_a\, l_b\, l_c}{l'_a\, l'_b\, l'_c}. \qquad (a > c > b)$$

EMIL ŞTEFĂNESCU.

R. Triunghiurile dreptunghice formate de bisectoara interioară, bisectoara exterioară şi latura opusă ne dau

$$\frac{l_a}{l'_a} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-B), \quad \frac{l_b}{l'_b} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C), \quad \frac{l_c}{l'_c} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B),$$

şi utilizăm apoi relaţiunea cunoscută

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-A)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-A),$$

care are loc între trei unghiuri a căror sumă e zero sau $k.180^0$.

53. Să se demonstreze relaţiunea:

$$\frac{1}{\sin A}\left(\frac{h_b+h_c}{d_b+d_c}\right)+\frac{1}{\sin B}\left(\frac{h_c+h_a}{d_c+d_a}\right)+\frac{1}{\sin C}\left(\frac{h_a+h_b}{d_a+d_b}\right)=\frac{p}{r},$$

în care $h_a$, $h_b$, $h_c$ sunt înălţimile, iar $d_a$, $d_b$, $d_c$ segmentele din înălţimi cuprinse între vârfurile şi ortocentrul unui triunghiu ABC.

MARIN ŞTEFAN.

R. Avem $h_a = 2R\sin B\sin C$, etc. $d_a = 2R\cos A$, etc.

$$\frac{h_a+h_b}{d_a+d_b}=\sin C\,\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\sin C\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,.\ \text{Deci}$$

$$\sum\frac{1}{\sin C}\cdot\frac{h_a+h_b}{d_a+d_b}=\sum\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C=\frac{p}{r}.$$

## PROBLEME PROPUSE

3261. Dacă $a, b, c, m, s, z, u,$ sunt cifre, să se găsiască soluţiile ecuaţiei:

$$mszu \times ms = abcabc.$$

I. IONESCU.

3262. Suma patratelor a două numere întregi, sporită cu produsul lor, se divide cu suma lor sporită cu un alt număr, iar câtul este acest din urmă număr. Se cer cele trei numere.

E. ŞTEFĂNESCU.

3263 Să se demonstreze că, ori care ar fi $m$, un divizor comun numerelor $20m+661$ şi $15m+329$ este divizor şi al numărului 667. Să se găsiască apoi toate valorile generale pe care le poate

lua $m$, pentru ca cele 2 numere să aibă un divizor comun diferit de unitate.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

3264. Paralelele duse din centrul I al cercului înscris unui triunghiu ABC la dreptele $MA_1$, $MB_1$, $MC_1$, care unesc un punct M al cercului circumscris cu punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$ unde bisectoarele interioare, sau exterioare taie cercul circumscris, întâlnesc laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare.

M. Grümbaum.

Să se demonstreze că cele două drepte determinate, în modul de mai sus, de bisectoarele interioare și exterioare, corespunzătoare unui aceluiaș punct M de pe cercul circumscris, sunt paralele.

V. Cristescu.

3265. Fie H ortocentrul, O centrul cercului circumscris și A'B'C' triunghiul ortic al unui triunghiu oarecare ABC, iar $A_1$, $B_1$, $C_1$ punctele unde cercul înscris în triunghiul A'B'C' atinge laturile acestui triunghiu. Să se demonstreze că dreptele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ concură într'un punct Q situat pe OH și că raportul

$$\overline{QH} : \overline{QO} = 2\cos A \cos B \cos C.$$

Ath. Radev.

3266. Să se demonstreze că, între elementele unui triunghiu oarecare, avem relațiunea:

$$(b-c)r_a + (c-a)r_b + (a-b)r_c = (b-a)(c-b)(a-c) : r.$$

Adrian A. Bușilă.

3267. Să se calculeze determinanții obținuți din tabloul ce urmează, prin suprimarea unei coloane:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\frac{1}{3} & \frac{1}{5}-\frac{1}{4} & \frac{1}{6}-\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}-2\frac{1}{4}+\frac{1}{3}, & \frac{1}{6}-2\frac{1}{5}+\frac{1}{4}, & \frac{1}{7}-2\frac{1}{6}+\frac{1}{5}, & \frac{1}{8}-2\frac{1}{7}+\frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

Să se găsiască expresiunea generală a acestor determinanți, pornind dela un tablou de $(2k+2)$ coloane și $(2k+1)$ linii.

E. Abason.

3268. Să se demonstreze că seria, al cărui termen general este

$$U_n = (2n+1)\left[\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n+1)}\right]^2$$

este convergentă pentru

$$\lambda > -\frac{1}{2}$$

și are ca sumă $\dfrac{1}{2\lambda+1}$.

A. Angelescu.

3269. Să se arate că avem inegalitatea

$$e^x \geqslant 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

pentru $n$ impar, oricare ar fi $x$ real, egalitatea neavând loc decât pentru o singură valoare.

Th. Angheluță.

3270. Fie $A_1$, $B_1$, $C_1$ punctele unde transversalele unghiulare AP, BP, CP taie laturile opuse BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Fie apoi $A_2$, $A_3$ proiecțiile lui $A_1$, făcute sub un acelaș unghiu $\alpha$ și în acelaș sens, pe laturile AB, AC; $B_2$, $B_3$ proiecțiile punctului $B_1$, făcute în acelaș sens ca mai sus și sub acelaș unghiu $\alpha$ pe laturile BC, BA; $C_2$, $C_3$ punctele analoage obținute cu ajutorul lui $C_1$.

Să se demonstreze că dreptele $A_2A_3$, $B_2B_3$, $C_2C_3$ determină un triunghiu A'B'C' isologic cu triunghiul ABC.

Mihail I. Focșeneanu.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Ablov A.* (2991); *Adam M.* (2978, 91); *Angelescu N. Tr.* (2991); *Antoniu S. I.* (3090); *Arcadian N.* (3184, 202, R); *Bărbulescu C.* (2991); *Berdan C.* (2991); *Berindei M.* (2991); *Bernstein Max* (E); *Blaha N.* (2471, 660, A, P); *Bleiweiss P.* (3218, 51, R); *Blumen M.* (3222); *Bocănescu Kirilă* (2991); *Botea N.* (2991, 3173, 202, 18, 39, 43, 51, R); *Botez M.* (N); *Brüll L.* (3202, 18, 43, 51); *Budișteanu Al.* (3222); *Cantacuzino I.* (2991); *Ciorănescu C.* (2838, 918, 213, 39); *Ciorănescu M.* (3243); *Constantinescu I.* (2991); *Coșereanu Ion* (3090); *Cristea Gr. P.* (3218); *David G.* (3184); *Dumitrescu A. M.* (2929, 3172, 202); *Dorneanu V.* (3173, 243); *Drăghiceanu M.* (3184); *Epure St.* (2991); *Focșeneanu I. M.* (3175, 86, 244, 50, P); *Frătici I.* (3218); *Gaiu Em.* (3218, 22, E); *Gataianțu B.* (2683); *Georgescu I. I.* (E, N, P, R); *Georgescu M.* (3184); *Georgescu-Racoviță I.* (2918); *Georgescu-Roegen N.* (3013); *Ghițescu V.* (3090); *Goilav Cr.* (3090); *Goldstein F.* (3173, 213, 14); *Grabovski E.* (2991); *Grigorescu I.* (3184, 218, 22); *Grünbaum Micu* (A); *Hami Cohn* (3173); *Iliescu Dima* (2991); *Iliescu Em.* (2991); *Ionescu P.* (2838, 991, 3173, 213, 43); *Ionescu-Bujor T. C.* (3218); *Istinie I. C.* (R); *Jojea N.* (3222); *Kahane Arno* (3218); *Katz S.* (2891, 946, 3251); *Lepădatu V.* (3172, 243); *Manafu V.* (2918, R); *Marcovici H.* (3173); *Marcus Fr.* (2991); *Mihăescu C.* (2991); *Mihăilescu St. N.* (3218, N); *Mihoc G.* (2961, 3214); *Mirescu P* (3239); *Mitescu D.* (2991); *Miu M. I.* (3218, 22, R); *Mladenovici A.* (2991, 3251); *Niculescu Al.* (3090); *Novac A.* (3243); *Opran Al.* (3202, 22, R); *Pălărieru E.* (3213); *Pătroianu D.* (3195); *Pătroianu M.* (2683, 856, 978, 91); *Popa I.* (1948, 3222, 43); *Popea O.* (2856, 91, 918, 91, 3052, 173, 213, 39); *Popescu N. C.* (1948, 2929, 3184, 245); *Popescu Fl.* (2991); *Popescu D. Gh.* (N); *Popescu D. M.* (2991); *Popescu Spirea* (2918); *Popovici C. C.* (3155, 73, 202, 22, 43, E, R); *Popovici P. Dan* (3172, 202, 22, R); *Popoviciu T.* (3042, 90); *Rabinovici F.* (2991); *Roșu Al. Al.* (2683, 918, N, R); *Schächter I.* (3243); *Schächter O.* (3218, 43); *Schileru D.* (2991); *Segal L.* (3222, R); *Segârceanu N.* (3173, 202, 22); *Solacolu Ș.* (2991); *Spacu G. P.* (3239); *Spathy I. R.* (3172, 218, 43); *Spiridonescu Gh.* (3218); *Stoica A.* (R); *Stoicescu T.* (3251); *Stroescu G.* (2991, 3184); *Tailer G.* (2978, 213); *Țânțăreanu P.* (2991); *Tauber O.* (2991); *Teodorescu N.* (3202, 13, 22, P); *Vasiliu Gh.* (3222, N, R); *Vasiliu C. I.* (2838, 918, 91, 3213, 39); *Weiss Solomon* (3175, 215, 54, N); *Zane I. Gh.* (3202, 22); *Zuckerman B.* (2991).

---

***Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.***

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2063, 222, 318, 46, 58, 59, 95, 97, 421, 36, 43, 71, 97, 510, 610, 40, 49, 706, 856, 61, 79, 906, 20, 31, 72, 80, 3024, 40, 59, 71, 92, 102, 04, 13, 31, 40, 58, 62, 67, 73, 78, 82, 85, 91, 203, 06, 07, 13, 16, 21, 27, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 48, 52, 58 și 59, nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

## Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

### 29 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abrahamescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi St. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste preţuri se vor adăogă taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

Onor Asociaţiunea pentru cultura şi literatura Poporului Român
din
Sibiu

# ZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1925.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNII SIBIU

SUMARUL

1. Proprietăţi importante ale triunghiului . . *N. Blaha.*
2. Patrate decapitate (urmare) . . . . . *Emil Ştefănescu.*
3. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 septemvrie 1923-1 septemvrie 1924.
4. Note Matematice: 39—45.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografii.
7. Cereri: 120.
8. Probleme rezolvate: 1986, 2719, 2931, 3030, 3152, 3158, 3207, 3224.
9. Exerciţii: 54—61.
10. Probleme propuse: 3271—3280.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 97

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

---

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

---

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

---

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

---

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

---

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 55, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 90, 92, 94, 208, 19, 20, 26, 28, 30, 32, 38, 40, 49, 55, 57, 58, 60, 62, 63, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

# GAZETA MATEMATICA

ANUL XXX *SUPLIMENT* No. 7


## RECREAŢIUNI

1. **Numere rimate.** In continuare la recreaţiunea din No. 4 cu acelaş titlu, găsesc, în cântece populare, următoarele:

*a)* Este o piatră nestimată, ce plăteşte lumea toată, Bucureşti $\frac{1}{3}$ (a treia parte), Ţarigrad $\frac{1}{2}$ (în jumătate).

*b)* Şi-a tăiat mereu copii, Pânăla 40000, de 2 ani şi mai în jos, ca să afle pe Cristos.

C. C. POPOVICI.

* * *

2. **Bis!** Luna trecută, mă întâlnesc cu un domn pe o stradă şi mă întreabă, încotro este numărul 36? Eram la capul străzii, care fiind scurtă, nu aveà acest număr. Ii spun că strada nu are acest număr şi că să-mi arate dacă are însemnată adresa. Imi răspunde că are o hârtie, însă acolo scrie 6 *bis*, ceeace face şase ori şase, adică 36!

I. I.

* * *

3. **Regula orbului.** Se spune că un grec orb HOMEROS a deslegat o problemă dintr'o aritmetică greacă, printr'o metodă specială, care a rămas multă vreme în aritmetică cu numele de *Regula coeci.*

I. I.

* * *

4. **Asupra problemei 3123.** Prin această problemă propusă în Anul XXIX pag. 159 se cere: *„un patrat perfect de 4 cifre consecutive scrise într'o ordine oarecare"*. Soluţiile sunt 4356 şi 5476. Printre numeroşii rezolvitori ai acelei probleme unul termină cu observaţia:

*„Probabil că în enunţ s'a făcut o greaşeală zicând să se găsiască* un *patrat perfect.... de oarece sunt două patrate care satisfac problema"*.

Am reprodus observarea cu ortografia ei la cuvântul *greaşeală*. Probabil că autorul a făcut o adevărată greşeală când a făcut observarea!

G. B.

* * *

5. **Încă o geometrie.** Pe lângă cele 100 şi mai bine de feluri de geometrii arătate în *Gazeta Matematică*, menţionez aci una practică. Ea se găseşte în *Le lys rouge* de *Anatole France*, pag. 341 unde se poate citi:

„*C'est beau tout de même, cette géometrie verdoyante*".

G. B.

* * *

6. **Geometrie practică.** În volumul „*Pe drumuri de munte*" de C. Hogaş, găsim la pagina 221:

„Bedreag scoase din brecinar o aţă lungă şi groasă şi cu o *destoinicie de matematic*, apăsă *meridiane* şi *paralele* pe *hemisferul cald* al mămăligei şi mămăliga se desfăcù, risipindu-se în fierbinţi.... *corpuri geometrice!*"

C. C. Popovici.

* * *

7. **Să se arate geometriceşte că 1,0 = 0,5!** Citim în *Cosmografia* D-lui N. Abramescu, pagina 12, demonstraţia următoare:

„*Cercul* orar al unei stele *este semi-cercul* ce trece....".

F. Negretzu

* * *

8. **Cerc constant variabil!** Într'o „*Cronică culturală*" a unui ziar, un avocat scrie:

„.... care şi-a făcut un *cerc constant* de auditori, al căror număr *creşte* dela o conferinţă la alta".

Danubiu.

* * *

9. **Geometria fizică.** Mansion spune:

„Geometria este fizica matematică a distanţelor".

I. I.

* * *

10. **Triunghiuri literare.** Romanul lui V. Blasco Ibanez institulat „*Floare de Mai*" începe astfel:

„Liniştită, marea dormea, netedă ca oglinda, fără cea mai mică ondulaţie, iar razele Soarelui se îmbinau pe apele moarte într'un lung *triunghiu* de aur înfiorat".

M. Adam.

* * *

11. **Educaţie!** În programul liceelor întocmit de D-l G. N. Ionescu, la pagina 57 se poate citi: „*Educaţii de gradul al doilea*".

Al. C. Mladenovici.

* * *

12. **Ecuaţie.** Orice ecuaţie de gradul I cu o necunoscută e de forma:

$$ax + b = 0,$$

pe care o putem scrie:

$$0 \cdot x^2 + ax + b = 0,$$

$$\therefore \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 0}}{2 \times 0} = \frac{-a \pm a}{0}$$

$$x_1 = \frac{0}{0} \qquad x_2 = \frac{a}{0} = \infty.$$

Deci, orice ecuaţie de gradul I are o rădăcină nedeterminată şi alta infinită!

O. Schächter.

* * *

13. **Ecuaţie fără necunoscută!** La o lecţiune profesorul dă unui elev să deslege ecuaţia:

$$x = -x.$$

Elevul se repede, împarte de o parte şi de alta cu $x$ şi scoate:

$$1 = -1.$$

Profesorul. — Ce este asta?

Elevul. — Ecuaţie la care m'am scăpat de necunoscută!

C. I. Conicior.

* * *

14. **Infinitul.... alb.** In poezia „*La Mare*" de M. Celarian găsim:

„Se desfundă în infinituri albe zarea,
Ca să incapă Marea!

O. Popea.

* * *

15. **Biata trigonometrie.** Un corespondent din Galaţi ne-a trimis o notă asupra triunghiului automedian, în care găsim:

$$3\cot gA = \cot g\omega,$$

$$\therefore \quad A = 3\omega!$$

I. I.

* * *

16. **Preciziune matematică!** Intr'un articol de reportaj, citesc următoarele:

„Se *crede* că criminalul s'a ascuns pe *undevà* prin oraş şi va fi prins în *cea mai scurtă* vreme".

Noroc că lumea s'a obişnuit să uite asemenea precizări!

O. Popea.

* * *

17. **Matematica în literatură.** Sunt unii autori cărora nu le ajung numărul extrem de mare al *figurilor literare* şi mai întrebuinţează, în scrierile lor, şi figuri deduse din expresiuni sau termeni matematici. S'au făcut dese, citaţiuni, în Suplimentele *Gazetei Matematice*, de astfel de *figuri*. Am citat nu de mult, un pasaj întreg dintr'o critică teatrală, de D-l C. MOLDOVANU, în care termenii matematici abondau. Se pare că D-sa are o atenţie specială pentru astfel de termeni, căci iată câtevà citaţii din ultimul său roman: „*Purgatorul*“ :

*Tangente la necaz:* „Suflet făcut din caritate şi iubire, îşi însuşeà toate suferinţele celor din jur, le primeà cu un răsunet sporit în intimitatea ei şi de multe ori *tangenta* acestor necazuri şi mâhnirii apropiate dura în focul ei interior mai prelung decât în fiinţele încercate“ (Vol. I, pag. 47).

*Elipse repezi. Rotiri precipitate:* „Dar una din făclii începù să sfârâe iarăşi şi atunci întorcându-se, desluşi un fluture de noapte care desemnà din zbor *elipse repezi*, având mucul aprins drept *focar*, pârlindu-şi din când în când aripile în *rotirea-i* pricipitată“ (Vol. I, pag. 101).

*Punctul:* „Onoarea femei e ca *punctul matematic*, se poate defini şi totuşi nu există“ (Vol. I, pag. 148).

*Unghiul estetic:* „Permiteţi-mi maestre..... mă rog, sub ce *unghiu estetic* consideraţi D-voastră natura?“ (Vol. II, pag. 72).

*Energie şi patimă cu kg., etc.:* „Posibil!... interveni pedant reprezentantul *forţei publice*.... Psihologia mulţimii vădeşte o sete de sânge şi o criminalitate de care individul izolat e cu totul străin.... De exemplu: dacă am presupune că *patru* indivizi au fiecare izolat câte *un kilogram de energie*, sau *de patimă*, când sunt în grup, *rezultanta* contopirei acestor *forţe* sau *pasiuni*, nu e *patru kilograme*, ci *patruzeci* sau *patru sute*.... Pentru colectivitate trebuie să aplicăm *progresia aritmetică* şi de multe ori chiar cea *geometrică*“ (Vol. II, pag. 159).

*Elipsă vânătă.* „Stătură o clipă ca să contemple câmpul de curse şi neted, pe care pista desemnà o *elipsă vânătă*, *largă* însemnată pe margini cu stâlpi albi vârâţi în pământ“ (Vol. II, pag. 195).

Se întâmplă adesea că şi unii din corespondenţii noştri încearcă să facă figuri literare în rezolvarea problemelor ce ne trimit, însă dacă literaţii au reuşit să măsoare energia şi patimile cu kilogramul, sau să vază *elipse vinete* sau *verzi*, corespondenţii cu acele soluţii, nu reuşesc decât ca, printr'o *rotaţie precipitată*, acele soluţii să fie aruncate în sobă, unele se schimbă de mai multe ori de culoare până ce se transformă în cevà care se numeşte cenuşă, oricare ar fi *unghiul estetic* sub care le-ar privi redactorul.

G. B.

* * *

18. **Operaţiuni.** „*Aritmetica, Algebra, Contabilitatea* şi *Medicina* se aseamănă“ ; în toate se fac *operaţiuni* ; toate se ocupă de *calcule*“.

V. CEAUŞOGLU.

# PROPRIETĂȚI IMPORTANTE ALE TRIUNGHIULUI.

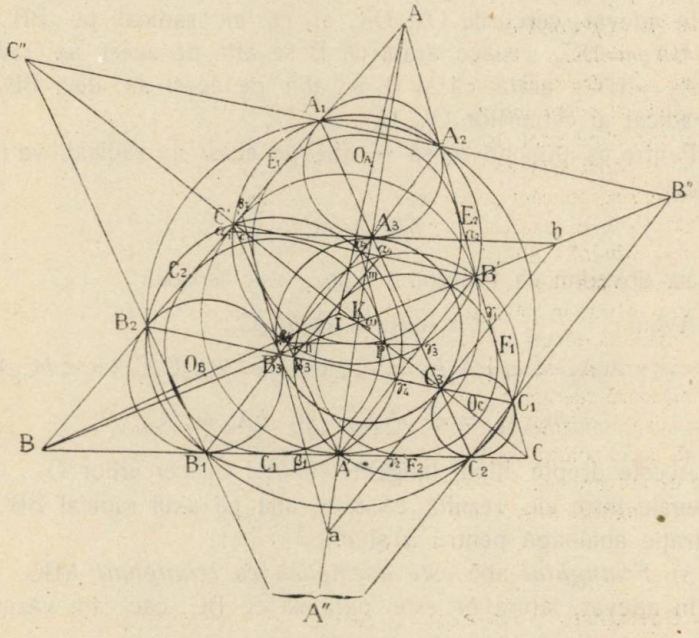
Fie ABC un triunghiu dat, iar $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ intersecțiile laturilor triunghiului cu un cerc concentric cu cercul înscris I și de rază mai mare ca aceea a cercului înscris.

Punctele $A_1$, $A_2$ aflându-se respectiv pe AB, AC, $C_1$, $C_2$ respectiv pe AC, BC, iar $B_1$, $B_2$ pe BC, AB, coardele $A_2B_1$, $A_1C_2$, $C_1B_2$ se întretaie în trei puncte $A_3$, $B_3$, $C_3$, (a se vedeà figura).

Fie A', B', C' punctele de contact ale cercului înscris I, cu laturile triunghiului ABC.

1) *Cercurile circumscrise triunghiurilor* $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ *sunt tangente laturilor triunghiului dat* ABC, *respectiv în perechile de puncte* $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$; $C_1$, $C_2$.

Va fi deajuns a arătà că:




$\sphericalangle C'A_1A_3 = \sphericalangle A_1A_2A_3$ și $\sphericalangle B'A_2A_3 = \sphericalangle A_2A_1A_3$.

In adevăr, avem:

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_1A_2B_1 = \sphericalangle A_1C_2B_1,$$

însă $A_1C_2$ este paralelă cu $B_2B_1$, iar $A_1B_2 = B_1C_2$, deci patrulaterul $A_1C_2B_1B_2$ este un trapez isoscel și, prin urmare:

$$\sphericalangle C'A_1A_3 = \sphericalangle B_1C_2A_1 = \sphericalangle A_1A_2A_3.$$

Tot așa se arată că $\sphericalangle B'A_2A_3 = \sphericalangle A_2A_1A_3$

și deci că cercurile în chestiune sunt tangente la laturile triunghiului, în punctele arătate.

Fie $O_A$, $O_B$, $O_C$ centrele acestor cercuri, iar $\alpha_1$, $\alpha_2$ intersecțiile laturilor AB, AC cu tangenta în $A_3$ la cercul cu centrul $O_A$; tot astfel se obțin punctele $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$.

2) *Triunghiul* abc *determinat de tangentele* $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ *la cercurile* $O_A$, $O_B$, $O_C$, *în* $A_3$, $B_3$, $C_3$, *își are vârfurile pe simedianele triunghiului* A'B'C'.

Pentru a demonstrà aceasta, e de ajuns a arătà că simedianele triunghiului A'B'C', sunt axele radicale ale cercurilor $O_A$, $O_B$, $O_C$ și că triunghiul *abc* își are vârfurile pe aceste axe radicale.

In adevăr, cercurile $O_A$, $O_C$, au ca ax radical pe BB', căci avem $BA_1 = BC_2$, ceeace arată că B se află pe acest ax radical; iar $B'A_2 = B'C_1$, arată că și B' se află pe acest ax, deci BB' este axul radical al cercurilor $O_A$, $O_C$.

Pentru ca punctul *b*, să se afle pe acest ax radical, va trebui să avem:

$$bA_3 = bC_3,$$

adică să dovedim că triunghiul $A_3bC_3$ este isoscel.

Avem: $\sphericalangle \alpha_1A_3A_1 = \sphericalangle bA_3C_3$,

însă: $\sphericalangle\alpha_1A_3A_1 = \sphericalangle\alpha_1A_1A_3 = \sphericalangle\gamma_2C_2C_3 = \sphericalangle\gamma_2C_3C_2 = \sphericalangle bC_3A_3$,

deci: $bC_3A_3 = \sphericalangle bA_3C_3$ și $bA_3 = bC_3$.

Aceste drepte fiind tangente în $A_3$, $C_3$ cercurilor $O_A$, $O_C$ și fiind egale între ele, rezultă că *b* se află pe axul radical BB'. Demonstrație analoagă pentru *a* și *c*.

3) *Triunghiul* abc *este asemenea cu triunghiul* ABC.

In adevăr, latura *bc* este paralelă cu BC, căci am văzut că:

$$\sphericalangle \alpha_1A_3A_1 = \sphericalangle BC_2C_3,$$

ceeace arată că $\alpha_1\alpha_2$ este paralelă cu BC; tot astfel se arată pentru *ab*, *ac*.

4) *Cercul* $\omega$ *circumscris triunghiului* $A_3B_3C_3$ *este înscris triunghiului* abc *şi tangent cercurilor* $O_A$, $O_B$, $O_C$.

Triunghiurile $bA_3C_3$, $cB_3A_3$, $aC_3B_3$ fiind isoscele, rezultă că cercul $A_3B_3C_3$ este înscris în *abc* şi deci tangent la fiecare din cercurile $O_A$, $O_B$, $O_C$.

5) *Triunghiurile* abc, $O_AO_BO_C$ *sunt ortologice.*

In adevăr, dreptele $O_AA_3$, $O_BB_3$, $O_CC_3$ sunt perpendiculare pe laturile lui *abc* şi concurente în $I_1$, centrul cercului înscris în triunghiul *abc.*

6) *Vârfurile triunghiului* $A_3B_3C_3$ *se află pe simedianele triunghiului* A'B'C'.

Se ştie că AA' este simediană în triunghiul A'B'C'. Dreptele $\alpha_1\alpha_2$ şi BC fiind paralele, iar $A_3$ şi A' fiind punctele lor de contact cu cercurile asemenea $O_A$ şi I, rezultă că A' şi $A_3$ sunt puncte homoloage în aceste cercuri şi deci dreapta $A'A_3$ trece prin centrul de asemănare A.

7) *Triunghiul* $A_3B_3C_3$ *are acelaş centru al simedianelor ca şi triunghiul* A'B'C'. Această teoremă rezultă imediat din proprietatea 4) de mai sus.

8) *Laturile triunghiului* $A_3B_3C_3$ *taie laturile triunghiului* A'B'C' *în şase puncte conciclice.*

Fie $\alpha_3$, $\alpha_4$ intersecţiile laturilor $A_3B_3$, $A_3C_3$, respectiv cu latura C'B'; tot astfel se obţin, ţinând seamă de sens, punctele similare $\gamma_3$, $\gamma_4$, $\beta_3$, $\beta_4$.

După cum am văzut, triunghiul $A_3B_3C_3$, îşi are vârfurile pe simedianele triunghiului A'B'C', iar laturile lor sunt respectiv paralele. După o proprietate cunoscută, (vezi *Exercices de Géométrie* par *F. G. M.*, sixième édition, pag. 1188, théorème 1032), rezultă că punctele în chestiune sunt pe un cerc TUCKER, cu centrul pe IK.

9) *Coardele* $\alpha_3\gamma_4$, $\gamma_3\beta_4$, $\beta_3\alpha_4$ *sunt egale.*

Aceasta se deduce din proprietatea cunoscută că un cerc TUCKER interceptează între laturile triunghiului antiparalele egale. Ori, dreptele de mai sus sunt antiparalelele în chestiune, deci sunt egale între ele.

10) *Triunghiul* mnp *format pe intersecţia coardelor egale* $\alpha_3\gamma_4$, $\gamma_3\beta_4$, $\beta_3\alpha_4$, *are vârfurile sale pe simedianele lui* A'B'C' *şi cercul înscris lui este concentric cu cercul dela* 8).

Această proprietate se deduce din definiţia însăşi a cercurilor

lui TUCKER. (Vezi *Exercices de Géométrie* par *F. G. M.*, sixième édition, Théorème 1035, p. 1190).

11) *Punctele* B', $C_1$, $C_2$, A', $\beta_3$, $\alpha_4$ *sunt conciclice, iar pentru vârfurile* A, B *corespund cercuri analoage.*

In adevăr, trapezul $B'C_1C_2A'$ fiind isoscel, punctele B', $C_1$, $C_2$, A' sunt pe un cerc cu centrul pe CI. Dar $A_3C_2$ fiind paralelă cu A'C', avem

$$\sphericalangle B'\alpha_4C_2 = \sphericalangle B'C'A' = 90^0 - \tfrac{1}{2}C.$$

Dar şi $\sphericalangle B'A'C_2 = 90^0 - \frac{1}{2}C$. Deci $\alpha_4$ se află pe cercul $B'C_1C_2A'$ şi analog demonstrăm că $\beta_3$ se află pe acelaş cerc.

12) *Centrele cercurilor* $A_1A_2B'C'$, $C_1C_2A'B'$, $B_1B_2C'A'$ *coincid cu centrele cercurilor înscrise în triunghiurile determinate de coardele* $\beta_4\gamma_3$, $\alpha_4\beta_3$, $\gamma_4\alpha_3$ *respectiv cu laturile vârfurilor* A, C, B *ale triunghiului* ABC.

Am văzut la proprietatea 11) că punctele B', $C_1$, $C_2$, A', $\beta_3$, $\alpha_4$ sunt conciclice. Insă:

$$\alpha_4\beta_3 = B'C_1 = A'C_2,$$

deci aceste coarde sunt tangente unui cerc concentric cu cercul $B'C_1C_2A'$.

13) *Cercurile dela proprietatea* 12) *admit ca axe radicale două câte două simedianele triunghiului* A'B'C'.

In adevăr, să luăm exagonul $B'C_1C_2A'\beta_3\alpha_4$; avem:

$$\alpha_4\beta_2 = B'C_1 = C_2A',$$

adică mijloacele acestor coarde sunt punctele de contact cu cercul înscris în triunghiul determinat de $\alpha_4\beta_3$ cu laturile AC, AB.

Fie $F_1$, $F_2$ mijloacele coardelor $B'C_1$, $A'C_2$. Tot astfel se obţin similarele lor $E_1$, $E_2$ pe $A_1C'$, $A_2B'$ şi $G_1$, $G_2$ pe $B_1A'$, $B_2C'$.

Insă: $E_2B' = F_1B'$, iar punctele $E_2$, $F_1$ sunt punctele de contact ale tangentei comune la cercurile înscrise în triunghiurile corespunzătoare lui A şi C, deci B' se află pe axul radical al lor.

De asemenea $BE_1 = BF_2$, deci B se află pe acelaş ax radical.

Cercurile circumscrise exagoanelor corespunzătoare vârfurilor A, C fiind concentrice cu cercurile înscrise de mai sus şi având în B' un punct comun, rezultă că a doua intersecţie a lor va fi pe axul radical.

Centrul radical al acestor grupe de câte trei cercuri este punctul K (punctul lui LEMOINE al triunghiului A'B'C', sau punctul lui GERGONNE al triunghiului ABC).

14) *Punctele* $E_1, E_2, F_1, F_2, G_1, G_2$ *sunt pe un cerc concentric cu cercul lui* ADAMS *al triunghiului* ABC.

Proprietatea este evidentă dacă observăm că A', B', C' sunt mijloacele segmentelor $G_1F_2$, $F_1E_2$, $E_1G_2$.

In lucrarea «*Proprietăţi din Geometria Triunghiului* în legătură cu cercul lui TAYLOR, LEMOINE, ADAMS, cap. VIII pag. 44, subsemnatul am dat un caz particular al proprietăţilor de mai sus.

Proprietăţile din faţă constituesc o generalizare şi sunt de mare interes în studiarea Geometriei recente a Triunghiului.

N. BLAHA.
Inginer, Botoşani.

## PATRATE DECAPITATE.[1])

(Urmare)

Cazul V. $2\alpha < n < 2\beta$.

Acest caz şi următorul sunt mai interesante decât cele precedente, prin faptul că ne conduc la aflarea soluţiilor generale ale problemei.

Din inegalitatea (7), deducem:

$$p \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}-\alpha}}{5^{\beta-\frac{n}{2}}} < 1 + \sqrt{1+a}.$$

Voiu deosebi două cazuri, după cum $n$ este pereche sau nepereche.

($a$). $n$ pereche. Atunci luăm $\frac{1}{2}n - \alpha = u$ şi $\beta - \frac{1}{2}n = v$, unde $u$ şi $v$ sunt numere întregi, pozitive şi diferite de zero.

1) A se vedeà G. M. Anul XXX, pag. 205.

Avem:

$$p \cdot \frac{2^u}{5^v} < 1 + \sqrt{1 + p.q}.$$

Apoi, din (8), deducem:

$$p.2^{2u} > q.5^{2v}.$$

Din combinarea ultimelor două inegalități, reese:

$$\frac{p}{1+\sqrt{1+p.q}} < \frac{5^v}{2^u} < \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Aplicând logaritmii, găsim:

$$u\log 2 + \log p - \log\left(1+\sqrt{1+p.q}\right) < v\log 5 < u\log 2 + \tfrac{1}{2}\log p - \tfrac{1}{2}\log q,$$

și înmulțind peste tot cu $1/\log 5 = 1{,}43067$, găsim:

$$0{,}43067u + 1{,}43067\log p - 1{,}43067\log\left(1+\sqrt{1+p.q}\right) < v < 0{,}43067u + 0{,}71533\log p - 0{,}71533\log q. \qquad (12)$$

Inlocuind în (3) pe $\alpha$ și $\beta$, respectiv prin $(\frac{1}{2}n - u)$ și $(\frac{1}{2}n + v)$, găsim:

$$A = 2^{\frac{n}{2}-u-1} \cdot 5^{\frac{n}{2}-v}(p.2^{2u} + q.5^{2v}).$$

Lăsând toate nulele la o parte, valoarea distinctă a lui A este:

$$A = 5^{u-v+1}(p.4^u + q.5^v).$$

Evident, dacă $q$ este pereche, mai putem lăsă la o parte încă o nulă dacă $q$ este 2, sau 6; două nule, dacă $q$ este 4 și trei nule, dacă $q = 8$.

Acum voiu particulariză pe $p$ și $q$, ținând seamă că $p \leqslant 9$, $q \leqslant 9$ iar $pq \leqslant 9$.

$q = 1$ dă:

$$A = 5^{u-v+1}(p.4^u + 25^v),$$

$$0{,}43067u + 1{,}43067\log p - 1{,}43067\log\left(1+\sqrt{1+p}\right) < v < 0{,}43067u + 0{,}71533\log p.$$

Putem lua $p = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$. Dând lui $p$ aceste valori și făcând calculele necesare, obținem următorul tablou:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$, când se dă $u$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}54749 < v < 0{,}43067.u$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(2.4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}19364 < v < 0{,}43067.u + 0{,}21533$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(3.4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u < v < 0{,}43067.u + 0{,}34119$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(4^{u+1} + 25^v)$ | $0{,}43067u + 0{,}13165 < v < 0{,}43067.u + 0{,}43067$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(5.4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u + 0{,}23091 < v < 0{,}43067.u + 0{,}5$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(6.4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u + 0{,}30948 < v < 0{,}43067.u + 0{,}55652$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(7.4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u + 0{,}37495 < v < 0{,}43067.u + 0{,}60442$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(2.4^{u+1} + 25^v)$ | $0{,}43067u + 0{,}43066 < v < 0{,}43067.u + 0{,}64600$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(9.4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u + 0{,}47882 < v < 0{,}43067.u + 0{,}68239$ | $2u + 3$ |

$q = 2$ ne dă pentru A valoarea distinctă:

$$A = 5^{u-v}(2p.4^{u-1} + 25^v).$$

Obţinem şi inegalitatea:

$$0{,}43067u + 1{,}43067 \log p - 1{,}43067 \log\left(1 + \sqrt{1+2p}\right) < v < 0{,}43067u + 0{,}71533 \log p - 0{,}21533.$$

Dând lui $p$ valorile 1; 2; 3; 4; obţinem următoarele soluţii:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$, când se dă $u$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v}(2.4^{u-1} + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}62431 < v < 0{,}43067.u - 0{,}21533$ | $2u + 1$ |
| $5^{u-v}(4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}29895 < v < 0{,}43067.u$ | $2u + 1$ |
| $5^{u-v}(6.4^{u-1} + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}12117 < v < 0{,}43067.u + 0{,}12587$ | $2u + 1$ |
| $5^{u-v}(2.4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u < v < 0{,}43067.u + 0{,}21533$ | $2u + 1$ |

$q = 3$ ne dă:

$$A = 5^{u-v+1}(p.4^u + 3.25^v) \quad \text{și}$$

$$0{,}43067u + 1{,}43067\log p - 1{,}43067\log\left(1+\sqrt{1+3p}\right) < v < 0{,}43067u + 0{,}71533\log p - 0{,}34119.$$

Putem lua $p = 1; 2; 3$ și obținem tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$, când se dă $u$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(4^u + 3.25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}68239 < v < 0{,}43067.u - 0{,}34119$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v+1}(2.4^u + 3.25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}37289 < v < 0{,}43067.u - 0{,}12587$ | $2u + 3$ |
| $3.5^{u-v+1}(4^u + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}20358 < v < 0{,}43067.u$ | $2u + 3$ |

$q = 4$ ne dă pentru A valoarea distinctă:

$$A = 5^{u-v-1}(p.4^{u-1} + 25^v) \quad \text{și}$$

$$0{,}43067u + 1{,}43067\log p - 1{,}43067\log\left(1+\sqrt{1+p.4}\right) < v < 0{,}43067u + 0{,}71533\log p - 0{,}43067.$$

Putem lua $p = 1; 2$ și găsim tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v-1}(4^{u-1} + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}72962 < v < 0{,}43067.u - 0{,}43067$ | $2u - 1$ |
| $5^{u-v-1}(2.4^{u-1} + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}43067 < v < 0{,}43067.u - 0{,}21533$ | $2u - 1$ |

$q = 5: 6; 7; 8; 9$ atrage condiția $p = 1$, căci $pq \leqslant 9$, deci:

$$A = 5^{u-v+1}(4^u + q.25^u), \quad \text{și}$$

$$0{,}43067u - 1{,}43067\log\left(1+\sqrt{1+q}\right) < v < 0{,}43067u - 0{,}71533\log q.$$

Dând lui $q$ valorile 5, 6, 7, 8, 9 obținem tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(4^u + 5.25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}76909 < v < 0{,}43067.u - 0{,}5$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v}(2.4^{u-1} + 3.25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}80356 < v < 0{,}43067.u - 0{,}55652$ | $2u+1$ |
| $5^{u-v+1}(4^u + 7.25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}83389 < v < 0{,}43067.u - 0{,}60442$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v-2}(2.4^{u-1} + 25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}86134 < v < 0{,}43067.u - 0{,}64600$ | $2u-3$ |
| $5^{u-v+1}(4^u + 9.25^v)$ | $0{,}43067u - 0{,}88597 < v < 0{,}43067.u - 0{,}68239$ | $2u+3$ |

(*b*) Fie $n$ pereche. Din (7) deducem:

$$p \cdot \frac{2^{\frac{n-1}{2}} - \alpha}{5^{\beta - \frac{n-1}{2}}} \cdot \sqrt{10} < 1 + \sqrt{p.q}\ .$$

Punem $\frac{1}{2}(n-1) - \alpha = u$ și $\beta - \frac{1}{2}(n-1) = v$. Găsim:

$$\frac{p.\sqrt{10}}{1+\sqrt{1+pq}} < \frac{5^v}{2^u} < \sqrt{\frac{10p}{q}}\ .$$

Aci aplicăm logaritmii și obținem:

$$0{,}43067u + 1{,}43067 \log p - 1{,}43067 \log\left(1+\sqrt{1+pq}\right) + 0{,}71533 < v < 0{,}43067u + 0{,}71533 \log p - 0{,}71533 \log q + 0{,}71533.$$

Aci nu vom mai face calculele, căci această inegalitate se deduce din (12), sporind prima și ultima parte a inegalității cu cantitatea constantă 0,71533.

Inlocuim deci inegalitățile din tablourile precedente, prin altele ai căror membri sunt mai mari cu 0,71533. Valorile lui $\alpha$ și $\beta$ de mai sus, ducându-le în (3) scoatem:

$$A = 5^{u-v+2}(p.2^{2u+1} + q.5^{2v-1}).$$

Dacă $q = 1$, atunci $p = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ şi găsim tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+2}(2^{2u+1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}16784<v<0{,}43067.u+0{,}71533$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(4^{u+1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}52169<v<0{,}43067.u+0{,}93066$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(3.2^{2u+1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}71533<v<0{,}43067.u+1{,}05652$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(2^{2u+3}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}84698<v<0{,}43067.u+1{,}14600$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+3}(2^{2u+1}+5^{2v-2})$ | $0{,}43067u+0{,}94624<v<0{,}43067.u+1{,}21533$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(3.2^{2u+2}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+1{,}02481<v<0{,}43067.u+1{,}27185$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(7.2^{2u+1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+1{,}09028<v<0{,}43067.u+1{,}31975$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(2^{2u+4}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+1{,}14599<v<0{,}43067.u+1{,}36133$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(9.2^{u+1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+1{,}19415<v<0{,}43067.u+1{,}39772$ | $2u+4$ |

Dacă $q = 2$, găsim:

$$A = 5^{u-v+1}(p.4^u + 5^{2v-1}),$$

iar $p = 1; 2; 3; 4$. Găsim:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(4^u+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}09102<v<0{,}43067.u+0{,}5$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v+1}(2.4^u+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}41638<v<0{,}43067.u+0{,}71533$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v+1}(3.4^u+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}59416<v<0{,}43067.u+0{,}84120$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v+1}(4^{u+1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}71533<v<0{,}43067.u+0{,}93066$ | $2u+2$ |

Dacă $q = 3$, avem:

$$A = 5^{u-v+2}(p.2^{2u+1} + 3.5^{2v-1}),$$

iar $p = 1, 2, 3$. Găsim tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+2}(2^{2u+1}+3.5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}03294<v<0{,}43067.u+0{,}37414$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+2}(4^{u+1}+3.5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}34244<v<0{,}43067.u+0{,}58946$ | $2u+4$ |
| $3.5^{u-v+2}(2^{2u+1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}51175<v<0{,}43067.u+0{,}71533$ | $2u+4$ |

$q = 4$ dă pentru A valoarea distinctă:

$$A = 5^{u-v}(p.2^{2u-1} + 5^{2v-1}),$$

iar $p = 1, 2$. Găsim tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v}(2^{2u-1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u-0{,}01429<v<0{,}43067.u+0{,}28466$ | $2u$ |
| $5^{u-v}(4^{u}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u+0{,}28466<v<0{,}43067.u+0{,}5$ | $2u$ |

$q = 5, 6, 7, 8, 9$ atrage condiția $p = 1$ și:

$$A = 5^{u-v+2}(2^{2u+1} + q.5^{2v-1}).$$

Găsim tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+2}(2^{2u+1}+25^{v})$ | $0{,}43067u-0{,}05376<v<0{,}43067.u+0{,}21533$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v+1}(4^{u}+3.5^{2v-1})$ | $0{,}43067u-0{,}08823<v<0{,}43067.u+0{,}15881$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v+2}(2^{2u+1}+7.5^{2v-1})$ | $0{,}43067u-0{,}11856<v<0{,}43067.u+0{,}11091$ | $2u+4$ |
| $5^{u-v-1}(4^{u-1}+5^{2v-1})$ | $0{,}43067u-0{,}14601<v<0{,}43067.u+0{,}06933$ | $2u-2$ |
| $5^{u-v+2}(2^{2u+1}+9.5^{2v-1})$ | $0{,}43067u-0{,}17064<v<0{,}43067.u+0{,}03294$ | $2u+4$ |

Acestea sunt soluțiile din acest caz. Se observă însă un lucru: când se dă $u$ și se cere să se determine $v$, aceasta nu-i totdeauna posibil, căci prima și ultima parte a inegalităților de mai sus diferă cu mai puțin de o unitate. De ex.: în tabloul al treilea, în formula a doua, făcând $u=4$ nu găsim nicio valoare întreagă pentru $v$, făcând însă $u=5$, găsim $v=2$. Puteam să formăm tablourile de mai sus în așă fel, ca $u$ să fie cuprins între anumite limite care depind de $v$, adică dacă se dă $v$ să determinăm pe $u$. Avantajul pe care ni-l prezintă faptul că $v$ este determinat de $u$, ca în tablourile de mai sus, este că pentru o valoare a lui $u$ corespunde pentru $v$ o valoare unică sau niciuna și, pe lângă aceasta, $u$ ne dă în mod explicit numărul cifrelor patratelor decapitate.

(Va urmà). EMIL ȘTEFĂNESCU.
Student

## RAPORTUL COMISIUNEI
### PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE MATEMATICI APLICATE LA ȘTIINȚELE MILITARE, PE INTERVALUL 1 SEPTEMVRIE 1923 — 1 SEPTEMVRIE 1924.

Subsemnații am fost aleși în ședința Adunării Generale extraordinare din 31 August 1923, pentru a studià publicațiunile unde matematica este aplicată la științele militare, apărute în intervalul

dela 1 septemvrie 1923 pânăla 1 septemvrie 1924, în vederea acordărei premiului înfiinţat de D-nul General Sc. PANAITESCU şi al cărui regulament a fost publicat în «Gazeta Matematică», Vol. XXIII, pag. 10—11.

In perioada de mai sus, numărul articolelor şi al publicaţiunilor de matematică aplicată la ştiinţele militare, este mult mai mare decât în anii trecuţi, iar lucrările prezintă o importanţă deosebită.

Astfel putem cită:

A) *Articole din reviste militare:*

— «Câtevà consideraţiuni asupra mişcărei avionului în spaţiu», de Maior aviator G. NEGRESCU.

— «Cele mai mari viteze posibile în aviaţie», de plut. t. r. NEGRESCU TR.

— «Rezistenţa ţevilor», de Lt.-Col. GEORGESCU-PION.

— «Consideraţiuni asupra problemei construcţiei traectoriilor prin puncte», de Maior ST. OPRESCU.

B) *Lucrări în ovraje:*

— «Studiul gurilor de foc», de Lt.-Col. GEORGESCU-PION.

— «Pulberi şi Explozivi», de Lt.-Col. D. PETROVAN.

— «Ridicările topografice ale artileriei şi erorile topografice ale ridicărilor artileriei», de Căpitan C. VERDEŞ.

Din examinarea articolelor şi lucrărilor de mai sus, în scopul propunerei pentru premiul înfiinţat de către D-l General Sc. PANAITESCU, comisiunea a clasat în rândul întâi lucrarea D-lui Lt.-Col. GEORGESCU-PION, lucrare care cuprinde şi articolul D-sale «Rezistenţa ţevilor», publicat în Revista Artileriei.

Această lucrare prezintă patru părţi din care: Partea I se ocupă, în 18 pagini, de a da un rezumat de cunoştinţele pure matematice, necesare înţelegerei cursului. Părţile II şi III tratează studiul ţevei, iar ultima parte, studiul afetului. In ultimele trei părţi, se face foarte des uz, cu numeroase aplicaţiuni, de matematici şi cunoştinţe de mecanică.

Ţinând seamă de acestea, se propune ca premiul înfiinţat de D-l General Sc. PANAITESCU, pentru anul 1923—1924, să se acorde D-lui Lt.-Col. GEORGESCU-PION dela Şcoalele Militare de Artilerie din Timişoara, pentru lucrarea «Studiul gurilor de foc».

TR. LALESCU, MAIOR GH. I. LITEANU,
M. GHERMĂNESCU.

Acest raport s'a citit şi s'a aprobat în Adunarea Generală Extraordinară dela 11 februarie 1925.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

# NOTE MATEMATICE

39. *Zece feluri de Calcul.* (A se vedeà *Gazeta Matematică*, Anul XXVII pag. 150).

1. **Aproximativ.** *E. Maccaferri.*—Calcolo numerico approssimato. Milan 1919.
2. **Diferenţial.** *J. Bertrand.* — Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Paris 1870.
3. **Infinitesimal.** *E. Cesaro.* — Elementi di calcolo infinitesimali. 1897.
4. **Integral.** Vezi No. 2 de mai sus.
5. **Mintal.** *J. B. Leroy.* — Méthode de calcul mental. Paris 1840.
6. **Numeric.** *R. De Montessus.* — Calcul numérique. Paris 1911.
7. **Prescurtat.** *E. Mandonce.* — Mèthode nouvelle de calcul abregé. Paris 1905.
8. **Rapid.** *F. Martel.* — Régles et exercices de calcul rapide. Paris.
9. **Simplificat.** *M. d'Ocagne.* — Le calcul simplifié. Paris 1905
10. **Vectorial.** *Guyot.* — Le calcul vectoriel et ses applications à la géométrie reglée. Paris 1913.

(Va urmà). I. IONESCU.

40. *Origina cifrelor romane V şi X.* Se crede, în genere, că semnul V ar reprezentà o mână cu degetele despărţite; şi cum mâna are cinci degete, Romanii au adoptat semnul V pentru a notà pe 5. Semnul X ar fi apoi o impunere de doi V, vârf la vârf, care ar însemnà deci $2 \times 5 = 10$. Nu am văzut însă nicio dovadă serioasă în privinţa realităţei acestor explicaţiuni.

Am avut însă ocaziunea să văd cum apar, în mod natural, aceste semne la o notare primitivă a numerelor. Intr'o vară, pe o arie de lângă satul Stoienoaia, din judeţul Ilfov, un logofăt bătrân numărà baniţele de grâu care se încărcau în căruţe spre a fi duse la magaziile dela curte. El numărà cu voce tare dela *unu* la *nouă*, iar la a *zecea* baniţă ziceà *talia*, şi cu un cuţitaş tăia o crestătură pe o dungă a unei scânduri cu care rădeà baniţele.

Primele trei dungi, corespunzătoare la trei talii, ereau perpen-

diculare pe muchiile scândurii, a patra puțin înclinată la dreapta, a cincea puțin înclinată la stânga întâlnindu-se cu precedenta pe muchia răzătoarei; apoi a șasea, a șaptea și a opta normale pe muchie, a noua înclinată spre dreapta, iar a zecea înclinată spre stânga și tăind pe precedenta la mijlocul ei. Muchia răzătoarei se prezentă astfel

IIIVIIIXIIIVIIIXIIIVIIIXII.....

După cum se vede aci, semnele V și X apar în mod natural, pentru ca să indice pe 5 și pe 10.

I. Ionescu.

41. *Un tablou numeric.* Fie tabloul:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 . . . . . | $p-1$ | $p$ | $p+1$ |
| | 2 | 6 | 12 | 20 . . . . . | $(p-1)p$ | $p(p+1)$ |
| | | 12 | 72 | 240 . . . . . | | |
| | | | 864 | 17280 . . . . . | | |
| | | | | 1492992 . . . . . | | |

în care în prima linie este șirul natural al numerelor, iar pe celelalte, fiecare număr este produsul celui de deasupra, prin precedentul acestuia de pe aceeași linie. Să ne propunem a găsi expresiunea unui număr oarecare. Fie $E_n^p$ numărul de pe linia $n$ și coloana $p$.

Zicem că avem:

$$E_n^p = p \cdot (p-1)^{C_{n-1}^1} \cdot (p-2)^{C_{n-1}^2} \cdot (p-3)^{C_{n-1}^3} \ldots (p-n+1)^{C_{n-1}^{n-1}}.$$

Se găsește direct că:

$$E_2^p = p(p-1), \quad E_3^p = p(p-1)^2(p-2), \quad E_4^p = p(p-1)^3(p-2)^3(p-3)\ldots$$

Prin inducție completă, se arată că este adevărată pentru orice $n$.

A. C. Mladenovici.

42. *Generalizarea problemei 3094.* Problema se poate generaliză astfel: *Toate triunghiurile dreptunghice, între laturile cărora există o relațiune de forma:*

$$ma + nb + pc = 0,$$

*în care, în valoare absolută, coeficientul* m *ce corespunde ipo-*

*tenusei, nu este în afara intervalului determinat de ceilalți doi coeficienți, sunt asemenea.*

Să eliminăm pe $a$ dintre relația dată și:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Găsim:

$$(n^2 - m^2)\ (b/c)^2 + 2pn\ (b/c) + (p^2 - m^2) = 0.$$

După condițiunea impusă, coeficienții termenilor extremi sunt de semne contrare. Deci ecuația are o singură rădăcină pozitivă. Deci raportul catetelor tutulor triunghiurilor este acelaș. Triunghiurile sunt asemenea.

A. Tauber.

43. *Reciproca problemei 3204.* Fie ABCD un patrulater ale cărui diagonale AC, BD se întâlnesc în F și ale cărui laturi opuse AD și BC se întâlnesc în E. Bisectoara unghiului AEB taie pe AC în M și pe BD în N. Presupun că FM = FN. Unghiul FNM fiind exterior triunghiului NBE, avem:

(1) $$FNM = NBE + BEN.$$

La fel, unghiul EMC, fiind exterior triunghiului EAM, avem:

(2) $$EMC = MAE + MEA.$$

Comparând (1) cu (2), în care

$$FNM = EMC \quad \text{și} \quad BEN = MEA,$$

prin ipoteză, rezultă că: $\sphericalangle NBE = \sphericalangle MAE$,

deci patrulaterul ABCD este inscriptibil, ceeace dovedește că și reciproca problemei 3204, a cărei soluție este publicată la pag. 114, Vol. XXX, este adevărată.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

44. *Generalizarea problemei 2538.* (G. M. vol. XXVIII pag. 458).

Voiu căutà să dau o generalizare acestei probleme, din care se poate deduce și o soluție mai simplă.

Fie de calculat limita expresiunei:

$$y = \frac{\log^{\alpha}(n+q)\ \log^{\beta}(1+k_1)(2+k_2)\ldots(n+k_n)}{(n+m_1)(n+m_2)\ldots(n+m_n)},$$

când $n \to \infty$, iar $k$, $k_i$, $m_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ fiind constante oarecare.

Pentru aceasta, vom demonstrà, mai întâi, următoarele limite:

$$1^0. \quad \lim y_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{(1+k_1)\ (2+k_2) \ldots (n+k_n)}}{n} = \frac{1}{e},$$

care se poate demonstrà, folosindu-ne de relația:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{u+1}}{u_n},$$

$u_n$ fiind termenul de rangul $n$ al unei serii.

$$2^0. \quad \lim y_2 = \lim_{n \to \infty} (n+k)^{\frac{1}{n+m}} = 1,$$

care se poate ușor demonstrà, aplicând logaritmii și apoi regula lui l'HÔSPITAL.

$$3^0. \quad \lim y_3 = \lim_{n \to \infty} \frac{\log^\alpha (n+k) \log n^n}{(n+m_1)(n+m_2) \ldots (n+m_n)} = 0,$$

care se poate determinà, punând-o sub forma:

$$\lim y_3 = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\alpha+\beta} \log^\alpha (n+k)^{\frac{1}{n}} \log^\beta n^{\frac{1}{n}}}{(n+m_1)(n+m_2) \ldots (n+m_n)} = 0.$$

Însă, conform unei teoreme bine cunoscute, avem:

$$\lim y - \lim y_3 = \lim (y - y_3),$$

deci

$$\lim y - \lim y_3 = \lim \frac{\log^\alpha (n+k) \log \frac{\beta (1+k)\ (2+k_2) \ldots (n+k_n)}{n^n}}{(n+m_1)(n+m_2) \ldots (n+m_n)},$$

sau:

$$\lim y - \lim y_3 = \lim \frac{\left[\log (n+k)^{\frac{1}{n}}\right]^\alpha \left[\log \frac{\sqrt[n]{(1+k_1)(2+k_2) \ldots (n+k_n)}}{n}\right]^\beta}{\left(1+\frac{m_1}{n}\right) \ldots \left(1+\frac{m_{\alpha+\beta}}{n}\right)(n+m_{\alpha+\beta+1}) \ldots (n+m_n)}$$

și trecând la limită, vom obține:

$$\lim y = \frac{0 \times \left(\log \frac{1}{0}\right)^\beta}{\infty} = 0.$$

În cazul problemei 2538, avem:

$$\alpha = \beta = 1, \qquad k = k_i = m_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

iar limitele $1^0$ şi $2^0$ sunt cunoscute (Culegere de probleme Algebră; ediţia II: cap. XXXII, prob. 18 şi cap. XXXI, prob. 39).

M. ADAM.
Constanţa.

45. *Asupra notei 85 din G. M. Vol. XXIX, pag. 453.* In această notă, D-l GHERMĂNESCU încearcă să simplifice analiza ce am făcut într'o notă din «Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences», t. 178, pag. 1509, pentru a puteà extinde în domeniul complex, proprietatea fundamentală a integralei lui POISSON din domeniul real. Domnia sa aplică însă greşit teoria reziduurilor, căci funcţiunea $f(a + \log z/i)$ nu este olomorfă în interiorul cercului dealungul căruia se efectuează integrarea.

A. ANGELESCU.

* * *

Nu ştiu pânăla ce punct afirmaţiunea de mai sus, este generală. Cred, totuşi, că exemplul foarte simplu de mai jos, ar puteà fi edificator.

Fie funcţiunea:

$$f(u) = e^{iu},$$

avem

$$f(a + u) = e^{ia} \cdot e^{iu};$$

transformarea $z = e^{iu}$ conduce la $f\left(a + \frac{\log z}{i}\right) = e^{ia} \cdot z.$

M. GH.

## CHESTIUNI DE EXAMEN

### FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ.

*Seziunea octombrie 1924.*

### MECANICA RAŢIONALĂ.

*(Partea I).*

I. Un punct material fără greutate, de massă $m$, descrie o elipsă sub acţiunea unei forţe perpendiculară axei mici.

1) Să se determine forţa.

2) Acelaş punct material supus unei forţe perpendiculare axei $Oy$ şi egală cu $-m/x^3$ este pus pe axa $Ox$ la depărtarea 1 de origină cu o viteză iniţială

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha},$$

înclinată cu unghiul $\alpha$ pe axa $Ox$.

a) Se cere traiectoria.

b) Locul focarelor acestor traiectorii, când $\alpha$ variază.

II. Se consideră, într'un plan vertical, două bare fixe fără greutate, formând un unghiu cuprins între O şi 180°, iar laturile unghiului sunt situate deoparte şi de alta a verticalei ce trece prin vârf. O altă bară omogenă şi grea, de lungime $2b$, este rezemată pe laturile unghiului, putând alunecă fără frecare.

1) Să se determine unghiul $\alpha$ al barei AB în poziţia de echilibru cu orizontala.

2) Să se arate că echilibrul e nestabil.

III. Se consideră spirala logaritmică

$$\rho = Ae^{-B\theta} \quad , \quad (A > 0,\ B > 0).$$

1) Presupunând că un punct mobil pe această spirală se mişcă în aşa fel că mişcarea razei vectorii e o rotaţie uniformă în sensul unghiurilor polare crescătoare, se cere să se studieze mişcarea.

2) In particular, să se găsiască unghiul format de vectorul viteză cu raza vectoare, apoi unghiul format de vectorul acceleraţie cu normala la spirală îndreptată către centrul de curbură.

## MECANICA RAŢIONALĂ.

*(Partea II).*

I. Se dă un cerc de centru O. Un punct M e obligat a se mişcă pe acest cerc. Punctul e atras de un diametru cu o forţă proporţională cu distanţa la acest diametru.

Să se studieze mişcarea punctului pe cerc, punctul mişcându-se fără frecare.

II. Intr'un plan vertical, avem o bară omogenă şi grea. Una din extremităţi alunecă fără frecare pe axa $Ox$. I se dă o viteză iniţială; să i se studieze mişcarea.

III. Un punct material greu de massă $m$ e aruncat în sus cu o viteză iniţială de 50 m. pe secundă. Punctul întâmpină o rezistenţă proporţională cu viteza. Aceasta e $mgv$.

Să se calculeze spaţiul cât a mers în sus şi timpul întrebuinţat.

IV. Să considerăm două elipse omotetice în raport cu centrul, având semiaxele $a$, $b$, $\omega a$, $\omega b$, $\omega > 1$. Să se afle elipsoidul central de inerţie al coroanei eliptice omogene cuprinsă între cele două elipse.

## TEORIA FUNCŢIILOR.

*(Partea I).*

I. In planul axelor dreptunghiulare $xOy$, să se găsească o curbă $\Gamma$ in aşà mod ca M fiind un punct al curbei, iar A proecţia lui M pe axa $Ox$ şi B punctul în care tangenta în M la curba $\Gamma$ taie axa $Ox$, să avem relaţia metrică

$$OA \cdot OB = a^2,$$

$a$ fiind o constantă.

II. Să se determine suprafaţa învelitoare a sferelor ce trec printr'un punct fix P şi ale căror centre se găsesc pe un cerc dat $\Gamma$. Să se arate, că curbele caracteristice ale familiei de sfere considerate, formează un sistem de linii de curbură ale suprafeţei învelitoare; să se găsiască al II-lea sistem de linii de curbură, în cazul particular când punctul P se proectează pe planul cercului $\Gamma$ în centrul său.

III. Să se determine planul osculator şi raza de curbură la curba

$$4z - x^2 = 0,$$

$$2e^y - x = 0.$$

# BIBLIOGRAFIE.

**Bulletin of the American mathematical Society.** Vol. XXX. No. 8. Octomvrie 1924. New-York. A 43-a Adunare regulată a Secţiunii din St. Francisco, de C. A. NOBLE. Adunarea din Aprilie din Chicago, de A. DRESDEN. Invarianta numerelor lui POINCARÉ ale unui grup discret, de O. VEBLEN. Funcţiuni analitice şi periodicitate, de J. F. RITT. O probă a convergenţei a seriilor lui FOURIER, simple şi duble, de M. G. CARMAN. Câtevà chestiuni in teoria matematică a statisticei, de H. L. RIETZ. Transformările suprafeţelor ale lui EISENHART, de W. C. GRAUSTEIN. Congresul din *Strasbourg*, de J. L. WALSH.

**Idem.** No. 9-10. Noemvrie-Decemvrie 1924. Adunarea din Mai la New-York, de R. G. D. RICHARDSON. Un grup simplu de ordin inferior, de F. N. COLE. Clasă completă de expansiuni numerice pentru unele constante teta eliptice de al treilea grad, de E. T. BELL. Notă asupra unei congruenţe speciale, de M. FOSTER. Asupra convergenţii relativ uniforme, de R. L. MOORE. Teoria închiderii polinomiaielor lui TCHEBYCHEFF pentru un interval finit, de J. A. SHOHAT. Puncte nucleuri sau hipernucleuri în teoria şirurilor abstracte, de E. W. CHITTENDEN. Cinci axiome pentru punct şi translaţiune in geometria afină, de A. A. BENNETT. Unele probleme de închidere; privitoare la transformarea lui GEISER, de A. EMCH. Un coeficient simetric de corelaţiune pentru mai multe variabile de D. JACKSON. Metodă pentru a găsi factori ai numerelor mari, de H. S. VANDIVER. A treia ediţie a tratatului lui PICARD, de C. N. MOORE. Traducerea lui PEET făcută papirusului RHIND, de D. E. SMITH.

**American mathematical Society.** Lista conducătorilor şi membrilor pe anii 1923-1924. New-York 1924. (Societatea aveà în Decemvrie 1924 un număr de 1477 membri).

**Mathesis.** Anul XXXIX. No. 1. Ianuarie 1925. Bruxelles. Figuri coplanare asemenea, de J. NEUBERG. Asupra teoremei lui AYAR şi asupra câtorvà proprietăţi ale inversiunii triunghiulare, de M. R. GOORMAGHTIGH.

**Foaia matematică.** Anul II. No. 2. Fevruarie 1924. Chişinău. Rezolvarea ecuaţiei de gradul IV, de C. BERDAN.

**Viaţa şcolară.** Anul I. No. 3. Ianuarie 1925. Timişoara. Probleme.

**Revista Artileriei.** Anul XXXVIII. No. 1. Ianuarie 1925. Timişoara. Calculul corecţiunilor balistice şi atmosferice, de Maior V. MICHALLESCU.

**Journal de mathématiques élémentaires** publicat de H. VUIBERT. Anul 49. No. 9. Fevruarie 1925.

**Jurnal matematic.** Revistă matematică lunară publicată de TIBERIU POPOVICIU. (Litografiată). Anul II. No. 1. Către cititori, de TIBERIU POPOVICIU. Asupra suprafeţelor $n$ dimensionale, de TIBERIU POPOVICIU. Asupra sumei puterilor asemenea a termenilor unei progresiuni aritmetice, de TIBERIU POPOVICIU. Asupra unor determinanţi, de TIBERIU POPOVICIU.

## CERERI.

120. Există un studiu asupra monedelor întrebuinţate în Muntenia şi Moldova, în decursul veacurilor?

I. I.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1986. *Dacă cinci coeficienţi consecutivi ai unei ecuaţiuni algebrice sunt* $tg\varphi$, $tgm\varphi$, $1$, $cotgm\varphi$, $cotg\varphi$ *şi dacă extremităţile arcelor* $(\varphi, m\varphi)$ *cad în cadrane adiacente, ecuaţia are neapărat rădăcini imaginare.*

ST. N. MIREA.

1. Soluţiune dată de D-nii: ŞERBAN GHEORGHIU, O. MAYER şi FLORIN C. VASILESCU. Această problemă e un caz particular al problemei generale cunoscute: «Dacă trei coeficienţi consecutivi ai unei ecuaţiuni algebrice sunt în progresie geometrică, ecuaţiunea

admite neapărat rădăcini imaginare». Aceşti coeficienţi sunt $tg m\varphi$, 1 şi $\cot g m\varphi$. Celelalte date ale problemei sunt de prisos.

2. Soluţiuni date de D-nii: M. Ghermănescu, Vintilă Grigorescu, N. Kaufmann, I. Kivovicz, C. Gh. Lazăr, P. Melas, Al. Pantazi şi Gr. C. Zamfirescu. După o teoremă stabilită în *Gazeta Matematică* Vol. XVIII pag. 367, în articolul intitulat «O aplicaţie a teoriei lacunelor», de către D-l St. N. Mirea, o ecuaţiune algebrică:

$$A_0 x^m + \ldots + A_i x^i + \ldots + A_m = 0,$$

are neapărat rădăcini imaginare, dacă 5 coeficienţi ai săi satisfac relaţiunile:

$$(1)\quad A_{i-1}^2 - A_i A_{i-2} \leqq 0, \quad (A_{i-2} A_{i-1} - A_{i-3} A_i)(A_{i-1} A_{i+1} - A_i^2) < 0.$$

In cazul de faţă, se vede imediat că aceste relaţiuni sunt satisfăcute.

---

PROBLEMA 2719. *Să se arate că, în orice triunghiu, avem:*

$$4S^2 = a^2 m_a^2 + 4 (r_b r_c - m_a^2)(r r_a + m_a^2),$$
$$16S^2 = 4a^2 m_a^2 - (r + r_a)^2 (r_b - r_c)^2.$$

* * *

Soluţiune dată de D-nii: Mircea Adam (Constanţa), I. Florescu, M. Gâtan, Georgescu-Roegen, I. Georgescu, Em. Grigorescu, Aurel Nicolau, I. Gh. Popescu, I. Popovici, Ioan Rizescu, Şt. Solacoglu, Mircea Vasiliu.

Ţinând seamă de relaţiunile:

$$r = S/p, \quad r_a = S/(p-a), \quad r_b = S/(p-b), \quad r_c = S/(p-c),$$

rezultă:

$$\begin{cases} 4S^2 = a^2 m_a^2 + 4\left(\dfrac{S^2}{(p-b)(p-c)} - m_a^2\right)\left(\dfrac{S^2}{p(p-a)} + m_a^2\right) \\ 16S^2 = 4a^2 m_a^2 - \left(\dfrac{S}{p} + \dfrac{S}{p-a}\right)^2 \left(\dfrac{S}{p-b} - \dfrac{S}{p-c}\right)^2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 4S^2 = a^2 m_a^2 + 4\,[p(p-a) - m_a^2]\,[(p-b)(p-c) + m_a^2] \\ 16S^2 = 4a^2 m_a^2 - \dfrac{S^4 (b-c)^2 (b+c)^2}{[p(p-a)(p-b)(p-c)]^2} \end{cases}.$$

Ţinând seamă de relaţiunea $m_a = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$, se deduce:

$$p(p-a) \quad m_a^2 = -\frac{(b+c)^2}{4}$$

$$(p-b)(p-c)+m_a^2 = \frac{(b+c)^2}{4}$$

$$\therefore \begin{cases} 4S^2 = a^2m_a^2 - \frac{(b-c)^2(b+c)^2}{4} \\ 16S^2 = 4a^2m^2 - (b-c)^2(b+c)^2. \end{cases}$$

Inlocuind $m_a = (2b^2+2c^2-a^2)/4$ şi făcând calculele, rezultă:

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

care este o relaţiune cunoscută,

---

PROBLEMA 2931. *Să se rezolve sistemul*

$$x + y\,\mathrm{tg}^2\alpha + z\,\mathrm{tg}^4\alpha = \mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$$
$$x + y\,\mathrm{tg}^2\beta + z\,\mathrm{tg}^4\beta = \mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha$$
$$x + y\,\mathrm{tg}^2\gamma + z\,\mathrm{tg}^4\gamma = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta.$$

$\alpha, \beta, \gamma$ *fiind unghiurile unui triunghiu.*

CONST. N. CAZACU.

Soluţie dată de D-l IOAN B. FLORESCU (clasa VIII particulară, Lic. Carol I).

Să considerăm expresiunea:

$$f(\theta) = x\,\mathrm{tg}\theta + y\,\mathrm{tg}^3\theta + z\,\mathrm{tg}^5\theta - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma. \qquad (1)$$

In virtutea ecuaţiilor din enunţ, $f(\theta)$ se anulează pentru $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $\theta = \gamma$, deci este divizibilă cu $(\mathrm{tg}\theta - \mathrm{tg}\alpha)$, $(\mathrm{tg}\theta - \mathrm{tg}\beta)$, $(\mathrm{tg}\theta - \mathrm{tg}\gamma)$ şi cu produsul lor $(\mathrm{tg}^3\theta - s_1\mathrm{tg}^2\theta - s_2\,\mathrm{tg}\theta - s_3)$, unde $s_i$ este suma produselor luate câte $i$ a cantităţilor $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$. Prin urmare, $f(\theta)$ se mai poate scrie

$$f(\theta) = (a\,\mathrm{tg}^2\theta + b\,\mathrm{tg}\theta + c)(\mathrm{tg}^3\theta - s_1\,\mathrm{tg}^2\theta + s_2\,\mathrm{tg}\theta - s_3) \qquad (2)$$

Identificând (1) cu (2), găsim:

$$a = z \quad , \quad as_1 = b \quad , \quad as_2 - bs_1 + c = y,$$

---

$$as_3 - bs_2 + cs_1 = 0 \quad , \quad cs_2 - bs_3 = x \quad , \quad c = 1,$$

de unde, obţinem:

$$c = 1 \quad , \quad b = s_1^2/(s_1s_2 - s_3) \quad , \quad a = s_1/(s_1s_2 - s_3),$$

$$z = s_1/(s_1s_2 - s_3) \quad , \quad y = -[s_1(s_1^2 - 2s_2) + s_3]/(s_1s_2 - s_3),$$

$$x = (s_1s_2^2 - s_2s_3 - s_1^2s_3)/(s_1s_2 - s_3).$$

In cazul enunţului problemei, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ fiind unghiurile unui triunghiu, avem $s_1 = s_3$ şi rădăcinile sistemului sunt

$$x = \Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - (\Sigma \operatorname{tg}\alpha)^2/(\Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1),$$

$$y = (1 + \Sigma \operatorname{tg}^2\alpha)/(1 - \Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$$

$$z = 1/(\Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1).$$

*Observaţiuni.* I. Făcându-se calculele, se găsesc, pentru aceste rădăcini, următoarele expresiuni simplificate:

$$x = 1 + (1 - \sin^2\alpha \sin\beta \sin^2\gamma)/\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma,$$

$$y = -\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma + 1),$$

$$z = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

II. Rădăcinile sistemului sunt aceleaşi, dacă unghiurile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sunt legate prin relaţia

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi,$$

cu condiţia $\operatorname{tg}\alpha \neq \operatorname{tg}\beta \neq \operatorname{tg}\gamma$.

III. D-l Florescu menţionează că se pot rezolvà, în mod analog, sistemele de forma:

$$\begin{aligned} &f_1(a)\,x_1 + f_2(a)\,x_2 + \cdots\cdots + f_n(a)\,x_n = P. \\ &f_1(b)\,x_1 + f_2(b)\,x_2 + \cdots\cdots + f_n(b)\,x_n = P. \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_1(l)\,x_1 + f_2(l)\,x_2 + \cdots\cdots + f_n(l)\,x_n = P \end{aligned} \qquad (A)$$

$$a \neq b \neq c \neq \cdots\cdots \neq l,$$

servindu-ne de expresiunea

$$\varphi(\theta) = f_1(\theta)\,x_1 + f_2(\theta)\,x_2 + \cdots\cdots + f_n(\theta)\,x_n - P,$$

care, în virtutea sistemului A, se anulează pentru $\theta = a$, $\theta = b \cdots$, $\theta = l$, deci, este divizibilă cu

$$(\theta - a)(\theta - b)\cdots\cdots(\theta - l).$$

IV. S'a mai primit o soluţie dela D-l Const. I. Georgescu.

Au rezolvat problema prin metoda determinanţilor, dând soluţiuni prea lungi, D-nii: Ştefan Marin, E. Iliescu, M. Adam, I. S. Antoniu, Leon Weiss.

Soluţie (incompletă) dela D-l Pincu Katz.

PROBLEMA 3030. *Să se construiască curba*

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^2 = 0.$$

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Făcând substituţia

$$y = tx,$$

se găseşte

$$(1) \qquad x = \frac{t^2}{t^2+t-1} \quad \text{şi} \quad y = \frac{t^3}{t^2+t-1},$$

deci curba este unicursală. Derivatele lui $x$ şi $y$ în raport cu $t$ sunt date de

$$(2) \qquad x' = \frac{t(t-2)}{(t^2+t-1)^2} \quad \text{şi} \quad y' = \frac{t^2(t^2+2t-3)}{(t^2+t-1)^2}.$$

Dacă se dau lui $t$ valorile particulare $-\infty$, $-3$, $0$, $1$, $2$, $+\infty$, precum şi acelea care anulează numitorii lui $x$ şi $y$ şi dacă se examinează semnele lui $x'$ şi $y'$, se stabileşte următorul tabel al variaţiunilor lui $x$ şi $y$ în funcţie de $t$.

| $t$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $+$ | | $+$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $-1$ | $-$ | $0$ | | $+$ |
| $x$ | $1$ | Creşte | $\frac{9}{5}$ | Creşte | $+\infty$ | $-\infty$ | Creşte | $0$ | Descreşte | $-\infty$ | $+\infty$ | Descreşte | $1$ | Descreşte | $\frac{4}{5}$ | Creşte | $1$ |
| $y'$ | $+$ | | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\frac{4}{5}$ | | $+$ | | |
| $y$ | $-\infty$ | Creşte | $-\frac{27}{5}$ | Descreşte | $-\infty$ | $+\infty$ | Descreşte | $0$ | Descreşte | $-\infty$ | $+\infty$ | Descreşte | $1$ | Creşte | $\frac{8}{5}$ | Creşte | $+\infty$ |

Cu ajutorul acestui tabel, se poate construi forma generală a curbei. Pentru o construcţie exactă trebue să se mai caute unele puncte particulare, asimptotele, punctele de inflexiune şi tangentele în aceste puncte.

Din chiar ecuaţia dată, prin enunţ, se vede că origina este un punct dublu. Tangenta în acest punct este axa

$$y = 0$$

şi cum, din tabel, se vede că curba trece de o parte şi de alta a acestei axe, rezultă că origina este un punct de rebrusment de prima speţă.

Rezolvând ecuaţia dată în raport cu $y$, se găseşte

$$y = 0 \frac{x^2 \pm x^2 \sqrt{5 - \frac{4}{x}}}{2(1-x)},$$

care arată că curba nu are puncte în regiunea limitată de dreptele

$$x = 0 \quad \text{şi} \quad x = \tfrac{4}{5},$$

ceeace se vede şi din tabel.

Tangenta în punctul $R(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ este paralelă cu $yy'$.

*Asimptote.* Asimptotele paralele cu axele sunt date de valorile lui $t$, care fac $\infty$, sau numai pe $x$ sau numai pe $y$. Din (1), se vede că pentru $t = \pm\infty$, $y$ devine $\pm\infty$, iar $x$ are ca limită pe 1.

Deci

$$x - 1 = 0 \tag{3}$$

este asimptota paralelă cu $Oy$. Curba nu are asimptote paralele cu $Ox$, căci nu există nicio valoare a lui $t$, care să facă pe $x$ infinit şi pe $y$ finit.

Valorile lui $t$, care anulează numitorii lui $x$ şi $y$ fără a anulà şi numitorii, dau celelalte asimptote. Aceste valori sunt rădăcinile ecuaţiei :

$$t^2 + t - 1 = 0,$$

adică

$$t_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad , \quad t_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Curba are deci alte 2 asimptote, în afară de dreapta (3). Fie

$$y = a\,x + b$$

ecuaţia uneia din aceste asimptote.

Direcţiile $a$ ale acestor asimptote sunt limitele raportului $y/x$ pentru $t$ egal respectiv cu $t_1$ şi $t_2$. Avem

$$a = \lim y/x = \lim t$$

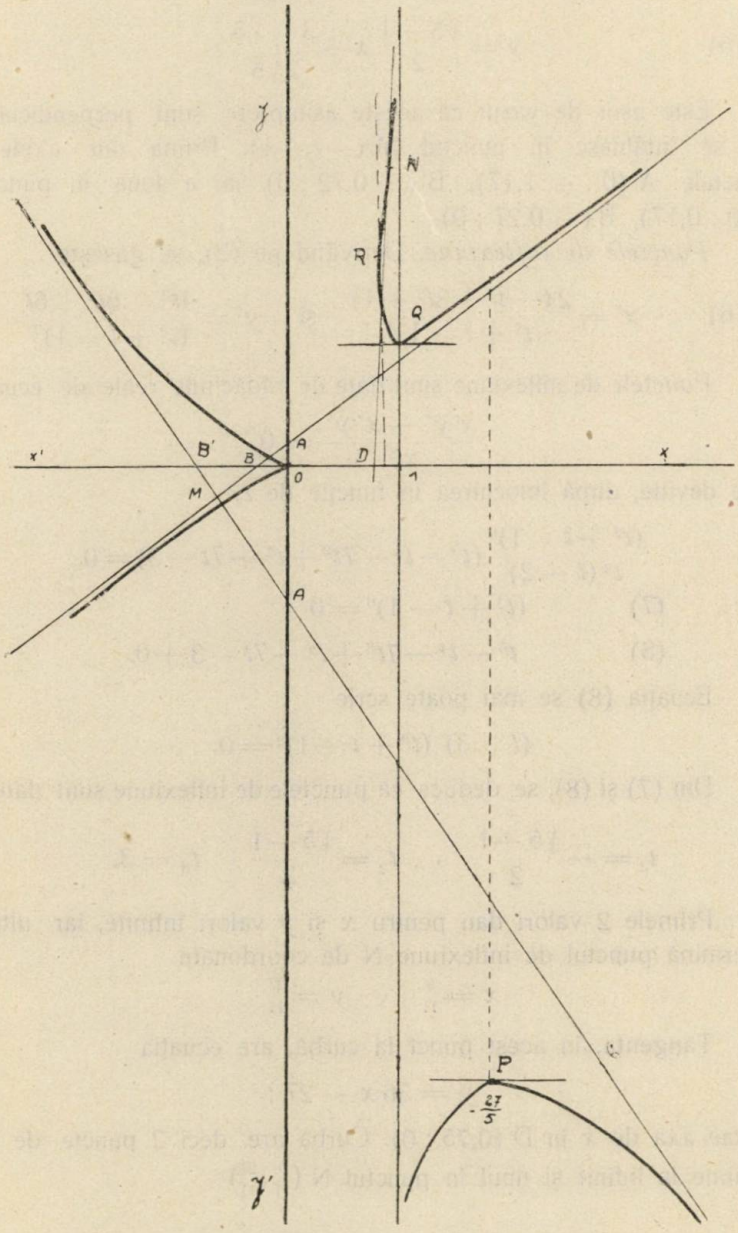
$$\therefore \quad a_1 = t_1 = -(\sqrt{5}+1)/2 \ , \ a_2 = t_2 = (\sqrt{5}-1)/2.$$

Pentru calculul lui $b$, avem

$$b = \lim (y - a\,x) = \lim \left( \frac{t^3}{t^2+t-1} - a \frac{t^2}{t^2+t-1} \right).$$

Făcând succesiv pe $a$ și $t$ egali cu $a_1$, $a_2$ și $t_1$, $t_2$, se găsește

$$b_1 = -(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5} \quad \text{și} \quad b_2 = (3-\sqrt{5})/2\sqrt{5}.$$



Ecuațiile celor 2 asimptote sunt deci:

$$(4) \qquad y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}x - \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$(5) \qquad y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Este ușor de văzut că aceste asimptote sunt perpendiculare. Ele se întâlnesc în punctul $M\left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Prima taie axele în punctele A′(0 ; — 1,17), B′( — 0,72 ; 0) iar a doua în punctele A(0 ; 0,17), B(— 0,27 ; 0).

*Punctele de inflexiune.* Derivând pe (2), se găsește

$$(6) \qquad x'' = \frac{2(-t^3+3t^2+1)}{(t^2+t-1)^3} \quad \text{și} \quad y'' = \frac{4t^3-6t^2+6t}{(t^2+t-1)^3}.$$

Punctele de inflexiune sunt date de rădăcinile reale ale ecuației

$$\frac{x'y''-x''y'}{x^3} = 0,$$

care devine, după înlocuirea în funcție de $t$,

$$\frac{(t^2+t-1)^6}{t^3(t-2)}(t^5-t^4-7t^3+t^2+7t-3) = 0,$$

$$\therefore \qquad (7) \qquad (t^2+t-1)^6 = 0$$

și

$$(8) \qquad t^5-t^4-7t^3+t^2+7t-3+0.$$

Ecuația (8) se mai poate scrie

$$(t-3)(t^2+t-1)^2 = 0.$$

Din (7) și (8), se deduce că punctele de inflexiune sunt date de

$$t_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad t_3 = 3.$$

Primele 2 valori dau pentru $x$ și $y$ valori infinite, iar ultima determină punctul de inflexiune N de coordonate

$$x = \frac{9}{11}, \quad y = \frac{27}{11}.$$

Tangenta, în acest punct la curbă, are ecuația

$$y = 36x - 27;$$

ea taie axa de $x$ în D (0,75 ; 0). Curba are deci 2 puncte de inflexiune la infinit și unul în punctul $N\left(\frac{9}{11}, \frac{27}{11}\right)$.

*Maxime şi minime.* Din tablou chiar se vede că curba are un maxim în punctul $P\left(\frac{9}{5}\,;\,-\frac{27}{5}\right)$ şi un minim în punctul $Q_{(1,1)}$.

Puncte singulare nu avem.

Curba are forma din figură.

*Observaţiuni.* Am insistat atât asupra asimptotelor şi punctelor de inflexiune, pentrucă deşi problema a fost atacată de corespondenţii cei mai reputaţi, totuşi ea nu a fost complet rezolvată de niciunul, iar construcţia curbei a fost greşită la toţi. Citez, după cum urmează, pe fiecare rezolvitor in parte, arătând şi erorile pe care le-au făcut în soluţiile trimise.

1. D-l I. Antoniu (Şc. Politechnică din Bucureşti) este singurul care a găsit că curba are asimptotă. D-sa a construit însă greşit asimptotele, fixând punctul lor de întâlnire M, în unghiul $x'0y$. De aci, a decurs construcţia eronată a curbei. Menţionez că d-sa a construit tabloul variaţiunilor foarte exact şi că a căutat să construiască curba la scară, întrebuinţând hârtie milimetrată. Nu s'a ocupat de inflexiune.

2. D-l A. Niculescu (Absolvent de Liceu) s'a ocupat de punctele de inflexiune şi a stabilit că ele sunt date de ecuaţia cu rădăcini imaginare

$$4t^2 - 6t + 3 = 0,$$

ceeace nu este adevărat. Pe figura construită de d-l A. Niculescu, sunt trasate, fără nicio explicaţie, 2 asimptote perpendiculare prin origină. S'a văzut că asimptotele nu trec prin origină.

3. D-l I. Coşereanu (Sc. Politechnică din Timişoara) stabileşte exact tabloul variaţiunilor, dar construeşte greşit ramurile din regiunea lui $x$ negativ. D-sa schimbă concavitatea acestor ramuri şi nu găseşte că curba are rebrusare de prima speţă.

4. D-l P. Katz (Absolvent de liceu) a rezolvat foarte bine problema, fără a pune pe $x$ şi $y$ în funcţie de $z$. Deşi nu a găsit asimptotele şi punctul de inflexiune, a trasat o curbă foarte aproape de cea adevărată.

Calea urmată de d-l P. Katz, duce la aceleaşi rezultate ca cele găsite în soluţia dată mai sus, numai că pentru cazul problemei 3030, se cer calcule mai anevoioase şi mai ales multă atenţie la căutarea unor limite.

Gh. B.

---

PROBLEMA 3152. *Un număr este scris numai cu cifra* a, *iar indicatorul lui numai cu cifra* (a—1), *care este acel număr?*

Căpitan I. Linteş.

1. Fie $a$ par, atunci ar trebui să avem:

1) $$\varphi\left(a.\frac{10^n-1}{9}\right) = (a-1)\frac{10^m-1}{9}.$$

Dar membrul I este par — orice indicator fiind par — iar membrul II este impar, deci nu putem avea soluție în acest caz.

2. Fie $a$ impar și prim, atunci din soluția 1) obținem:

$$2) \qquad \varphi\left(\frac{10^n-1}{9}\right)=\frac{10^m-1}{9}.$$

Pentru $n=1$ și $m=1$, egalitatea este posibilă, deci înseamnă că dacă $a=2, 3, 5, 7$, atunci avem soluție. Pentru $n$ și $m$ mai mari ca 1, egalitatea 2) nu mai este posibilă, căci membrul I e par, iar II impar.

3. Fie $a$ impar dar neprim, adică $a=9$, atunci să vedem când avem:

$$3) \qquad \varphi\,(\underbrace{99\ldots9}_{n})=\underbrace{88\ldots8}_{m}.$$

Fie $\alpha_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots t)$, factorii primi ai numărului

$$N=\frac{10^n-1}{9}.$$

Atunci avem:

$$\varphi\,(10^n-1)=(10^n-1)\frac{\pi\,(\alpha_i-1)}{\pi\alpha_i}.$$

In acest caz, relația 3) se mai poate scrie:

$$4) \qquad 9\,(10^n-1)\pi(\alpha_i-1)=8\,(10^m-1)\pi\alpha_i,$$

de unde vedem că trebue să avem $i\leqslant 3$, căci altfel am avea în membrul I pe 2 la o putere mai mare ca 3, ceeace nu ne permite membrul II, unde avem pe $8=2^3$.

Dacă $n=2k$ (par), atunci:

$$\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^k-1}{9}(10^k+1).$$

Pentru $n>2$ avem $i>3$; iar pentru $n=2$, avem $N=11$, dar $\varphi(99)=60\neq 88$, deci nu avem soluții.

Dacă însă $n$ este impar și $\mathscr{M}\rho$, unde $\rho$ este un număr prim, atunci:

$$\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^\rho-1}{9}\cdot(1+10^\rho+10^{2\rho}+\ldots).$$

Dar indicatorul numărului

$$\frac{10^\rho-1}{9}(1+10^\rho+10^{2\rho}+\ldots),$$

conține pe 2 la o putere mai mare ca 3 când $\rho \geqslant 3$, căci dacă $(10^\rho - 1)\,9$ este prim și $(1 + 10^\rho + 10^{2\rho} + \ldots)$ asemenea, atunci: $\varphi(10^\rho - 1)/9$ are ca factor cel puțin pe $2^1$, iar:

$$\varphi(1 + 10^\rho + 10^{2\rho} + \ldots) \text{ pe } 2^\rho .$$

Dacă însă aceste două numere nu sunt prime, atunci fiecare descompunându-se în câte doi factori primi cel puțin, va aveà un indicator, care va cuprinde pe 2 la puterea 4-*a* cel puțin.

Dar pentru $p = 1$, avem:

$$\varphi(9) = 6 \neq 8,$$

deci nici în acest caz nu avem soluție.

Dacă însă $n$ este prim absolut, atunci ar trebui să avem:

$$\varphi(\underbrace{99\ldots9}_{n}) = \underbrace{88\ldots8}_{m}.$$

Orî pentru $n > 3$; 9 este prim cu numărul $\underbrace{11\ldots1}_{n}$, deci mai putem scrie:

$$\varphi(9).\ \varphi(\underbrace{11\ldots1}_{n}) = 8.\ \underbrace{11\ldots1}_{m}.$$

Sau:

$$3.\varphi(\underbrace{11\ldots1}_{n}) = 4.\ \underbrace{11\ldots1}_{m}.$$

De unde se vede că $n > m$.

Însă mai vedem că $m$ trebue să fie $\not\equiv 3$, pentrucă numărul $11\ldots1$ să fie divizibil cu 3; ori în acest caz:

$$\underbrace{111\ldots1}_{m} = 3.37.\ (1 + 10^3 + 10^{2\cdot3} + \cdots + 10^{(9-1)3}),$$

unde $m = 39$.

Mai putem dar scrie:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}\ .\ \pi(\alpha_i - 1) = 4.37.\ A_q\,\pi\alpha_i\ ,$$

$$\text{unde } A_q = 1 + 10^3 + 10^{2\cdot3} + \cdots + 10^{3(q-1)},$$

de aici se vede că $i \leqslant 2$. Pentru $i = 1$, adică cazul unui număr prim nu avem soluție, căci $N - 1, = \not\equiv 2$ numai.

Pentru $i = 2$, avem:

$$N = A.B.$$

Dar, pentru ca N să se termine cu 11, ar trebui ca A şi B să se termine cu:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 01 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 03 | 13 | 23 |
| B | 11 | 01 | 91 | 81 | 71 | 61 | 37 | 47 | 57 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 43 | 53 | 63 | 73 | 83 | 93 | 09 | 19 | 29 | 39 |
| 67 | 77 | 87 | 97 | 07 | 17 | 27 | 79 | 69 | 59 | 49 |

şi invers.

Dacă numerele A şi B sunt prime absolut, atunci

$$\varphi(N) = (A - 1)\,(B - 1).$$

Observăm însă că produsul $(A - 1)\,(B - 1) = \mathcal{M}2^3$ cel puţin, deoarece ultimele două cifre din tablou ne arată aceasta, deci nici în acest caz nu avem soluţie.

In sfârşit, mai avem de examinat cazul $n$ prim şi mai-mic sau egal cu 3, adică numerele:

$$9,\ 99,\ 999.$$

Primele două am văzut mai sus că nu satisfac condiţiile cerute. Al treilea ne dă:

$$\varphi\,(999) = \varphi\,(3^3 . 37) = 648 \neq 888,$$

deci nu avem soluţie.

Problema admite dar ca soluţii numai numerele prime absolute de o singură cifră.

Căpitan I. L.

Au studiat toate cazurile problemei, însă mai puţin riguros cazul 3, D-nii: O. Popea, N. Botea, Gh. Mihoc.

Am studiat numai primele două cazuri, sau chiar numai unul din ele D-nii: Ozias Schächter şi Eug. Pălărieru.

Căpitan I. L.

---

PROBLEMA 3158. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(1) \qquad (1 + i)^x + x = 0,$$

*i fiind unitatea imaginară.*

M. Focşăneanu.

Dacă considerăm ecuaţia

$$(2) \qquad (1 + i)^z + z = 0,$$

unde

$$z = x + iy,$$

$x, y$ fiind cantităţi reale, pentru a o rezolvi suntem conduşi a căutà soluţiile reale ale sistemului următor:

$$\begin{cases} e^{xL\sqrt{2}-y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \times \cos\left[yL\sqrt{2}+x\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]+x=0 \\ e^{xL\sqrt{2}-y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \times \sin\left[yL\sqrt{2}+x\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]+y=0, \end{cases}$$

$k$ fiind un număr întreg, iar L însemnând logaritmul neperian.

Pentru a obţine sistemul (3), se va ţine seamă de semnificare prin convenţiune a expresiei $(1+i)^z$ şi pe urmă se anulează partea reală şi coeficientul lui $i$ a ecuaţiei (2).

Vom restrânge discuţia căutând numai soluţiile reale ale lui (1) sau (2).

Trebuie, pentru aceasta, să facem în (3)

$$y=0,$$

de unde rezultă că $x$ trebuie să satisfacă următoarele două ecuaţii:

$$\pm e^{xL\sqrt{2}}+x=0 \quad , \quad x=\frac{4n}{8k+1},$$

sau încă

$$\pm\sqrt{2^x}+x=0 \quad , \quad x=\frac{4n}{8k+1}.$$

Dacă $n$ este impar, avem semnul plus; dacă $n$ este par, semnul va fi minus.

1°. Să considerăm cazul

$$(4) \qquad \sqrt{2^x}=x, \quad x=\frac{4n}{8k+1}.$$

Se vede uşor că ecuaţia (4), are două rădăcini pozitive, una cuprinsă între 0 şi $e$ şi alta între $e$ şi $+\infty$. Insă rădăcinile lui (4) sunt rădăcini şi pentru ecuaţia

$$2^x=x^2,$$

care are ca rădăcini, dealtfel singurele,

$$x=2, \quad x=4,$$

dar 2 nu are forma $4n/(8k+1)$. Deci singura soluţie, în acest caz, este 4.

2°. Să considerăm cazul

$$\sqrt{2^x}=-x, \quad x=\frac{4n}{8k+1}.$$

Ca şi mai sus, se vede că această ecuaţie are o singură rădăcină negativă coprinsă între 0 şi — 1. Această rădăcină satisface ecuaţia

$$2^x = x^2.$$

După a doua condiţie, $n$ trebuie să fie raţional. Dacă $x$ ar fi o fracţie şi un întreg, atunci $2^x$ ar fi iraţional, iar $x^2$ ar fi raţional, ceeace nu se poate. Pe de altă parte, soluţia este coprinsă între $(-1, 0)$, deci nu poate fi întreagă. Deci, în acest caz, nu avem nicio soluţie. Deci singura soluţie reală a ecuaţiei (1), este 4.

Au rezolvat problema următorii D-ni: M. Adam, Tr. Angelescu, B. Barbălatt, C. Berdan, M. Brătescu-Danubiu, Paul Ionescu, St. Lăzărescu, Ion Miu, Nicolae Nicolescu, O. Popea, Dorin Popescu, Nicolae Popescu, Corneliu Popescu, I. A. Schächter, I. S. Schächter, O. M. Schächter, Marin Ştefan, P. Ţânţăreanu, Alex. Tauber, B. Vulpanovici, Leon Weiss.

---

PROBLEMA 3207. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}}=\sqrt{2mi}.$$

N. Botea.

Gonind numitorii, observăm că $(i+1)^2 = 2i$ şi ridicând apoi la patrat, obţinem ecuaţia:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=\frac{1}{m},$$

sau încă

$$(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})=-m,$$

ecuaţie de aceeaşi formă cu cea propusă în problema 3097 şi rezolvată în No. 3 al acestui an.

Rezolvind, pe aceeaşi cale, ecuaţia de mai sus, găsim:

$$x=\frac{(1+m^2)^2}{4m(1-m^2)}.$$

*Notă.* 1. Au rezolvat ecuaţia propusă, găsind valoarea exactă, sau aproape exactă a lui $x$, D-nii: M. Adam, N. Beschea, P. Bleiweiss, L. Căldăraru, V. Coşniţă, T. Diaconescu, V. Dorneanu, O. Florescu, B. Gătăianţu, Gh. Ghimicescu, F. Goldstein, Angelo Ionescu, Paul Ionescu, V. Manafu, I. Miu, A. Mladenovici, A. Novac, M. Pătroianu, I. Popa, C. Popovici, I. Popovici, D. Samoilă, Arie şi O. Schächter, N. Segârceanu, Gh. Simionescu, A. Stoica, Gh. Stroescu, N. Teodorescu, V. Vârlan, I. Vasiliu, B. Vulpanovici, C. Giurumescu, O. Ianculescu şi P. Spacu.

2. Celelalte soluţiuni conţineau erori elementare de calcul.

M. G.

---

PROBLEMA 3224. *Din vârfurile* A, B, C, *ale unui triunghiu* ABC *ca centre, se descriu trei cercuri cu razele respectiv egale cu*

$$\sqrt{(p^2-a^2)/3} \quad , \quad \sqrt{(p^2-b^2)/3} \quad , \quad \sqrt{(p^2-c^2)/3}.$$

*Să se demonstreze că centrul de greutate* G, *al triunghiului, este centrul radical comun al acestor trei cercuri şi al cercului înscris* I.

Ion C. Vasiliu.

Soluţie dată de D-nii: Mircea Adam (Constanţa), Filip S. Goldstein (Elev Cl. VII, Liceul Şincai), Ozias M. Schächter (Elev Cl. VI, Liceul Galaţi), Valeriu Manafu şi I. Georgescu-Racoviţă (Elevi Cl. V, Liceul Mânăstirea Dealului), Adrian Novac, C. C. Popovici, Eugen Georgescu, C. A. Mihăilescu, Ilie Popa şi C. Ciurumescu (Elevi Liceul Internat, Iaşi).

Să însemnăm cu $R_a$ , $R_b$ , $R_c$ razele cercurilor descrise din vârfurile A, B, C şi cu $m_a$ , $m_b$ , $m_c$ lungimile medianelor triunghiului.

Pentru ca punctul G să fie centrul radical al celor trei cercuri, trebue ca el să aibă puteri egale în raport cu aceste cercuri, adică:

$$\overline{GB}^2 - \overline{GC}^2 = R_b^2 - R_c^2,$$

sau

$$\frac{4}{9}(m_b^2 - m_c^2) = \frac{p^2-b^2}{3} - \frac{p^2-c^2}{3} = \frac{c^2-b^2}{3}. \qquad (1)$$

Avem însă

$$m_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \qquad m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

şi înlocuind în (1), obţinem o identitate.

La fel, arătăm că avem

$$\overline{GC}^2 - \overline{GA}^2 = \frac{a^2-c^2}{3},$$

ceeace demonstrează prima parte a problemei.

Pentru a demonstră şi partea a doua, urmărind acelaş raţionament, trebue să avem

$$\overline{GA}^2 - \overline{GI}^2 = R_a^2 - r^2 = (p^2-a^2)/3 - r^2.$$

Avem însă

$$9\,\overline{GI}^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr$$

$$9\,\overline{GA}^2 = 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 4p^2 - 4r^2 - 16Rr - 3a^2$$

$$\therefore \quad \overline{GA}^2 - \overline{GI}^2 = (p^2 - a^2)/3 - r^2,$$

ceeace demonstrează şi ultima parte a problemei.

D-nii: Gh. D. Simionescu, M. Pătroianu, Ovidiu Popea, C. I. Ciorănescu, Paul I. Ionescu, N. G. Botea, au rezolvat problema cu ajutorul coordonatelor baricentrice.

## EXERCIŢII

54. Să se arate că numerele:

961 ; 90601 ; 9006001 ;....

scrise în sistemul duodecimal, sunt patrate perfecte.

S. Katz.

R. Numerele au expresiunea:

$$9.12^{2n} + 6.12^n + 1 = (3.12^n + 1)^2.$$

55. Să se arate că numerele:

5100601 ; 8010006001 ; 8001000060001 ;.....

scrise în sistemul duodecimal sunt cuburi perfecte.

S. Katz.

R. Numerele au expresiunea:

$$8.12^{3n} + 12^{2n+1} + 6.12^{2n} + 1 = (2.12^n + 1)^3.$$

56. Se cer numerele de şase cifre, patrate perfecte, aşà ca cifrele de rang pereche de o parte, şi cele de rang nepereche, de altă parte, scrise în ordinea lor, să facă două patrate.

P. Katz.

R. Fie *abcdef* un patrat şi *ace* şi *bdf* patrate. Grupurile *ef*, *ce*, *df* trebuie să termine patrate. Se formează apoi patratele de trei cifre *ace* şi *bdf* şi se verifică dacă *abcdef* este patrat. Se găseşte singura soluţie 438244, care este patratul lui 662 şi care dă numerele 484 şi 324, patratele lui 22 şi 18

57. Care este cubul de patru cifre, a cărui rădăcină este suma cifrelor?

A. P. IONESCU.

R. Sunt numai şapte cuburi de patru cifre. Dintre acestea, corespunde 4913, cubul lui 17.

58. Se cer două numere diferind cu 2, aşà ca diferenţa cuburilor lor să fie egală cu produsul lor mărit cu un număr dat. De ce formă trebuie să fie acel număr?

I. I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ.

R. Avem:

$$(x+2)^3 - x^3 = x(x+2) + a,$$

$$5x^2 + 10x = a - 8.$$

Se vede că $a = 5n + 3$. Deci:

$$x^2 + 2x + 1 - n = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{n}.$$

Deci $n = m^2$. Numărul dat este de forma $(5m^2 + 3)$. Cuburile sunt atunci $(m+1)^3$ şi $(m-1)^3$.

59. Care este patratul de trei cifre, care rămâne patrat intervertind ultimele două cifre.

E. G. GAIU.

R. Enunţul ne dă:

$$100s + 10z + u = (10n+p)^2; \quad 100s + 10u + z = (10n+q)^2.$$

Scăzând, avem:

$$9(z-u) = (20n+p+q)(p-q).$$

Primul membru este cel mult $9 \times 8 = 72$, deci $(p-q)$ e cel mult 3. Avem:

$p - q = 1$, $\quad 9(z-u) = 20u + 29 + 1$,

$p - q = 2$, $\quad 9(z-u) = 40u + 49 + 4$,

$p - q = 3$, $\quad 3(z-u) = 20u + 29 + 1$.

Prima dă $q = 3$, $p = 4$ de unde soluţiile $196 = 14^2$, $169 = 13^2$.

A doua cere $z - u = 4$ care nu dă soluţie, sau $z - u = 8$ care nu dă soluţie.

A treia cere $z - u > 8$ şi nu dă soluţie.

60. Prin vârful A al unui triunghiu ABC, se duc dreptele AB' şi AC' egal înclinate, şi în acelaş sens, respectiv pe AB şi AC, astfel în cât să avem

$$AB : AC = AC : AB.$$

Dacă latura BC este fixă şi unghiul A constant, să se găsiască locul geometric al intersecţiei dreptelor BB' şi CC'.

CONST. I. CIORĂNESCU.

R. Avem, prin construcţie, $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle CAC'$, iar condiţia dată se poate scrie $AB' : AB = AC' : AC$. Triunghiurile ABB', ACC' sunt deci asemenea, căci au un unghiu egal cuprins între laturi proporţionale. Rezultă atunci

$$\sphericalangle ABB' = \sphericalangle ACC',$$

de unde conchidem că intersecţia dreptelor BB', CC' se face pe acelaş cerc, pe care se află vârfurile A, B, C.

61. Fie $k_a$ , $k_b$ , $k_c$ , segmentele din laturile triunghiului ABC cuprinse în cercul lui EULER. Să se arate că:

$$\sum \frac{\sqrt{a}.\ k.\ a}{\sin(B-C)} = R.S \sum \frac{1}{p-a}.$$

S. WEISS.

R. Avem: $k_a = R \sin(B-c)$, $k_b = R \sin(c-A)$ ... etc.

$$\sqrt{a} = \frac{S}{p-a} \text{ ... etc.}$$

## PROBLEME PROPUSE

3271. Se cere numărul de trei cifre, divizibil cu 17, aşà ca şi suma puterilor a 17-a a cifrelor lui să se dividă cu 17.

E. ŞTEFĂNESCU.

3272. Care sunt patratele mai mici ca 1000000, la care toate cifrele sunt patrate perfecte?

D. SOLOMON.

3273. Să se arate că dacă:

$$\varphi_\alpha(17^\beta) = 2,$$

atunci $\alpha = 4\beta$; $\varphi_n$ (I) fiind indicatorul de ordinul $n$ al lui I.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

3274. Fie ABCD un trapez înscris într'un cerc și M un punct de pe cerc, astfel ca perpendicularele duse din M pe diagonalele AC și BD ale trapezului să întâlniască cercul în două puncte situate pe arcele corespunzătoare la două laturi opuse. Dacă $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ sunt proiecțiile lui M pe laturile neparalele și pe diagonale, să se demonstreze că punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ sunt conciclice.

MARIN ȘTEFAN.

3275. Fie D, E, F punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile *a, b, c;* $D_a$, $E_b$, $F_c$ punctele de contact ale cercurilor exînscrise în unghiurile A, B, C respectiv cu laturile *a, b, c.* Fie apoi $\Gamma$ și $\nu$ punctele lui GERGONNE și NAGEL a triunghiului ABC, iar

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | intersecția | dreptelor | E | F | și | $E_b F_c$ |
| $Q_2$ | » | » | F | D | și | $F_c D_a$ |
| $Q_3$ | » | » | D | E | și | $D_a E_b$ |
| $Q'$ | » | » | $E_b$ | F | și | E $F_c$ |
| $Q''$ | » | » | $F_c$ | D | și | F $D_a$ |
| $Q'''$ | » | » | $D_a$ | E | și | D $E_b$ |

Se cere să se demonstreze că grupurile de puncte (Q' A, $Q_2$, $Q_3$), (Q'', B, $Q_1$, $Q_3$), (Q''', C, $Q_2$, $Q_1$), ($\Gamma$, $\nu$, Q', Q'', Q''') sunt colineare și că aria fiecăruia din triunghiurile DEF și $D_a E_b F_c$ este jumătate din aria triunghiului $Q_1 Q_2 Q_3$.

ATH. RADEV.

3276. Două triunghiuri omologice ABC și A'B'C' (A'B'C' fiind înscris în ABC) sunt isolineare.

M. GHERMĂNESCU.

3277. Fiind dat un determinant de ordinul al 3-lea, să se demonstreze relaţia:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se extindă la un determinant de ordinul $n$.

N. Ciorănescu.

3278. Se dau şirurile cu termeni pozitivi:

$$a,\ a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ .\ a_n\ .\ .\ .$$

$$b,\ b_1,\ b_2\ .\ .\ .\ .\ b_n\ .\ .\ .$$

unde $a < b$ şi

$$a_i = \sqrt{a_{i-1} - b_{i-1}}\ , \qquad b_{i-1} = \frac{a_i}{2^{2i-1} - a_{i+1}^2}\ .$$

Se cere să se demonstreze că

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$$

şi să se calculeze valoarea acestei limite.

Tiberiu Popoviciu.

3279. Să se afle valorile lui $x$, care satisfac deodată inegalităţile:

$$x^4 + 2x^2 - 4x - 1 > 0,$$

$$x^3 + x + 1 > 0.$$

Th. Angheluţă.

3280. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin x + \operatorname{arc}\sin x = 0.$$

I. Ionescu.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Beschea G. N.* (3266); *Bleiweiss P.* (3203); *Bogdan M.* (3254); *Botea N.* (3200, 03, 41, 52, 59); *Brüll L.* (3203, 52); *Buga I.* (3237, 66); *Călin Gh.* (3246); *Ciorănescu C.* (P); *Cristea Gh. P.* (P); *David Gh.* (N); *Diaconescu T.* (3266, E); *Diaconu B. M.* (3222); *Dorneanu V.* (3237); *Felix C. Șt.* (3259, 67); *Florea C. Alex.* (3167, 234, 48, 54, 56, 65, 66); *Focșeneanu M.* (3239); *Gataianțu B.* (3158, 266); *Georgescu D. Eug.* (3222, 48, 66); *Georgescu V.* (3222, 48, 51); *Georgescu-Racoviță I.* (2922, 3223, E, N, R); *Ghelerter* (P); *Ghimicescu I. Gh.* (3266); *Giurumescu C.* (3248, 56); *Goldstein F.* (3264, 65, 66); *Gropper Samy* (3215, 48, 66); *Grünbaum Micu* (A, P); *Hartular G.* (3215, 48, 66); *Ianculescu O.* (3248); *Iliescu E.* (R); *Iliuță I.* (E); *Ionescu Angelo* (3248); *Ionescu Paul* (3144); *Ionescu-Bujor Th.* (N); *Jojea N.* (3237); *Kahane Arno* (3266); *Katz S.* (2856, 3237, 52); *Lepădatu V.* (3265, 66); *Manafu V.* (2922, 3167, 78, 234, 48, 54, N, P); *Manoil-Roman A.* (3202); *Marcoviciu H.* (3237); *Mihăilescu A. C.* (3248, 54, 65, 66); *Milculescu G. D.* (3256); *Mladenovici C. A.* (3266); *Miu M. I.* (3266); *Nicolau H. C.* (A, P); *Novac Ad.* (3248, 66); *Opran Al.* (3173, 237, 39); *Paszko N. V.* (3215, 18, P); *Pătroianu M.* (3237); *Petrescu A. D.* (3222, 37, 48); *Popa Ilie* (3092, 167, 237, 59, 65, R); *Popea O.* (A); *Popescu N. C.* (3167, 252, 59); *Popovici C. C.* (3234, 35, 37, 48, 54, 56, 65, 66, R); *Popovici Th. I.* (3167, 218, 66); *Popovici Mihai* (3248); *Popovici-Puiu Dan* (N); *Puşca I. T.* 3218, 22, 48); *Roşu Al. Al.* (2922, 3266, R); *Rusanda Gh.* (3266); *Schächter Ide* (3237); *Schächter O.* (3266, P); *Segârceanu N.* (3237); *Sevastre I. D.* (3215, 18, 48, 56); *Simionescu D. Gh.* (3144, 237, 48); *Spacu G. P.* (3266); *Spathy I. R.* (3167, 266); *Spiridonescu Gh.* (3266); *Ștefănescu E.* (3167, 218, P); *Stoica A.* (2610, 3237); *Stoicescu P.* (3248); *Stoicescu T. T.* (3222); *Tatiler G.* (3261); *Teodorescu St. I.* (3237); *Teodorescu N.* (3237, N); *Vârlan V. V.* (3222, 37, 48, 66); *Vasiliu Gh. Gh.* (3202, E); *Vasiliu C. I.* (3144, 235, 44, 48, 51, 53, 54, 64, 66, A, N, P, R); *Velea M.* (3237); *Weiss S.* (3252, N); *Zane Gh.* (3173, 237, 39).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1884, 948, 2063, 83, 145, 91, 222, 318, 47, 58, 83, 97, 414, 31, 36, 58, 71, 510, 44, 53, 98, 610, 40, 43, 51, 61, 745, 856, 91, 918, 20, 72, 78, 80, 91, 3024, 62, 71, 90, 93, 102, 04, 13, 31, 52, 55, 57, 62, 73, 82, 84, 91, 206, 07, 16, 21, 26, 28, 29, 33, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 52, 54, 58, 59, 62, 63 și 69 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

## Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

### 29 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

Mod Asociațiunea pentru cultura și Literatura Poporului Român Sibiu

# ZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

ANUL XXX.

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1925.

SUMARUL

1. Asupra unei inegalităţi . . . . . *Victor Vâlcovici.*
2. Asupra Sărbătorii Paştelui . . . . . *Maximilian Marcus.*
3. Note Matematice: 46—53.
4. Chestiuni de examen.
5. Recensii.
6. Bibliografii.
7. Cereri: 121, 122.
8. Probleme rezolvate: 2097, 2459, 3040, 3100, 3176, 3184, 3251.
9. Exerciţii: 62—64.
10. Probleme propuse: 3281—3290.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 115

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **Gh. Em. Filipescu**, Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu**, Cassier.

---

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

---

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

---

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

---

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

---

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 55, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 90, 92, 94, 208, 19, 20, 26, 28, 30, 32, 38, 40, 49, 55, 57, 58, 60, 62, 68, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

# ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI.

In «*Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine*» (VII$^{ème}$ année No. 7/10, pag. 122), găsim inegalitatea:

$$I \equiv \int_0^{\infty} x^m e^{-ae^{bx}} sh\,\beta x \sin\alpha x\, dx > 0, \quad (m, a, b, \alpha, \beta > 0)$$

dedusă de D-nul O. ONICESCU, cu ajutorul unor calcule delicate. Imi propun să arăt că această relație nu este adevărată și anume că se pot determină constantele pozitive $m$, $a$, $b$, $\alpha$ și $\beta$ așà fel în cât integrala de mai sus să fie negativă.

Voiu pune dela început

$$\alpha = \pi/n$$

și voiu observà că integrantul este pozitiv sau negativ în intervalul

$$x = [kn, \quad (k+1)n], \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

după cum numărul întreg $k$ este par sau impar. Funcțiunea

$$f(x) = x^m e^{-ae^{bx}} sh\,\beta x$$

este esențial pozitivă în intervalul

$$x = [0, \infty].$$

Ea pornește dela valoarea zero și tinde asimptotic tot la zero.

Vom presupune că $\beta$ este deajuns de mic pentru ca $sh\,\beta x$ să poată fi înlocuit cu $\beta x$ în valoarea lui $f(x)$, în intervalul $[0, 3n]$. Eroarea, pe care o facem, este egală cu:

$$(1) \qquad D = \int_0^{3n} x^m e^{-ae^{bx}} (sh\,\beta x - \beta x) \sin\frac{\pi}{n} x\, dx,$$

de unde deducem, pentru valoarea ei absolută:

$$|D| < \int_0^{3n} x^m e^{-ae^{bx}} (sh\beta x - \beta x)\, dx.$$

Insă funcțiunea

$$sh\beta x - \beta x$$

este monoton crescătoare cu $x$, în cât vom puteà scrie:

$$|D| < (sh3\beta n - 3\beta n)\int_0^{3n} x^m e^{-ae^{bx}}\,dx.$$

Utilizând de două ori inegalitatea:

$$sh\omega < \omega ch\omega, \qquad (\omega > 0),$$

odată relația:

$$ch\omega - 1 = 2sh^2 \tfrac{1}{2}\omega$$

și presupunând pe $\beta$ inferior unității, deci inegalitatea:

$$ch \tfrac{3}{2}\beta n < ch \tfrac{3}{2} n$$

valabilă, obținem pentru eroarea D:

$$|D| < \beta^3 A, \tag{2}$$

unde am pus:

$$A = \frac{27n^3}{2} ch^2 \tfrac{3}{2} n \int_0^{3n} x^m e^{-ae^{bx}}\,dx,$$

adică o cantitate pozitivă, finită și independentă de $\beta$.

Vom înlocui, prin urmare, în intervalul:

$$x = [0, 3n]$$

funcțiunea $f(x)$ prin:

$$\beta x^{m+1} e^{-ae^{bx}} = \beta\gamma,$$

cu:

$$y = x^{m+1} e^{-ae^{bx}}. \tag{3}$$

$y$ este pozitiv în intervalul $[0,\infty]$. Valoarea lui $x$, care maximează pe $y$, se află anulând derivata. Pe aceasta o obținem mai simplu pornind dela relația:

$$\log y = (m+1)\log x - ae^{bx},$$

de unde deducem:

$$y' = y\left(\frac{m+1}{x} - abe^{bx}\right). \tag{4}$$

Cum expresiunea din parenteză este monoton descrescătoare în intervalul $[0,\infty]$, plecând dela valoarea $+\infty$ și ajungând la valoarea

$-\infty$, rezultă că ea se anulează în interval numai o singură dată pentru $x = x_0$, dat de relația:

$$(m+1)/x_0 = abe^{bx}.$$

Vom pune condiția ca $x_0$ să fie egal cu $\frac{3}{2}n$. Rezultă:

$$(I) \qquad m+1 = \tfrac{3}{2}abn\,e^{\frac{3bn}{2}},$$

o primă relație între constantele date. Valoarea maximă corespunzătoare lui $y$ este:

$$(5) \qquad y_0 = \left(\tfrac{3}{2}n\right)^{m+1} e^{-ae^{\frac{3bn}{2}}}.$$

Funcțiunea $y$ crește în intervalul $(0, \frac{3}{2}n)$, dela zero la $y_0$; apoi în intervalul $(\frac{3}{2}n, \infty)$ descrește tinzând la zero.

Vom însemnă cu $y_1$, $y_2$, $y_3$ valorile, pe care le ia $y$ respectiv în punctele:

$$x = n, \quad 2n, \quad 3n,$$

adică vom pune:

$$(5') \qquad \begin{cases} y_1 = n^{m+1}e^{-ae^{bn}} \\ y_2 = (2n)^{m+1}e^{-ae^{2bn}} \\ y_3 = (3n)^{m+1}e^{-ae^{3bn}}. \end{cases}$$

Ecuația (3), raportată la două axe rectangulare, reprezintă o curbă, care pornește din origine tangentă la axa $Ox$, trece prin punctul

$$x = n, \qquad y = y_1$$

și își atinge maximum ordonatei pentru

$$x = \tfrac{3}{2}n,$$

având în interval un punct de inflexie.

Voiu pune condiția:

$$(II) \qquad y_0 > \tfrac{3}{2}y_1$$

adică ordonata maximă este mai mare decât ordonata dreptei

$$(6) \qquad y = y_1/n \,.\, x$$

pentru abscisa:

$$x = \tfrac{3}{2}n.$$

De aici, rezultă că dreapta (6) are ordonatele sale mai mari decât acelea ale curbei (3) în intervalul $[0,n]$ și mai mici în intervalul $(n, \frac{3}{2}n)$, deoarece ea unește originea cu punctul de coordonate $x=n$, $y=y_1$ de pe curba (3).

In mod analog, punând condiția:

$$(III) \qquad y_0 > \tfrac{3}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3,$$

vom avea că dreapta, care unește extremitățile ordonatelor $y_1$ și $y_2$:

$$y = y_2 + \frac{y_3 - y_2}{n}(x - 2n),$$

are ordonata sa mai mică decât aceea a curbei (3) în intervalul $(\frac{3}{2}n, 2n)$ și mai mare în intervalul $[2n, 3n]$. Rezultă că punând:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{y_1}{n}x \text{ pentru } 0 \leqq x < \tfrac{3}{2}n \\ y_2 + \dfrac{y_3 - y_2}{n}(x-2) \text{ pentru } \tfrac{3}{2}n \leqq x \leqq 3n, \end{cases}$$

obținem relațiile:

$$\varphi(x) \geqq x^{m+1}e^{-ae^{bx}} \text{ pentru } 0 \leqq x \leqq n \text{ și } 2n \leqq x \leqq 3n$$

și

$$\varphi(x) < x^{m+1}e^{-ae^{bx}} \text{ pentru } n < x < 2n,$$

încât vom putea scrie, ținând seama de semnul sinusului:

$$\varphi(x)\sin\frac{\pi}{n}x \geqq x^{m+1}e^{-ae^{bx}}\sin\frac{\pi}{n}x, \quad \text{pentru } 0 \leqq x \leqq 3n.$$

Integrând, avem:

$$\int_0^{3n}\varphi(x)\sin\frac{\pi}{n}x\,dx > \int_0^{3n}x^{m+1}e^{-ae^{bx}}\sin\frac{\pi}{n}x\,dx.$$

Insă, primul membru al acestei inegalități se calculează fără nicio greutate. Se găsește:

$$\int_0^{3n}\varphi(x)\sin\frac{\pi}{n}x\,dx = -\frac{n}{\pi^2}[y_1 + y_2 - (1+\pi)y_3].$$

Vom mai presupune că avem

$$y_1+y_2-(1+\pi)y_3=\frac{\pi^2}{n}B,$$

B fiind o cantitate pozitivă, adică:

$$(IV) \qquad y_1+y_2-(1+\pi)y_3>0,$$

de unde deducem:

$$(7) \qquad \int_0^{3n} x^{m+1}e^{-ae^{bx}}\sin\frac{\pi}{n}x\,dx<-B.$$

Ne propunem să demonstrăm acum că integrala:

$$\int_{3n}^{\infty} x^m e^{-ae^{bx}}\,sh\,\beta x\sin\frac{\pi}{n}x\,dx,$$

este negativă. Pentru aceasta, să observăm că funcțiunea $f(x)$ este monoton descrescătoare în acest interval, dacă $\beta$ este deajuns de mic. In adevăr, derivata sa logaritmică este:

$$(8) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{m}{x}-abc^{bx}+\beta\frac{ch\beta x}{sh\beta x},$$

adică o funcțiune monoton descrescătoare

Vom pune această expresie sub forma:

$$(8') \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{m+1}{x}-abc^{bx}+\beta\frac{ch\beta x}{sh\beta x}-\frac{1}{x}.$$

Observând că derivata logaritmică a lui $y$, dedusă din (4), este negativă pentru

$$x=3n$$

și că $sh\,\omega$ este mai mare ca $\omega$ pentru valori pozitive, vom puteà scrie:

$$(8'') \qquad \frac{f'(3n)}{f(3n)}<-M+\beta^2\frac{9}{2}n\,ch^2\frac{3}{2}\beta n.$$

Vom lua iarăși unitatea ca limită superioară pentru $\beta$ și deci:

$$ch\frac{3}{2}n>ch\frac{3}{2}\beta n.$$

Relația (8'') devine

$$\frac{f'(3n)}{f(3n)}<-M+\beta^2N, \qquad N=\frac{9}{2}n\,ch^2\frac{3}{2}n.$$

Luând pe $\beta$ deajuns de mic — mai mic decât $+\sqrt{M/N}$ — membrul al doilea va fi negativ, adică derivata logaritmică (8) a lui $f(x)$ va fi negativă în punctul

$$x = 3n.$$

Cum această derivată este monoton descrescătoare, rezultă că ea rămâne negativă în tot intervalul $[3n,\infty]$.

Astfel am demonstrat că funcțiunea $f(x)$ este monoton descrescătoare în acest interval. Așà fiind, se vede imediat că integrala:

$$\int_{3n}^{\infty} x^m e^{-ae^{bx}} sh\,\beta x \sin\frac{\pi}{n} x\,dx = \int_{3n}^{4n} + \int_{4n}^{5n} + \int_{5n}^{6n} + \ldots.$$

este negativă, de oarece termenii din membrul al doilea descresc în valoare absolută, sunt alternativ pozitivi și negativi, iar primul este negativ.

Fie $-C$ valoarea ei:

$$(9) \qquad \int_{3n}^{\infty} x^m e^{-ae^{bx}} sh\,\beta x \sin\frac{\pi}{n} x\,dx = -C,$$

C fiind o cantitate pozitivă.

Revenind acum la integrala I, o vom descompune în felul următor:

$$I = \beta \int_0^{3n} x^{m+1} e^{-ae^{bx}} \sin\frac{\pi}{n} x\,dx + \int_0^{3n} x^m e^{-ae^{bx}} (sh\,\beta x - \beta x) \sin\frac{\pi}{n} x\,dx$$

$$+ \int_{3n}^{\infty} x^m e^{-ae^{bx}} sh\,\beta x \sin\frac{\pi}{n} x\,dx,$$

sau, înlocuind cu ajutorul relațiilor (7), (1) și (9), integralele din membrul al doilea,

$$I < -\beta B + D - C.$$

Deoarece însă D este, conform relației (2), mai mic în valoare absolută decât $\beta^3 A$, iar B este independent de $\beta$, se poate lua $\beta$ îndeajuns de mic pentru ca membrul al doilea să fie negativ.

Rămâne să mai arătăm că condițiunile (I), (II), (III) și IV sunt compatibile între ele.

Inlocuind pe $y_0$ și pe $y_1$ prin valorile lor din (5) și (5'), și tregând la logaritmi, condiția (II) devine:

$$m \log \frac{3}{2} > a e^{bn}\left( e^{\frac{bn}{2}} - 1 \right).$$

Comparând-o cu (I), obținem relația

$$\frac{3bn}{2} e^{\frac{bn}{2}} \log \frac{3}{2} > e^{\frac{bn}{2}} - 1 + \frac{e^{-bn}}{a} \log \frac{3}{2},$$

care este evident posibilă dacă $bn$ și $a$ sunt deajuns de mari — de pildă:

$$bn \geqq 2, \qquad a \geqq 1.$$

In mod analog, vom verifică compatibilitatea condițiilor (III) și (IV) între ele și cu (I) și (II) succesiv (in total șease comparații). Pentru simplificarea calculelor, vom înlocui condițiunile (III) și (IV) prin următoarele, care le cuprind:

$$y_0 > \frac{3}{2} y_2, \qquad y_2 > (1 + \pi) y_3.$$

Cu chipul acesta, constatăm că există compatibilitate între condițiuni, dacă avem de pildă

$$a \geqq 1, \qquad bn \geqq 2.$$

Așà dar, luând

$$m = \frac{3ab}{2\alpha} e^{\frac{3b\pi}{\alpha}} - 1, \qquad a \geqq 1, \qquad \frac{b}{\alpha} \geqq \frac{2}{\pi}$$

și pe $\beta$ deajuns de mic, vom aveà integrale I negative.

VICTOR VÂLCOVICI.

# ASUPRA SĂRBĂTORII PAȘTELUI.

Hotărîndu-se schimbarea calendarului pentru uzul bisericii ortodoxe române, s'a stabilit ca, în ceeace privește Sf. Sărbători ale Paștilor și celelalte sărbători mobile, să se păstreze datele determinate de vechiul calendar. Ziua învierii, deși variază dela an la an, totuși intervalele în care revine aceeași dată a calendarului sunt supuse unor reguli bine definite. Sunt 35 zile cu totul în care putem avea prima zi de Paști, cea mai de vreme fiind 22 Martie st. v., cea mai târzie 25 Aprilie st. v. Aceste zile se repetă după o lege matematică, într'un ciclu de 532 ani, revenind analog în ciclurile următoare, astfel că de exemplu, anii 1, 533, 1065. 1597 etc. au aceeași dată. Intr'un ciclu de 532 ani, cele 35 zile sunt repartizate astfel, că unele (cele extreme) se repetă de câte 4 ori, altele de câte 8, 12, 16 sau 20 ori, formând 5 grupuri distincte.

In tabela No. 1, este indicat, pentru fiecare an al ciclului, data corespunzătoarea a primei zi de Paști, calculată după stilul vechiu. Ne servim deci de tabela I în modul următor: Dividem anul, pentru care voim a calculà Paștele, cu 532. Rămasul împărțirei ne indică rangul anului în ciclu, iar în tabelă găsim la intersecția coloanei verticale care ne indică cifra de unimi a rămasului, cu linia orizontală care ne arată sutimile și zecimile rămasului, data căutată. De exemplu, pentru anul 1925 găsim, divizând cu 532, câtul 3 și rămasul 329. Coborîm pe coloana verticală, ce poartă în cap cifra 9, pânăla intersecția cu rândul orizontal 32 și găsim 6 Aprilie st. v., ceeace însemnează că în 1925, prima zi de Paști cade în 6/19 Aprilie.

In tabela No. 2, sunt indicate datele dela 22 Martie st. v. pânăla 25 Aprilie st. v., iar în dreptul lor anii respectivi ai ciclului, în cari cade prima zi de Paști, la acea dată.

Pentru a se vedeà mai bine legea, care există între diferitele grupuri de date, le-am reprezentat grafic prin 5 cercuri concentrice, în care unghiurile dela centru sunt proporționale cu intervalele de timp. Se vede, din figură, că primele 4 raze, care ne dau unghiurile grupului I, rămân aceleași pentru toate grupurile. Pentru grupul al 2-lea, (date care se repetă de 8 ori) se mai intercalează 4 raze, care rămân aceleași pentru celelalte 3 grupuri exterioare.

## TABELA No. 1

**Datele Sf. Paşti după stilul vechiu, într'un ciclu de 532 ani.**
**(M = Martie, A = Aprilie).**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11A | 27M | 16A | 8A | 23M | 12A | 4A | 24A | 8A | 31M |
| 1 | 20A | 5A | 27M | 16A | 8A | 24M | 12A | 4A | 24A | 9A |
| 2 | 31M | 20A | 5A | 28M | 16A | 1A | 21A | 13A | 28M | 17A |
| 3 | 9A | 25M | 13A | 5A | 28M | 10A | 1A | 21A | 6A | 29M |
| 4 | 17A | 9A | 25M | 14A | 5A | 25A | 10A | 2A | 21A | 6A |
| 5 | 29M | 18A | 2A | 25M | 14A | 30M | 18A | 10A | 26M | 15A |
| 6 | 6A | 29M | 11A | 3A | 22A | 14A | 30M | 19A | 10A | 26M |
| 7 | 15A | 7A | 22M | 11A | 3A | 23A | 7A | 30M | 19A | 4A |
| 8 | 26M | 15A | 31M | 20A | 11A | 3A | 16A | 8A | 30M | 19A |
| 9 | 4A | 27M | 15A | 31M | 20A | 12A | 27M | 16A | 8A | 24M |
| | | | | | | | | | | |
| 10 | 12A | 4A | 24A | 9A | 31M | 20A | 5A | 28M | 16A | 8A |
| 11 | 24M | 13A | 4A | 24A | 9A | 1A | 20A | 5A | 28M | 17A |
| 12 | 1A | 21A | 13A | 29M | 17A | 9A | 25M | 14A | 5A | 28M |
| 13 | 10A | 2A | 21A | 6A | 29M | 18A | 9A | 25M | 14A | 6A |
| 14 | 25A | 10A | 2A | 22A | 6A | 29M | 18A | 3A | 25M | 14A |
| 15 | 30M | 19A | 10A | 26M | 15A | 7A | 29M | 11A | 3A | 23A |
| 16 | 14A | 30M | 19A | 11A | 26M | 15A | 7A | 23M | 11A | 3A |
| 17 | 23A | 8A | 30M | 19A | 4A | 27M | 15A | 31M | 20A | 12A |
| 18 | 3A | 16A | 8A | 31M | 19A | 4A | 27M | 16A | 31M | 20A |
| 19 | 12A | 28M | 16A | 8A | 24M | 13A | 4A | 24A | 9A | 1A |
| | | | | | | | | | | |
| 20 | 20A | 5A | 28M | 17A | 8A | 24M | 13A | 5A | 24A | 9A |
| 21 | 1A | 14A | 5A | 28M | 17A | 2A | 21A | 13A | 29M | 18A |
| 22 | 9A | 25M | 14A | 6A | 28M | 10A | 2A | 22A | 6A | 29M |
| 23 | 18A | 3A | 25M | 14A | 6A | 19A | 10A | 2A | 22A | 7A |
| 24 | 29M | 18A | 3A | 26M | 14A | 30M | 19A | 11A | 26M | 15A |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 7A | 23M | 11A | 3A | 23A | 8A | 30M | 19A | 11A | 27M |
| 26 | 15A | 7A | 23M | 12A | 3A | 23A | 8A | 31M | 19A | 4A |
| 27 | 27M | 16A | 31M | 20A | 12A | 28M | 16A | 8A | 31M | 13A |
| 28 | 4A | 27M | 16A | 1A | 20A | 12A | 28M | 17A | 8A | 24M |
| 29 | 13A | 5A | 24A | 9A | 1A | 21A | 5A | 28M | 17A | 2A |
| | | | | | | | | | | |
| 30 | 24M | 13A | 5A | 18A | 9A | 1A | 14A | 6A | 28M | 17A |
| 31 | 2A | 22A | 13A | 29M | 18A | 10A | 25M | 14A | 6A | 22M |
| 32 | 10A | 2A | 22A | 7A | 29M | 18A | 3A | 26M | 14A | 6A |
| 33 | 19A | 11A | 2A | 22A | 7A | 30M | 18A | 3A | 26M | 15A |
| 34 | 30M | 19A | 11A | 27M | 15A | 7A | 23M | 12A | 3A | 23A |
| 35 | 8A | 31M | 19A | 11A | 27M | 16A | 7A | 23M | 12A | 4A |
| 36 | 23A | 8A | 31M | 20A | 4A | 27M | 16A | 1A | 20A | 12A |
| 37 | 28M | 17A | 8A | 31M | 13A | 5A | 27M | 16A | 1A | 21A |
| 38 | 12A | 28M | 17A | 9A | 24M | 13A | 5A | 25A | 9A | 1A |
| 39 | 21A | 6A | 28M | 17A | 2A | 25M | 13A | 5A | 18A | 10A |
| | | | | | | | | | | |
| 40 | 1A | 14A | 6A | 29M | 17A | 2A | 22A | 14A | 29M | 18A |
| 41 | 10A | 26M | 14A | 6A | 22M | 11A | 2A | 22A | 7A | 30M |
| 42 | 18A | 3A | 26M | 15A | 6A | 19A | 11A | 3A | 22A | 7A |
| 43 | 30M | 19A | 3A | 26M | 15A | 31M | 19A | 11A | 27M | 16A |
| 44 | 7A | 23M | 12A | 4A | 23A | 8A | 31M | 20A | 11A | 27M |
| 45 | 16A | 8A | 23M | 12A | 4A | 24A | 8A | 31M | 20A | 5A |
| 46 | 27M | 16A | 1A | 21A | 12A | 28M | 17A | 9A | 31M | 13A |
| 47 | 5A | 28M | 16A | 1A | 21A | 6A | 28M | 17A | 9A | 25M |
| 48 | 13A | 5A | 25A | 10A | 1A | 21A | 6A | 29M | 17A | 2A |
| 49 | 25M | 14A | 5A | 18A | 10A | 26M | 14A | 6A | 29M | 11A |
| | | | | | | | | | | |
| 50 | 2A | 22A | 14A | 30M | 18A | 10A | 26M | 15A | 6A | 22M |
| 51 | 11A | 3A | 22A | 7A | 30M | 19A | 3A | 26M | 15A | 31M |
| 52 | 19A | 11A | 3A | 16A | 7A | 30M | 19A | 4A | 26M | 15A |
| 53 | 31M | 20A | | | | | | | | |

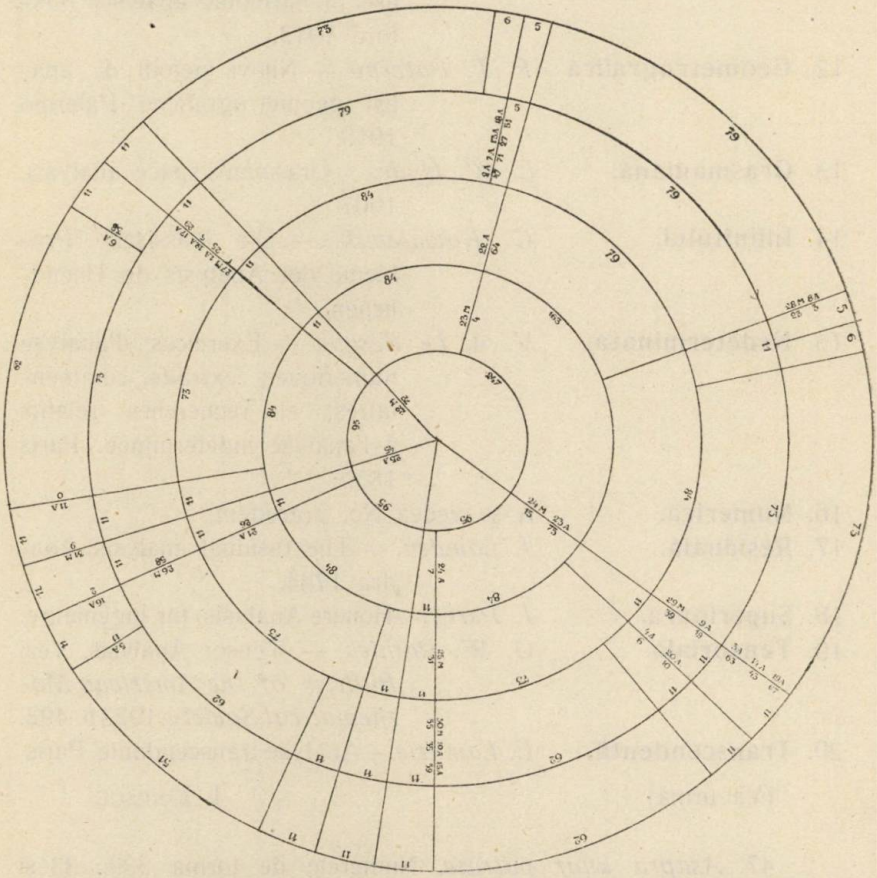
## TABELA No. 2

| DATA stil vechiu | ANII CICLULUI |
|---|---|
| 22 martie | 72 319 414 509 |
| 23 „ | 4 167 251 262 346 357 441 452 |
| 24 „ | 15 99 110 194 205 289 300 384 |
| 25 „ | 31 42 53 126 137 148 221 232 316 395 479 490 |
| 26 „ | 58 69 80 153 164 243 248 327 338 411 422 433 495 506 517 528 |
| 27 „ | 1 12 91 96 175 186 259 270 281 343 354 365 376 438 449 460 |
| 28 „ | 23 28 34 107 118 129 191 202 213 224 275 286 297 308 370 381 392 465 471 476 |
| 29 „ | 39 50 61 123 134 145 156 218 229 240 313 324 403 408 487 498 |
| 30 „ | 55 66 77 88 150 161 172 245 256 335 340 419 430 503 514 525 |
| 31 „ | 9 20 82 93 104 177 183 188 267 272 278 351 362 373 435 446 457 468 519 530 |
| 1 aprilie | 25 36 115 120 199 210 283 294 305 367 378 389 400 462 473 484 |
| 2 „ | 47 52 131 142 215 226 237 299 310 321 332 394 405 416 489 500 |
| 3 „ | 63 74 85 147 158 169 180 231 242 253 264 326 337 348 421 427 432 511 516 522 |
| 4 „ | 6 17 79 90 101 112 174 185 195 269 280 359 364 443 454 527 |
| 5 „ | 11 22 33 44 105 117 128 201 207 212 291 296 302 375 386 397 459 470 481 492 |
| 6 „ | 38 49 60 133 139 144 223 228 234 307 318 329 391 402 413 424 475 486 497 508 |

| DATA stil vechiu | ANII CICLULUI |
|---|---|
| 7 aprilie | 71 76 155 166 239 250 261 323 334 345 356 418 429 440 513 524 |
| 8 „ | 3 8 14 87 98 109 171 182 193 204 255 266 277 288 350 361 372 445 451 456 |
| 9 „ | 19 30 41 103 114 125 136 198 209 220 293 304 383 388 467 478 |
| 10 „ | 35 46 57 68 130 141 152 225 236 315 320 399 410 483 494 505 |
| 11 „ | 0 62 73 84 157 163 168 247 252 258 331 342 353 415 426 437 448 499 510 521 |
| 12 „ | 5 16 95 100 179 190 263 274 285 347 358 369 380 442 453 464 |
| 13 „ | 27 32 111 122 195 206 217 279 290 301 312 374 385 396 469 480 |
| 14 „ | 43 54 65 127 138 149 160 211 222 233 244 306 317 328 401 407 412 491 496 502 |
| 15 „ | 59 70 81 92 154 165 176 249 260 339 344 423 434 507 518 529 |
| 16 „ | 2 13 24 86 97 108 181 187 192 271 276 282 355 366 377 439 450 461 472 523 |
| 17 „ | 29 40 119 124 203 214 287 298 309 371 382 393 404 466 477 488 |
| 18 „ | 51 56 135 146 219 230 241 303 314 325 336 398 409 420 493 504 |
| 19 „ | 67 78 89 151 162 173 184 235 246 257 268 330 341 352 425 431 436 515 520 526 |
| 20 „ | 10 21 83 94 105 116 178 189 200 273 284 363 368 447 458 531 |
| 21 „ | 26 37 48 121 132 216 295 379 390 463 474 485 |
| 22 „ | 64 143 227 238 311 322 333 406 417 428 501 512 |
| 23 „ | 75 159 170 254 265 349 360 444 |
| 24 „ | 7 18 102 113 197 208 292 455 |
| 25 „ | 45 140 387 482 |

Pentru grupul al 3-lea, se intercalează din nou 3 raze, care vor servi şi pentru ultimile 2 grupuri şi aşà mai departe.

De asemenea, şi sensul intervalelor care se succed rămâne în toate grupurile acelaş, identic cu sensul arătătorilor unui ceasornic (dela stânga la dreapta).



In figură, am însemnat pe cercuri numărul anilor intervalului din grup, iar pe raze, data (M însemnează Martie, A = Aprilie) şi dedesubt, anul pentru care avem acea dată. Astfel, dacă voim să ştim cari sunt anii din ciclu, în care prima zi de Paşti cade în ziua de 30 M st. v., ne indică figura că 30 Martie face parte din grupul al 4-lea, adică se repetă de 16 ori în ciclu. Primul an din ciclu este anul 55, urmează apoi în sensul arătătorilor unui ceasornic anul 66 (adică 55 + 11) apoi 77, 88, 150, 161, 172, 245, 256, 335, 340, 419, 430, 503, 514, 525.

MAXIMILIAN MARCUS.

## NOTE MATEMATICE

46. *Alte zece Analise diverse.* (Vezi Nota 32 pag. 210).

| | |
|---|---|
| 11. **Armonică.** | *H. H. Turner.*—Tables for facilitating the use of harmonic analysis. Oxford 1913. |
| 12. **Geometrografică.** | *F. T. Paterno.* — Nuovi metodi di analisi geometrografiche. Palermo 1919. |
| 13. **Grasmaniană.** | *E. W. Hyde.* — Grasman's space analysis, 1907. |
| 14. **Infinitului.** | *C. Kowalewski.* — Die klassische Probleme der Analysis der Unendlichen. |
| 15. **Nedeterminată.** | *V. A. Le Besgue.* — Exercices d'analyse numérique ; extraits, commentaires, et recherches relatifs à l'analyse indéterminée. Paris 1859. |
| 16. **Numerică.** | A se vedeà No. precedent. |
| 17. **Residuală.** | *J. Lamden.* — The residual analysis. Londra 1764. |
| 18. **Superioară.** | *J. Perry.*—Hohere Analysis für Ingenieure. |
| 19. **Tensorială.** | *G. W. Rainich.* — Tensor Analysis. Vezi *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1923 p. 492. |
| 20. **Transcendentă.** | *E. Lamarle.*—Analyse transcendante. Paris. |

(Va urmà) I. Ionescu.

47. *Asupra unor patrate.* Numerele de forma 333....33 şi 999....99, au ca patrate numerele 9; 1089; 110889; 11108889;.... şi 81; 9801; 998001: 99980001;.... Suma cifrelor lor formează o progresie aritmetică începând cu 9 şi având raţia 9.

I. I. Georgescu-Racoviţă.

48. *Suma puterilor asemenea ale termenilor şirului lui* Fibonacci.

Se ştie că avem:

$$u_n = (x^{n+1} - y^{n+1})/\sqrt{5}, \qquad n = (1+\sqrt{5})/2 \qquad y = (1-\sqrt{5})2.$$

Fie S suma a $n$ termeni din şirul lui FIBONACCI, ridicaţi la puterea $p$.

Avem:

$$S(\sqrt{5})^p = (x^2 - y^2)^p + (x^3 - y^3)^p + \ldots + (x^{n+1} - y^{n+1})^p,$$

$$S(\sqrt{5})^p = [x^{2p} + x^{3p} + x^{4p} + \ldots + x^{(n+1)p}] - p[x^{2(p-1)}y^2 + x^{3(p-1)}y^3 + \ldots$$

$$\ldots + x^{(n+1)(p-1)}y^{n+1}] + \frac{p(p-1)}{1.2}[x^{2(p-2)}y^4 + x^{3(p-2)}y^6 + \ldots$$

$$\ldots + x^{(n+1)(p-2)}y^{2(n+2)}] + \ldots + (-1)^p[y^{2p} + y^{3p} + \ldots + y^{(n+1)p}]$$

sau:

$$S(\sqrt{5})^p = \frac{x^{2p}(x^{2p}-1)}{x^p - 1} - p\,\frac{x^{2(p-1)}y^2[x^{n(p-1)}y^n - 1]}{x^{(p-1)}y - 1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p \frac{y^{2p}(y^{2p}-1)}{y^p - 1}.$$

Dând lui $p$ valorile 1, 2, 3, găsim

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1} + \frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right].$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{x^4(x^{2n}-1)}{x^2-1} - 2\frac{x^2y^2(x^ny^n-1)}{xy-1} + \frac{y^4(y^{2n}-1)}{y^2-1}\right].$$

S. WEISS.

49. *Asupra indicatorilor de ordin superior.*

Intr'o mică notă, D-l I. C. VASILIU dela Mănăstirea Dealului, îmi atrage atenţia că:

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^n \varphi_i > N - 1, \text{ unde } \varphi_n = 1,$$

unde $\varphi_i$ este indicatorul de ordinul $i$ al lui N, nu este adevărată.

Da, în adevăr, fie:

$$N = a_0^{\alpha_0}.b_0^{\beta_0}\ldots. \quad ; \quad \varphi_i = a_i^{\alpha_i}.b_i^{\beta_i}\ldots.$$

$$P_i = \prod_0^{n-1}(a_i - 1) \quad \text{şi} \quad Q_i = \prod_0^{i-1} a_i,$$

atunci avem:

$$\varphi_1 = N \cdot \frac{P_0}{Q_0}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \cdot \frac{P_1}{Q_1} = N \cdot \frac{P_0 \cdot P_1}{Q_0 \cdot Q_1}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} \cdot \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = N \cdot \frac{P_0 \cdot P_1 \ldots P_{n-1}}{Q_0 \cdot Q_1 \ldots Q_{n-1}} = 1.$$

Adunând, găsim:

$$\sum_1^n \varphi_i = N\left[\frac{P_0}{Q_0} + \frac{P_0 \cdot P_1}{Q_0 \cdot Q_1} + \ldots + \frac{P_0 \cdot P_1 \ldots P_{n-1}}{Q_0 \cdot Q_1 \ldots Q_{n-1}}\right].$$

Cantitatea:

$$E = \frac{P_0}{Q_0} + \frac{P_0 \cdot P_1}{Q_0 \cdot Q_1} + \ldots + \frac{P_0 \cdot P_1 \ldots P_{n-1}}{Q_0 \cdot Q_1 \ldots Q_{n-1}}$$

poate lua valori şi mai mari şi mai mici ca 1. S'ar părea — după verificări numerice ce am făcut — că:

$$\tfrac{1}{2} < E < 2.$$

(II) Tot D-l I. C. Vasiliu îmi atrage atenţia că:

$$N \leqslant \left(\frac{a \cdot b \cdot c \ldots}{(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}\right)^n$$

nu este adevărat şi, în adevăr, aşà este, deoarece trebue schimbat semnul neegalităţei, adică trebue să avem:

$$N \geqslant \left(\frac{a \cdot b \cdot c \ldots}{(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}\right)^n.$$

Deoarece demonstraţia acestei proprietăţi nu prea este riguroasă, voiu da alta şi iată care:

Imi propun să arăt că:

$$\varphi_1^n \geqslant N^{n-1}.$$

Dar să vedem pentru ce valori ale lui $n$ avem:

$$\varphi_1^x \geqslant N^{x-1}.$$

Inlocuind, avem:

$$a^{(\alpha-1)n} \cdot b^{(\beta-1)n} \ldots (a-1)^n (b-1)^n \ldots \geqslant a^{\alpha(n-1)} \cdot b^{\beta(n-1)} \ldots$$

Sau, simplificând, avem:

$$(a-1)^n\,(b-1)^n\ldots\ldots \geqslant a^{n-\alpha}\,.\,b^{n-\beta}\ldots\ldots$$

ceeace este evident pentru $a>2$, (este permis şi $a=2$ dar nu ca factor singur) şi $n$ fiind mai mare ca oricari din exponenţii $\alpha$, $\beta$,.... Pentru cazul când $x=n$, atunci

$$n=f\ (\alpha,\ \beta,\ldots\ldots).$$

Insă, se poate arătà că: $n\geqslant \alpha+\beta+\ldots\ldots$ şi, în adevăr, fie: $N=\alpha^{\alpha}$, atunci avem:

$$\varphi_1=\alpha^{\alpha-1}.(a-1)$$

$$\varphi_2=\alpha^{\alpha-2}.\varphi(a-1)$$

. . . . . .

$$\varphi_\alpha=\varphi\,[\varphi(\ldots\ldots(a-1)]>1.$$

Deci $\varphi_n>\alpha$. In acelaş mod, se poate arătà şi pentru $N=\alpha^{\alpha}\,.\,b^{\beta}$, etc.... Din verificări numerice, pare că $n$ este o funcţiune lineară de $\alpha$, $\beta$,....

Dacă $n>\Sigma\alpha$, atunci va fi mai mare ca oricari din exponenţi.

Sprijinit pe faptul că $n>\Sigma\alpha$, pot afirmà că putem aveà şi:

$$\varphi_1^{\,n-y}\geqslant N^{n-y-1},$$

cu condiţia ca $n-y$ să fie mai mare ca oricari din exponenţii $\alpha$, $\beta$,.... ai factorilor lui N.

Aceasta m'a făcut să scriu că:

$$\varphi_1^{\,n-1}\geqslant N^{n-2},$$

în anumite condiţiuni.

*Observaţie.* Relativ la prima parte a notei, mai pot adăogà că:

$$P_0/Q_0<E<n\,.\,P_0/Q_0$$

şi prin urmare:

$$\varphi_1<\sum_1^n\varphi_i<n\,.\,\varphi_1$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.
Ecole Supérieure d'Aéronautique, Paris.

50. *Asupra triunghiului automedian. In triunghiul automedian* $b^2+c^2=2a^2$, *simediana vârfului* A *este axa radicală a celor două cercuri ale lui* LEMOINE *ale triunghiului.*

In adevăr, ecuaţiile primului şi al celui al doilea cerc al lui LEMOINE, în coordonate baricentrice, sunt respectiv:

$$\frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\sum\frac{b^2+c^2}{a^2}\alpha,$$

$$\frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\sum\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\alpha.$$

Axa radicală a acestor două cercuri are deci ca ecuaţie

$$\sum\frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2}\alpha=0$$

şi deoarece $b^2+c^2=2a^2$, ea se reduce la

$$(c^2+a^2-2b^2)c^2\beta+(a^2+b^2-2c^2)b^2\gamma=0.$$

Inlocuind, în această ecuaţie, pe $a^2$ prin $\frac{1}{2}(b^2+c^2)$, obţinem

$$c^2\beta-b^2\gamma=0,$$

care este ecuaţia simedianei vârfului A.

ION C. VASILIU.
Elev Cl. VII, Liceul Mânăstirea Dealului.

51. *Asupra teoremei lui* AUBERT.

Se cunoaşte următoarea teoremă a lui AUBERT, remarcabilă prin aceea că constitue o generalizare a teoremei lui PASCAL*):

«Dacă două triunghiuri ABC, A'B'C' înscrise într'o conică sunt homologice şi se ia un punct I pe conică, punctele de întâlnire $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a dreptelor BC şi IA', CA şi IB', AB şi IC' sunt situate pe aceeaşi dreaptă L, ce trece prin centrul de homologie D».

Voiu deduce teorema lui AUBERT din următoarea teoremă a D-lui VISSCHERS **):

«O transversală *t* întâlneşte laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu ABC în punctele $M_1, M_2, M_3$ şi înălţimile $AH_1, BH_2, CH_3$ în punctele $N_1, N_2, N_3$. Fie $P_1, P_2, P_3$ mijloacele segmentelor $M_1N_1$, $M_2N_2$, $M_3N_3$. Dreptele $H_1P_1$, $H_2P_2$, $H_3P_3$ concură într'un punct Q al cercului celor nouă puncte a triunghiului ABC».

---

*) A se vedeà: ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, deuxième partie, pag. 455.

**) A se vedeà: *Mathesis* 1922, pag. 291, question proposée 1995.

Ținând seamă că vârfurile unui triunghiu ABC sunt picioarele înălțimilor triunghiului, ce are ca vârfuri centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, putem enunța chestiunea de mai sus sub forma:

O dreaptă $t$ întâlnește bisectoarele exterioare ale unui triunghiu ABC în $M_1, M_2, M_3$ și pe cele interioare în $N_1, N_2, N_3$. Fie $P_1, P_2, P_3$ mijloacele dreptelor $M_1N_1$, $M_2N_2$, $M_3N_3$. Dreptele $AP_1$, $BP_2$, $CP_3$ concură într'un punct al cercului circumscris triunghiului ABC.

Considerând cazul particular, când dreapta $t$ trece prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC, punctele $N_1, N_2, N_3$ se confundă cu I. Dacă notez cu A', B', C' mijloacele arcelor BC, CA, AB ale cercului ABC, mijloacele $P_1, P_2, P_3$ ale dreptelor $IM_1$, $IM_2$ și $IM_3$ sunt situate pe laturile triunghiului A'B'C'; deci pot enunța:

A', B', C' fiind mijloacele arcelor BC, CA, AB ale cercului ABC și I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, o dreaptă ce trece prin I taie laturile triunghiului A'B'C' în $P_1, P_2, P_3$, astfel că dreptele $AP_1$, $BP_2$ și $CP_3$ concură într'un punct al cercului ABC.

Reciproca acestei teoreme este următoarea:

Fie I' un punct arbitrar al cercului ABC, A', B', C' fiind mijloacele arcelor BC, CA, AB dreptele I'A, I'B, I'C taie respectiv laturile B'C', C A' și A'B' în trei puncte colineare $P_1, P_2, P_3$ situate pe o dreaptă ce trece prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC.

Aplicând acum figurei o proecție conică oarecare, cercul se proectează după o conică, iar triunghiurile ABC, A'B'C' devin două triunghiuri homologice înscrise în conică și am obținut deci teorema lui AUBERT.

MICU GRÜNBAUM.

52. *Asupra problemei* 3217 (pag. 232). In nota dela soluția acestei probleme, s'a spus că expresia, care face obiectul acestei probleme, subsistă, cu o modificare de semne, și în cazul când triunghiul considerat are un unghiu obtuz.

In adevăr, să presupunem că unghiul A este obtuz. Ortocentrul H fiind exterior triunghiului ABC, avem

$$\text{aria}BHC - \text{aria}CHA - \text{aria}AHB = \text{aria}ABC$$

și urmând aceeași cale ca la prima soluție dată problemei la pag. 232, găsim formula

$$\sqrt{(\cos B+\cos C+\sin A)(\cos B+\cos C-\sin A)(\cos B+\sin A-\cos C)(\cos C+\sin A-\cos B)}$$
$$-\sqrt{(\cos B+\sin C-\cos A)(\cos B+\sin C+\cos A)(\cos A+\cos B-\sin C)(\cos A+\sin C-\cos B)}$$
$$-\sqrt{(\cos C+\sin B-\cos A)(\cos C+\sin B+\cos A)(\cos A+\sin B-\cos C)(\cos A+\cos C-\sin B)}$$
$$=2\sin A\sin B\sin C.$$

Obţinem expresii analoage în cazul când unghiul B sau C ar fi obtuz.

DAN POPOVICIU-PUIU (Chişinău),
VALERIU MANAFU (M-rea Dealului).

53. *Definirea funcţiunilor de variabilă complexă.*

In teoria funcţiunilor, se studiază mai cu seamă funcţiuni definite prin anumite proprietăţi, cum sunt, spre exemplu, continuitatea, uniformitatea, analicitatea, aceste proprietăţi având loc numai în anumite regiuni din plan, anumite domenii de existenţă ale funcţiunilor. Considerarea funcţiunei în afară de domeniul ei de existenţă nu are niciun sens. Este deci necesar să definim funcţiunea de care ne ocupăm în mod precis şi complet şi nu ne este permis, în decursul unei demonstraţiuni, să împrumutăm alte calităţi funcţiunei noastre, de cât acelea ce sunt consecinţe ale ipotezelor făcute.

Aşà, spre exemplu, fie C cercul cu centru în origine şi de rază egală cu unitatea şi să considerăm funcţiunea $f(a+z)$, unde $a$ este o constantă. Presupunem această funcţiune olomorfă pentru $z$ situat pe cercul C şi în interiorul sau, precum şi continuă şi periodică pentru valorile reale ale lui $z$, perioada fiind $2r$.

Dacă însemnăm

$$\varphi(z)=f(a-i\operatorname{Log} z),$$

reese imediat, din ipotezele făcute, că funcţia $\varphi(z)$ este uniformă şi continuă pentru $z$ situat pe cercul C căci, în acest caz,

$$-i\operatorname{Log} z=\theta+2k\pi.$$

$\theta$ fiind argumentul lui $z$ şi $k$ un întreg arbitrar.

Putem vedeà, cu uşurinţă, că funcţiunea $\varphi(z)$ este olomorfă numai pentru o determinare a logaritmului, domeniul de olomorfie având cu cercul C numai o mică regiune comună. In adevăr, $\rho$ şi $\omega$ fiind modulul şi argumentul lui $z$, vom aveà

$$\varphi(z)=f(a-u+iv),$$

unde

$$u = \log \rho, \quad v = \omega + 2k\pi, \quad (-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi).$$

Pentru ca funcţia $\varphi(z)$ să fie olomorfă, va trebui ca punctul $(u, v)$ să fie în interiorul cercului C, deci

$$(\log \rho)^2 + (\omega + 2k\pi)^2 \leqslant 1.$$

Ceeace ne arată că va trebui să luăm $k = 0$, precum şi

$$-1 \leqslant \omega \leqslant 1$$

$$1/i \leqslant \rho \leqslant e.$$

Aşà dar, domeniul în care funcţiunea $\varphi(z)$ este olomorfă, este situat în regiunea R din plan, cuprinsă între cele două drepte ce trec prin origine şi fac cu $Ox$ unghiuri egale cu un radian şi între jumătăţile de cerc din dreapta axei $Oy$ concentrice cu C şi de raze egale cu $e$ şi $1/e$.

Prin urmare, asupra funcţiunei $\varphi(z)$ în interiorul cercului C, nu ştim altceva decât ca ea este olomorfă într'un mic domeniu situat în partea comună a regiunei R cu cercul C (1).

A. Angelescu.

# CHESTIUNI DE EXAMEN

## FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ.

*Seziunea octomvrie 1924.*

### TEORIA FUNCŢIUNILOR.

*(Partea II).*

I. Să se arate că ecuaţia

$$\cos z + \lambda \sin z = 0,$$

unde $\lambda$ e un număr real, nu are rădăcini imginare.

II. Se consideră o funcţiune $f(z)$ olomorfă în interiorul unui sector S. Luând integrala lui $f(z)$ dealungul conturului $OABO_1$ să se deducă formula:

$$\int_0^r \left[ (f(x) - e^{i\varphi} f(xe^{i\varphi}) \right] dx = -ri \int_0^{\varphi} f(re^{i\theta}) e^{i\theta} \, d\theta$$

$$OA = OB = r.$$

(1) Afirmaţiunea ce am făcut în nota 45, din numărul precedent, este deci complet justificată.

*Aplicație:* Luând $f(z) = e^z$ să se deducă, efectuând integrala primului membru, că

$$\int_0^{\varphi} e^{r\cos\theta} \sin(\theta + r\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{r}\left[ e^r - e^{r\cos\varphi} \cos(r\sin\varphi) \right].$$

III. Să se calculeze, cu ajutorul rezidurilor, integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+k^2+1)^2 - 4k^2x^2},$$

$k$ fiind un număr real și pozitiv.

## ASTRONOMIA.

Găsindu-mă pe pământ, într'un loc necunoscut și dispunând de un cronometru care ne dă ora siderală exactă a meridianului de origine, am constatat că, la un anume moment, trei stele, ale căror coordonate ecuatoriale sunt cunoscute, se găsesc toate la aceeași distanță zenitală, însă nu am putut-o măsură.

Se cere stabilirea formulelor de calcul pentru determinarea coordonatelor geografice ale locului și a distanței zenitale comună celor trei stele.

II. Se cere ora siderală la care răsare o stea de coordonate ecuatoriale

$$\alpha = 43^0\ 25'\ 10'', \quad \delta = 32^0\ 26'\ 20''$$

într'un loc de latitudine $\varphi = 18^0$, știind că la orizont refracția are valoarea

$$36'\ 36''.$$

# RECENSII.

David Emmanuel. — *Lecțiuni de teoria funcțiunilor.* Partea I. Curs profesat la Facultatea de Științe din București. (Cultura Națională. Un volum în 8⁰ de 406 pagini).

Domnul David Emmanuel, bătrânul și veneratul nostru profesor, a dat astăzi publicității cursul său de Teoria Funcțiunilor, pe care-l profesează la Facultatea de Științe din București de peste 30 ani. Am parcurs lucrarea, dela început pânăla sfârșit, cu atenția încordată și nu pot ascunde emoția care mă cuprindeà la fiecare capitol, care îmi aminteà de vârsta adolescenței mele, timpurile frumoase de acum 25 ani, când se încrustau pentru întâia oară în

mintea mea cunoştiinţele acestea minunate, care mi-au întărit şi mai mult pasiunea pentru Ştiinţele Matematice.

Cartea are 23 capitole. In primele 6 capitole, autorul prezintă o substanţială reluare a noţiunilor fundamentale din analiza algebrică, în legătură cu variabila complexă. Primul capitol tratează despre variabila reală, unde sunt precizate noţiunile de limită, şir, continuitate şi domeniu, care urmează a fi generalizate pentru variabila complexă în capitolele III şi IV. Capitolul II conţine o expunere succintă a teoriei grămezilor de puncte, faimoasa teorie a lui KANTOR, încetăţenită în România de autor. In sfârşit, capitolele V şi VI expun calculul cu seriile întregi, dominat de teorema lui WEIERSTRASS şi introduce noţiunea de punct singular, în înţelesul complex al cuvântului.

Odată aceste preliminare terminate, autorul intră în studiul propriu zis al materiei. In capitolul VII, se introduce noţiunea de funcţiune analitică monogenă, iar capitolele următoare VIII — IX expun proprietăţile generale ale funcţiunilor uniforme, oprindu-se în special asupra funcţiunilor raţionale, întregi şi meromorfe.

Autorul are, astfel, prilejul să stabiliască teorema lui LIOUVILLE, să generalizeze teorema fundamentală a Algebrei şi să învedereze, prin câtevà proprietăţi generale utile ale funcţiunii întregi, abisul care există între raţional şi transcendent.

Capitolul IX are factură cu totul modernă. El dă indicaţiuni asupra funcţiunilor cu o infinitate de puncte singulare şi autorul introduce seria lui TANNERY, egală cu 0 în interiorul unui cerc şi cu 1 în afară, pentru a da exemple edificatoare asupra diferenţei esenţiale, care există între noţiunea de funcţiune analitică şi diversele sale expresiuni în domeniile de existenţă ale funcţiunei. Autorul dă exemple simple, — cu ajutorul seriei $\Sigma a_n /(x - c_n)$, mult utilizată de POINCARÉ — de funcţiuni care au linii de singularităţi esenţiale, sau chiar regiuni lacunare.

Capitolul X este un mic cap de operă în materie, prin simplitatea şi alegerea metodelor expozitive ale proprietăţilor funcţiunei exponenţiale şi ale funcţiunilor circulare connexe. Acest capitol este completat de capitolul XI, unde este tratată funcţiunea logaritmică, dar între aceste două capitole, autorul ne dă o expunere simplă a suprafeţelor lui RIEMANN, în cazul când funcţiunea algebrică este definită printr'o ecuaţie binoamă.

Cu capitolul XIII înainte, intrăm în teoria lui CAUCHY.

Teoria lui CAUCHY prezintă dificultăţi de expunere, desigur cu mult mai mari decât teoria lui WEIERSTRASS. Limitată la domeniul complex, ea se compune din teoremele fundamentale ale lui CAUCHY, din teoria reziduurilor şi studiul funcţiunilor deduse prin integrare complexă, precum şi din inversiunea acestora. Aceste trei părţi sunt expuse pedagogic şi cu destule detalii în capitolele XIV, XVII şi XIX. Dar teoria lui CAUCHY este connexă şi cu teoria lui RIEMANN, adică cu studiul funcţiunilor armonice. Autorul a socotit util să ne dea câtevă informaţiuni şi asupra acestor funcţiuni, consacrând un capitol special, capitolul XV asupra proprietăţilor funcţiunilor armonice. Este o întrebare dacă această intercalare ajută la structura cursului şi la asimilarea materiei, sau dacă nu lasă în mintea studentului, o indeciziune, care poate fi dăunătoare acelei siguranţe a cunoştiinţelor, care ajută mult la valoarea «dinamică», adică la cercetări personale.

Capitolul XVI, afară de teorema lui LAURENT, dă câtevă aplicaţiuni de desvoltări în serii de FOURIER, serie de polinoame, desvoltări după APELL, POINCARÉ, etc. Socotesc, de asemenea, că aceste chestiuni pot fi trecute ca exerciţii, fiindcă nu fac parte din armătura cursului.

Capitolul XVIII trateată în mod interesant despre inversiunea seriilor, transformarea conformă şi prelungirea analitică, unde teorema lui SCHWARZ pune ordine şi precizează rezultatele.

Un capitol special, bine scris, despre funcţiunile întregi, este capitolul XXI, după care, în capitolul următor, se expune teorema lui MITTAG-LEFFLER cu aplicaţiuni. Ultimul capitol, care ar fi trebuit poate, sau suprimat, sau scris la început şi exemplificat cu cazurile de transformări lineare utilizate în curs, strică puţin unităţii cursului, căruia îi este exterior.

Tipărirea cursului este făcută în condiţiuni excelente; corectura lasă însă mult de dorit. Cu toată citirea mea rapidă din acest punct de vedere, semnalez la capitolele XIII, erori la pag. 215 (rândul 10), la cap. XIV eroare la pag. 223 (rândul 3), la pag. 225 (două erori), la pag. 230 (rândul 1 şi 24), la pag. 234, 235, etc.

Ca redactare, cartea se aseamănă cu uvrajele clasice ale lui JORDAN şi PICARD, deşi astăzi genul „Goursat", care pune în evidenţă armătura şi lasă în capitole de exerciţii chestiunile secundare,

ar fi făcut lectura şi mai atrăgătoare şi mai profitabilă. Redactarea este foarte clară, pe alocurea cam concisă; relevez aliniatele 2 şi 3 din paragraful 155 (pag. 122), care ar puteà fi suprimate, fiind neclare şi inutile. Asemenea obscurităţi trebue evitate, fiindcă pot aduce multe neplăceri studenţilor serioşi, cari nu trec mai departe, dacă nu înţeleg tot ce-au citit până atunci; sunt un fel de singularităţi, care limitează cercul de înţelegere deplină a materiei.

Cursul D-lui D. EMMANUEL este lucrarea unui spirit luminat, clar şi profund, care a ştiut să facă o fericită sintesă între operele, deopotrivă de puternice, ale lui CAUCHY şi WEIERSTRASS, din domeniul funcţiunilor complexe.

A înţelege pe WEIERSTRASS şi a cădeà robit de frumuseţea ordinei, pe care concepţiile simple şi fundamentale ale acestui mare clasic au introdus-o în studiul funcţiunilor analitice, este lucrul cel mai firesc pentru orice matematician, iubitor desinteresat al Ştiinţei sale. Dar a luminà o expunere a teoriei lui WEIERSTRASS cu facla ştiinţei franceze şi a introduce, la timpul potrivit, instrumentul puternic analitic, care este integrala lui CAUCHY şi a da astfel cititorului cheia ştiinţei profesate, după ce i-a indicat cadrele generale, aceasta nu o poate face decât un om, care s'a gândit adânc asupra acestor lucruri, un profesionist al teoriei funcţiunilor, un om care şi-a consacrat viaţa pentru a înţelege şi propăvădui o frumuseţe elementară a vieţii omeneşti. Nu sunt din acei, cari întrebuinţează cu uşurinţă verbul înaripat, pentru a-mi exprimà sentimentele mele; dar ori decâte ori mi se opreşte gândul asupra acestor minunate creaţiuni ale minţii omeneşti, sufletul mi se încălzeşte de nobilul sentiment al jertfei pentru ştiinţă şi de adânca simpatie pe care mi-o inspiră puritanii acestui ideal.

TR. L.

## BIBLIOGRAFIE.

**Bulletin dela Section scientifique de l'Académie roumaine.** Anul IX No. 3—4. Bucureşti 1924. Asupra unei forme a teoremei creşterilor finite, de D. POMPEIU. Asupra înclinării orbitelor cometelor, de V. G. SIADBEY.

**Idem.** No .4—5. Asupra unei note a D-lui O. ONICESCU, asupra zerorilor lui $\xi(s)$ de V. VÂLCOVICI. Asupra unei teoreme a sâmburilor simetrisabili, de T. LALESCU.

**Mathesis.** Volumul XXXIX. No. 2. Fevruarie 1925 Bruxelles. Deslegarea ecuaţiei de gradul IV după SIMON STEVIN, de H. BOSMANS. Asupra cardiodiei şi a patrulaterului complet, de R. DEAUX. Note de geometrie analitică plană de AD. M.

**Buletinul de Ştiinţe matematice pure şi aplicate.** Publicat de *Societatea română de ştiinţe.* Anul XXVI August — Decemvrie 1924. Bucureşti. Asupra sâmburilor simetrici, de P. SERGESCU, (in limba franceză). Aproximaţiunea funcţiunilor de o variabilă reală printr'o clasă de sume trigonometrice, de V. ALAGI (in limba franceză). Asupra axiomei algebrei, de G. SUDAN.

**Journal de mathématiques élémentaires,** par H. VUIBERT — Anul 49. No. 11. Martie 1925. Paris.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul V. No. 1. Martie 1925. Timişoara. Discuţia ecuaţiilor de gradul III şi IV, de N. CIORĂNESCU.

**Foaia Matematică.** Anul II No. 3. Martie 1925. Chişinău. Premii pe 1925. Câtevà propietăţi intr'un triunghiu, de I. C. VASILIU. Asupra unor chestiuni de maximum şi minimum, de I. A. SCHÄCHTER.

**Curierul matematic.** (Litografiat). Vol. I. No. 1. Martie 1925. Bucureşti. Revistă matematică lunară publicată de I. FÂNTÂNEANU, N. BOTEA, O. BOLGIU. Abonamentul pe anul 1925—1926 este de 50 lei şi se trimete D-lui LEON BRÜLL, Strada Călugei 18, Bucureşti. Sumarul primului număr este: Cuvânt inainte de I. FÂNTÂNEANU, O. BOLGIU, N. BOTEA. Proprietăţi în legătură cu triunghiul pedal, de O. BOLGIU. Asupra isopolului, de N. G. BOTEA. Asupra produsului numerelor formate dintr'o sumă de două patrăte, de I. FÂNTÂNEANU. Note matematice. Probleme propuse.

**Revista ştiinţifică.** „V. ADAMACHI". Volumul XI. No. 2. Februarie 1925 la şi

P. SERGESCU. *Un probléme sur les compositions des noyaux syimetriques.* Extras din *„Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj"*, Volumul II. Ianuarie 1925. Cluj.

J. NEUBERG. *Sur les cubiques de Darbou*
Extras din *„Annales de la Société scientifique de Bruxelles"* No. 18. Decemvrie 1924.

## CERERI.

121. Există în vreo bibliotecă de la noi *Annales de Gergonne?*

L. WEISS.

122. Care sunt actualmente cele mai practice rigle de calcul?

D. C. SCHILERU.

# PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2097. *Să se demonstreze că curbura medie a suprafeței:*

$$(1) \qquad ax^4 + by^4 = cz^4$$

*este identic nulă în toate punctele intersecției sale cu suprafața:*

$$(2) \qquad abx^2y^2z^2 + c(ax^2 + by^2)z^4 = a^2x^6 + b^2y^6 .$$

ST. N. MIREA.

Soluțiune dată de D-nii: ȘERBAN GHEORGHIU și GH. D. ROȘIANU. Suprafața definită de ecuațiunea (1) fiind un con (desfășurabilă) are una din razele de curbură principală infinită. Condițiunea problemei cere ca și cea d'a doua rază de curbură principală să fie infinită, ceeace cu notațiunile cunoscute ale lui MONGE pentru derivatele parțiale, cere să avem:

$$(3) \qquad (1 + p^2)t + (1 + q^2)r = 2pqs.$$

Din (1), deducem:

$$p = \frac{ax^3}{cz^3}, \; q = \frac{by^3}{cz^3}, \; r = \frac{3abx^2y^4}{c^2z^7}, \; s = -\frac{3abx^3y^3}{c^2z^7}, \; t = \frac{3abx^4y^2}{c^2z^7},$$

valori care înlocuite în ecuațiunea (3), ne conduc la ecuațiunea (2). c. c. e. d. d.

*Notă.* Un calcul imediat arată că intersecțiunea suprafețelor (1) și (2) e constituită din două drepte.

Angajem pe cititorii noștri să dea o soluțiune geometrică chestiunei, fiind dată particularitatea cazului.

ST. N. M.

PROBLEMA 2459. *Ce relație trebue să existe între unghiurile* A, B, C, D, *pentru a avea relația*

$$\Sigma \cos^2 A + \cos^2(A + B) + \cos^2(A + C) + \cos^2(B + C) + 4\cos A \cos B \cos C \cos D = 3.$$

ADRIAN VLĂDESCU.

Soluție dată de D-nul Octav Onănescu, Inginer, Galați.

Relația dată se poate scrie, ordonând-o în raport cu cosD:

$$\cos^2 D + 4\cos A \cos B \cos C \cos D + \cos^2(A+B) + \cos^2(B+C) + \cos^2(C+A) - \sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = 0.$$

Dar, după *Culegere de Probleme, Trigonometria*, V, 2, avem identitățile:

$$\cos^2(A+B) - \sin^2 C = \cos(A+B+C)\cos(A+B-C),$$

$$\cos^2(B+C) - \sin^2 A = \cos(A+B+C)\cos(B+C-A),$$

$$\cos^2(C+A) - \sin^2 B = \cos(A+B+C)\cos(C+A-B),$$

astfel că relația propusă se poate scrie:

$$\cos^2 D + 4\cos A \cos B \cos C \cos D + (\cos A + \cos B + \cos C)[\cos(B+C-A) + \cos(C+A-B) + \cos(A+B-C)] = 0.$$

Dar, tot după *Culegere de Probleme, Trigonometria*, VII, 25, avem identitatea

$$\cos(B+C-A) + \cos(C+A-B) + \cos(A+B-C) = 4\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C),$$

astfel că relația de mai sus devine:

$$\cos^2 D + 4\cos A \cos B \cos C \cos D + \cos(A+B+C)[4\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C)] = 0.$$

Rezolvând această relație în raport cu cosD, obținem:

$$\cos D = -2\cos A \cos B \cos C \pm \sqrt{[2\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C)]^2}$$

$$\therefore \quad \cos D = -2\cos A \cos B \cos C \pm [2\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C)].$$

Dacă luăm în partea a doua semnul plus, avem

$$\cos D = -\cos(A+B+C),$$

de unde obținem relația căutată între unghiuri:

$$A + B + C \pm D = (2k+1).180^0.$$

Dacă luăm în partea a doua semnul minus, avem

$$\cos D = \cos(A+B+C) - 4\cos A \cos B \cos C,$$

care nu ne dă o relație explicită între unghiuri, decât pentru unele valori particulare ale lui A, B, C.

PROBLEMA 3040. *Se consideră o linie plană, frântă,* $A_0A_1 \ldots A_n$ *şi un mobil* M, *care o parcurge dela* $A_0$ *la* $A_n$. *Se consideră, deasemenea, sistemul de forţe având poziţia în plan şi mărimea determinate de segmentele* $A_0A_1$, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, *al căror sens este sensul de parcurs al mobilului* M.

*Să se studieze poziţia rezultantei acestor forţe, în raport cu linia de închidere* $A_0A_n$.

*Aplicaţie, în cazul când linia poligonală* $A_0A_1 \ldots A_n$ *tinde către un arc de cerc cu un unghiu la centru oarecare.*

CRISTEA MATEESCU.

Soluţie dată de D-l ALEX. I. GUŢU (Iaşi).

Rezultanta sistemului de forţe $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}, \ldots \overline{A_{n-1}A_n}$ se reprezintă printr'un vector echipolent cu vectorul $\overline{A_0A_n}$.

Pentru a află distanţa rezultantei R de acest vector, să aplicăm teorema momentelor faţă de un punct oarecare O din planul forţelor. Momentul forţei $\overline{A_{i-1}A_i}$ fiind egal cu dublul ariei triunghiului $OA_{i-1}A_i$, avem:

$$\mathfrak{M}_0 R = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_0 A_{i-1}A_i = 2 \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\, OA_{i-1}A_i .$$

Aria $OA_{i-1}A_i$ se consideră — prin convenţie — pozitivă dacă, parcurgând conturul triunghiului $OA_{i-1}A_i$ în sensul indicat de vectorul $A_{i-1}A_i$, aria rămâne la dreapta; negativă, dacă aria rămâne la stânga. Dar suma algebrică a ariilor triunghiurilor $OA_{i-1}A_i$, defineşte aria închisă de poligonul $OA_0A_1 \ldots A_n$, deci:

$$\mathfrak{M}_0 R = 2 \text{ aria}\, OA_0A_1 \ldots A_n .$$

Dacă punctul O se află chiar pe laturea $A_0A_n$, iar $d$ este distanţa dela rezultanta R la linia de închidere $A_0A_n$, avem

$$d = 2 \frac{\text{aria}\, A_0A_1 \ldots A_n}{\overline{A_0A_n}} .$$

*Discuţie.* 1. Dacă aria $A_0A_1 \ldots A_n$ este nulă, rezultanta sistemului este în poziţie, mărime şi sens $A_0A_n$.

2. Dacă poligonul $A_0A_1 \ldots A_n$ este închis, iar aria $A_0A_1 \ldots A_n$ diferită de zero, sistemul de forţe se reduce la un cuplu, egal cu îndoitul acestei arii.

3. Dacă poligonul se închide şi aria mărginită de el este nulă, sistemul de forţe este în echilibru.

*Aplicaţie.* In cazul unui arc de cerc, de rază $r$ şi unghiu la centru $2\alpha$ se găseşte lezne: $R = 2r\sin\alpha$, $d = r\alpha/\sin\alpha$.

O soluţie incompletă s'a primit dela D-l Ovidiu Popea.

---

PROBLEMA 3100. *Un tun trage un proectil cu 1000 m/sec. In cât timp acest proectil va parcurge o distanţă orizontală de 1000 m.?*

Căpitan I. Linteş.

Soluţie dată de D-l Ştefan Lăzărescu (Giurgiu).

In vid, avem ecuaţiile:

$$1)\qquad \begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

care reprezintă coordonatele unui proectil tras de un tun cu o viteză iniţială $v_0$ şi cu un unghiu de tragere $\alpha$.

Inlocuim, în aceste două ecuaţii, pe $x = 1000$ m., $y = 0$ m. şi $v_0 = 1000$ m/sec. şi avem sistemul:

$$2)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = 1/t \\ 2000\sin\alpha = gt. \end{cases}$$

Sau:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{1}{t^2} + \frac{g^2t^2}{4.10^6} = 1.$$

Deci, din ecuaţia:

$$3)\qquad \frac{1}{t^2} + \frac{g^2t^2}{4.10^6} = 1,$$

scoatem valoarea lui $t$.

Obţinem:

$$t = \pm\sqrt{2.10^3 \cdot \frac{10^3 \pm \sqrt{10^6 - g^2}}{g^2}}.$$

Vom lua însă numai soluţiile pozitive, care sunt două, una pentru *traectoria normală* şi alta pentru *traectoria complimentară*.

Calculând, găsim:

$$t_1 = 1{,}4 \text{ sec. aprox.}$$
$$t_2 = 204 \text{ sec.}$$

*Notă.* 1) Soluţiuni, care merită a fi numai menţionate ca început al raţionamentului, au fost trimise de D-nii: E. Russu şi Popescu Dorin şi fac această menţiune deoarece probleme de această natură se întâlnesc mai rar în coloanele Gazetei.

2) D-l Popescu Dorin, schiţează chiar un mod de a rezolvà, în cazul când rezistenţa aerului nu se neglijează. In acest caz însă, problema intră în domeniul pur artileristic, deci devine puţin interesantă pentru corespondenţi. Mă voiu mărgini a spune însă că, în aer, avem:

$$t_1 > 1{,}4 \text{ sec.}$$

$$t_2 > 204 \text{ sec.}$$

Bazat pe ecuaţiile:

$$x = v_0 t\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma t^2\cos\theta$$

$$y = v_0 t\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma t^2\sin\theta - \tfrac{1}{2}t^2(g - \gamma'),$$

unde $\gamma' = (\lambda\cos\theta + 1)\gamma$, ce am stabilit în „G. M.", No. 11, din anul trecut, pot menţionà că problema în aer, s'ar puteà rezolvà înlocuind în aceste ecuaţii:

$$x = 1000, \quad y = 0, \quad v_0 = 1000, \quad \theta = -\alpha, \quad \gamma = c.\,F(v),$$

care, pentru *prima aproximaţie*, ne poate da rezultate satisfăcătoare practicei.

Căpitan I. Lintes.

---

PROBLEMA 3176. *Fie* O *şi* I *centrul cercului circumscris şi al cercului înscris unui triunghiu* ABC, $A_m$ *mijlocul laturei* BC *şi* $\varphi$ *punctul lui* Feuerbach. *Să se demonstreze că* $\varphi A_m$ *şi perpendiculara dusă din* $A_m$ *pe* OI *formează un triunghiu isoscel cu bisectoara (interioară sau exterioară) unghiului* A.

M. Grünbaum.

Soluţie şi *generalizare* dată de D-l B. M. Barbălatt (Elev al Liceului Codreanu, Bârlad).

Fie $\Delta$ directoara şi F focarul unei parabole (P) conjugată cu triunghiul ABC, $A_m$, $B_m$, $C_m$ mijloacele laturilor BC, CA, AB. Zicem că *dreapta* $FA_m$, *perpendiculara dusă din* $A_m$ *pe* $\Delta$ *şi una din bisectoarele unghiului* BAC *formează un triunghiu isoscel.*

In adevăr, în virtutea unei proprietăţi a parabolelor, parabola (P), fiind conjugată cu triunghiul ABC, este inscrisă în triunghiul $A_m B_m C_m$ complimentarul lui ABC. Deci, după o proprietate a pa-

rabolelor înscrise într'un triunghiu*), rezultă că dreapta $FA_m$ și perpendiculara dusă din $A_m$ pe directoara $\Delta$ sunt drepte isogonale în raport cu unghiul $B_m A_m C_m$ și, prin urmare, vor formă triunghiuri isoscele cu bisectoarele unghiului A, care sunt paralele cu bisectoarele unghiului $A_m$.

Când $\Delta$ este dreapta OI, iar F punctul lui FEUERBACH $\varphi$, atunci parabola (P) devine parabola ($\varphi$.OI) care se știe că e conjugată cu ABC și avem chestiunea propusă de D-l M. GRÜNBAUM.

Din cele expuse, se vede că axa parabolei (P), dreapta $FA_m$ și bisectoarele unghiului A, formează triunghiuri isoscele cu vârfurile în F.

D-nii: ION C. VASILIU și PAUL I. IONESCU au rezolvat bine problema, cu ajutorul coordonatelor baricentrice.

---

PROBLEMA 3184. *Când* $n^n!$ *se termină cu* $n+1$ *zerouri?*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

I. Soluție dată de D-l M. ADAM (Lc. Constanța).

Fie, în general, de găsit numărul $n$, pentru care $n^\alpha!$ se termină cu

$$n^{\alpha-1}+n^{\alpha-2}+\cdots+n+1$$

zerouri. Aceasta revine la a căutà când $n^\alpha!$ admite factorul 5 la puterea cea mai mare egală cu

$$n^{\alpha-1}+n^{\alpha-2}+\cdots+n+1.$$

Fie

$$n=5+x \qquad \text{și} \qquad n^\alpha!=(5+x)^\alpha!$$

Insemnând, după notația lui LEGENDRE, prin E(I) numărul întregilor cuprinși în I și știind că cea mai mare putere a lui 5, cuprinsă în $n^\alpha!$ este $\sum_1^\alpha n^\alpha/5^i$, atunci trebue să avem

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=\alpha} E\left[\frac{(5+x)^\alpha}{5^i}\right]=\sum_{i=1}^{i=\alpha}(5+x)^{i-1}.$$

*) Tangentele TM, TM' duse dintr'un punct exterior T la o parabolă, fac unghiuri egale cu dreapta TF, care unește punctul T cu focarul F al parabolei (ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, deuxième partie, pag. 333).

In general, avem

$$(5+x)^\alpha = (5+x)^{\alpha-i}(5+x)^i .$$

Dar formula binomului dă

$$(5+x)^i = 5^i + xf(x),$$

aşă că

$$\frac{(5+x)^\alpha}{5^i} = (5+x)^{\alpha-i} + \frac{x(5+x)^{\alpha-i}}{5^i} f(x),$$

iar (1) devine

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} (5+x)^{\alpha-i} + \sum_{i=1}^{i=\alpha} \mathrm{E}\left[\frac{x(5+x)^{\alpha-i}}{5^i} f(x)\right] = \sum_{i=1}^{i=\alpha} (5+x)^{i-1}$$

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{i=\alpha} \mathrm{E}\left[\frac{x(5+x)^{\alpha-i} f(x)}{5^i}\right] = 0,$$

care are loc numai pentru

$$x = 0 \qquad \text{şi} \qquad x = -5,$$

ceeace dă soluţiile:

$$n = 5 \qquad \text{şi} \qquad n = 0,$$

din care numai prima verifică atât problema generală cât şi problema 3184.

II. Soluţie dată de D-nii: S. Weiss (Lc. Galaţi) şi O. Popea (Chişinău).

Fie

$$\mathrm{E}(n^2/5) = \mathrm{A}_1 \quad , \quad \mathrm{E}(\mathrm{A}_1/5) = \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{E}(\mathrm{A}_{p-1}/5) = \mathrm{A}_p .$$

Cea mai mare putere a lui 5, cuprinsă în $n^2!$, fiind $\Sigma \mathrm{A}_i$, ecuaţia problemei este

$$(1) \qquad \sum_{1}^{p} \mathrm{A}_i = n + 1.$$

Deosebim 2 cazuri.

I. Dacă $\mathrm{A}_1 < 5$, atunci (1) dă neapărat

$$n + 1 = \mathrm{A}_1 \quad , \quad \text{deci} \quad n^2/5 \geqslant n + 1,$$

de unde, ţinând seamă că $n$ este pozitiv, se deduce $n \geqslant 5$.

II. $\mathrm{A}_1 > 5$. Din (1), se scoate

$$(2) \qquad n + 1 = \mathrm{A}_1 + \alpha \qquad \text{şi} \qquad \alpha \geqslant 1.$$

Prin definiție, avem însă

(3) $$n^2/5 = A_1 + \beta \quad \text{și} \quad \beta < 1.$$

Din (2) și (3), se deduce

$$n^2/5 < n + 1 \qquad \therefore \quad n^2 - 5n - 5 < 0,$$

sau, de oarece $n$ este pozitiv,

$$0 < n \leqslant 5{,}8.$$

Rezultatele cazului I și II dau, pentru $n$, limitele

$$5 \leqslant n \leqslant 5{,}8,$$

de unde soluția $n = 5$.

III. Soluție dată de D-l O. Schächter.

Conform problemei 3213, rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXX, pag. 231, cel mai mare exponent $\alpha$ al unui număr prim $a$, cuprins în N, este dat de

$$N/a \leqslant \alpha \leqslant N/(a-1).$$

Inlocuind aici pe N prin $n^2$, pe $a$ prin 5 și pe $\alpha$ prin $n+1$, se găsește

$$n^2/5 \leqslant n + 1 \leqslant n^2/4,$$

care dă, pentru $n$ pozitiv, limitele

$$2 + \sqrt{8} \leqslant n \leqslant 5{,}8,$$

de unde soluția $n = 5$.

*Observațiuni.* 1°. Au găsit soluția exactă a problemei, D-nii: N. Arcadian, N. Botea, G. David, M. Drăghicean, M. Georgescu, I. Grigorescu, P. Ionescu, S. Katz, E. Pălărieru, Corneliu Popescu, G. Simionescu, G. Stroescu, G. Tailer și I. Vasiliu.

2°. Au găsit că $n^2!$ nu se termină niciodată cu $n$ zerouri, D-nii: M. Adam, C. Ciorănescu, D. Iliescu, P. Ionescu, O. Popea.

3°. Problema 3213, pe care se bazează soluția III, este ulterioară problemei 3184.

4°. Soluția II este redijată după D-l S. Weiss.

---

PROBLEMA 3251. *Intr'un tratat vechiu de măsuri și greutăți, găsesc următoarele:*

*«Stogul, un volum de fân, care are 8 stânjini peste cap și 9 împrejur la bază sau burta cea mare».*

*Câți stânjini cubi are un stog? Se va presupune că stogul este conic, sau jumătatea de jos cilindrică și cea de sus conică. Studenții și elevii-ingineri vor presupune că generatoarea este o parabolă.*

I. Ionescu.

1. *Stogul conic.* Fie un con circular drept cu vârful V, generatoarea AV și având O centrul cercului de bază. Punem OA=$x$, OV=$y$, și notăm cu V volumul conului. După enunț, avem:

$$2AV = 2\sqrt{x^2+y^2} = 8, \qquad 2\pi.\overline{OA} = 2\pi x = 9.$$

De aci, scoatem necunoscutele $x$ și $y$:

$$x = 9/2\pi, \qquad y = \sqrt{16-x^2} = \sqrt{64x^2-81}/2\pi.$$

Avem, prin urmare:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi x^2 y = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \frac{81}{4\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{64\pi^2-81}}{2\pi},$$

$$V = \frac{27}{8} \cdot \frac{\sqrt{64\pi^2-81}}{\pi^2} = 27\frac{\sqrt{\pi^2-1{,}265625}}{\pi^2}.$$

Luând $\pi^2 = 9{,}8696044\ldots$ găsim:

$$V = 8{,}02\ldots$$

Deci stogul are 8 stj.$^3$ de fân, cu o eroare de $2\%$ — $3\%$.

2. *Stogul cilindro-conic.* Fie VC [illegible]atoarea conului, CA a cilindrului. Fie $x$ razele de bază ale cilindrului și conului și $\frac{1}{2}y$ înălțimea fiecăruia dintr'ânșii. După enunț, avem:

$$2\pi x = 9, \qquad 2\left(\tfrac{1}{2}y + \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2+x^2}\right) = 8.$$

A doua ne dă succesiv:

$$y + \sqrt{4x^2+y^2} = 8,$$

$$4x^2+y^2 = (8-y)^2 = 64-16y+y^2,$$

$$y = (16-x^2)/4.$$

Avem apoi:

$$V = \pi x^2 . \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}\pi x^2 . \tfrac{1}{2}y = \tfrac{2}{3}\pi x^2 y.$$

Inlocuind $x$ și $y$ prin valorile lor, găsim

$$V = \tfrac{2}{3}\pi \cdot \frac{81}{4\pi^2}\left(16 - \frac{81}{4\pi^2}\right)\frac{1}{4} = \frac{27}{32} \cdot \frac{64\pi^2-81}{\pi^3}$$

$$V = 54\,\frac{\pi^2 - 1{,}265625}{\pi^3}.$$

Luând $\pi^2 = 9{,}8696044....$ și $\pi^3 = 31{,}006277....$ găsim:

$$V = 14{,}98....$$

Deci stogul are aproape 15 stj.$^3$ de fân, cu o eroare prin adaos de $1\%$ — $2\%$.

S'ar puteà pune chestiunea cum ar trebui repartizată înălțimea stogului la cilindru și la con, așà ca volumul să fie cel mai mare posibil. Fie $u$ înălțimea conului și $v$ a cilindrului, așà că $y = u + v$.

După enunț, avem:

$$2(v + \sqrt{u^2 + x^2}) = 8, \qquad 2\pi x = 9.$$

$$v = 4 - \sqrt{u^2 + x^2}.$$

Apoi avem:

$$V = \pi x^2 v + \tfrac{1}{3}\pi x^2 u = \frac{\pi x^2}{3}(3v + u),$$

$$V = \frac{\pi x^2}{3}(12 + u - 3\sqrt{u^2 + x^2}).$$

Chestiunea se reduce la a găsi maximum lui $(u - 3\sqrt{u^2 + x^2})$, când $u$ variază. Punem:

$$z = u - 3\sqrt{u^2 + x^2},$$

$$9(u^2 + x^2) = (u - z)^2 = u^2 - 2uz + z^2,$$

$$8u^2 - 2uz + 9x^2 - z^2 = 0,$$

$$u = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - 72x^2 + 8z^2}}{8},$$

$$u = \frac{-z \pm 3\sqrt{z^2 - 8x^2}}{8}.$$

Se vede că $u$ este real, dacă $z < -2\sqrt{2}\,x$ sau $z > 2\sqrt{2}\,x$. Primei valori îi corespunde un maximum, care ne dă:

$$V = \frac{\pi x^2}{3}(12 + z) = \frac{\pi x^2}{3}(12 - 2\sqrt{2}\,x),$$

și înlocuind $x$ cu valoarea lui, avem:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{81}{4\pi^2}\left(12 - 2\sqrt{2}\,\frac{9}{2\pi}\right) = \frac{81}{4} \cdot \frac{4\pi - 3\sqrt{2}}{\pi^2}$$

și punând $\pi = 3{,}1415927$, găsim

$$V = 17{,}07.$$

Deci volumul creşte numai cu 2 stj.$^3$ aproximativ. Aceasta se întâmplă dacă:

$$u = -z/8 = 2\sqrt{2}\,x/8 = x\sqrt{2}/4 = 0{,}506,$$

$$v = 4 - \sqrt{u^2 + x^2} = 4 - \sqrt{\frac{8x^2}{8} + x^2} = 4 - \frac{3x\sqrt{2}}{4} = 2{,}48.$$

Deci cilindrul are $2\frac{1}{2}$ stânjeni înălţime, iar cercul numai $\frac{1}{2}$ stânjeni aproximativ. Raportul înălţimilor este aproximativ 5.

I. I.

Au rezolvat problema, cu rezultatele indicate, D-nii:

L. M. Brüll (8,04 şi 47); Al. Mladenovici (3,26 şi 4,86); P. Bleiweiss (25,44 şi 15,02); N. G. Botea (8,15 şi 15,64); T. Stoicescu (8,02 şi 16,07); S. Katz (7,98 şi 14,89); R. I. Spatty (17,18 şi 34,37); C. Popovici (159,07 şi necalculat); I. C. Vasiliu (8,03 şi necalculat); N. Georgescu (8,45 şi 16,56); R. Boroş (8,45 şi 16,56); C. I. Istinie (17,11 şi nefăcut); H. Scripcă (17,16 şi 33,06); I. I. Iliuţă (8,02 şi nefăcut).

*Notă.* Tabloul precedent arată marea lipsă de atenţiune ce se dă la calculele numerice!

(Va urmà) I. I.

## EXERCIŢII

62. Să se afle patratele perfecte de forma *abcd*, la care *cd* şi *bc* sunt patrate perfecte, iar *a* este cub perfect.

Constantin Th. Ionescu-Bujor.

R. *cd* poate fi 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Consider numai pe acelea cu a căror primă cifră se poate termină un patrat, deci 16, 49, 61.

*bcd* este 816, 649, 164, 364, 016, 049. $a = 1{,}8$

Găsesc pentru *abcd* 1816, 1649, 1164, 1364, 1016, 1049, 8816, 8649, 8164, 8364, 8016, 8049. Soluţia este $8649 = 93^2$.

63. Dacă $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, atunci:

$$4(z-y)(t-z) + 3(t-z)^2 + 2(y-x)(t-z) - (y-x)^2$$

este patrat perfect.

O. M. Schächter.

R. Punem:

$$y = x + a, \quad z = y + b, \quad t = z + c.$$

Condiţia dată şi polinomul dat P, devin:

$$2x^2+2(a-c)x+a^2-c^2-2ac-2bc=0$$

$$P = 4bc+3c^2+2ac-a^2.$$

Imulţim prima cu 2 şi adunăm cu a doua. Găsim:

$$P = 4x^2+4(a-c)x+(a-c)^2$$

$$P = (2x+a-c)^2.$$

64. Se cere un patrat de cinci cifre, aşă că suma cifrelor rădăcinii lui să fie numărul format de ultimele două cifre.

D. I. Solomon.

R. Rădăcina este intre 100 şi 320. Dintre ultimele două cifre ale patratelor care dau cel mult suma $2+9+9=20$, sunt 00; 01; 04; 09; 16. Nu putem lua 00, căci suma cifrelor rădăcinii e cel puţin 1; nu putem lua 01, căci numai 100 are suma cifrelor 1, dar patratul lui nu se termină cu 01; nu putem lua 04, căci rădăcina s'ar termină cu 2 sau cu 8 şi nu am puteà lua decât rădăcina 112, care dă patratul terminat cu 44. Dacă patratul se termină cu 09, valoarea se termină cu 3 sau 7 şi ar puteà fi 153; 243; 117, dintre care numai primul dă patrat terminat cu 09. Dacă patratul se termină cu 16, rădăcina se termină cu 4 sau 6 şi nu puteà fi decât 286 al cărui patrat nu se termină cu 16.

Singura soluţie este $23409 = 153^2$.

## PROBLEME PROPUSE

3281. In urma schimbării Calendarului ortodox, cu Paştele rămas după vechile norme, vom mai aveà totdeauna Postul Sfinţilor Apostoli? Vor mai cădeà totdeauna Sfinţii 40 Mucenici în postul Paştelui?

I. Ionescu.

3282. Se cere patratul de cinci cifre, având primele patru, sau ultimele patru cifre, consecutive.

N. Teodorescu.

3283. Dacă $x$, $y$, $z$, sunt sume de două patrate, $xyz$ se poate desface în patru moduri în sumă de două patrate.

C. I. Ciorănescu.

3284. Fie D, E, F, punctele de contact ale cercului înscris într'un triunghiu ABC cu laturile BC, CA, AB, I centrul cercului, P un punct oarecare de pe bisectoara AI. Dreptele PB, PC întâlnesc laturile DE și DF în punctele M și N. Să se demonstreze că:

1. Dreapta MN are o direcție fixă;

2. Există pe AI o poziție a lui P astfel ca punctele M, N și analoagele lor să fie șease puncte conciclice.

N. Blaha.

3285. Fie $A', B', C'$, intersecțiile bisectoarelor interioare ale unghiurilor unui triunghiu ABC cu cercul circumscris triunghiului, $A_1, B_1, C_1$ mijloacele segmentelor $AA'$, $BB'$, $CC'$, $A_b$, $A_c$ picioarele perpendicularelor scoborîte din $A'$ pe laturile AB și AC și $B_a$, $B_c$, $C_a$, $C_b$ punctele analoage. Să se demonstreze că:

1) Punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$ sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A_b A_c A'$, $B_c B_a B'$, $C_a C_b C'$.

2) Centrul cercului $A_1B_1C_1$ este mijlocul dreptei, care unește centrul cercului circumscris cu centrul cercului înscris triunghiului ABC.

Max Bernstein.

3286. Dacă $m$ și $s$ sunt punctele în care mediana $AA'$ și simediana $AA_1$ a triunghiului ABC întâlnesc cercul O, circumscris triunghiului, atunci cercurile $mA'O$ și $sA'O$ sunt egale între ele.

Locot.-Col. Gh. Buicliu.

3287. Fie $f(x)$ un trinom de gradul II. Să se determine trei valori $x_1$, $x_2$, $x_3$, în progresie aritmetică, astfel ca să avem:

$$\frac{2}{f(x_2)} = \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_3)}.$$

CĂPITAN GR. ZAPAN.

3288. Să se rezolve sistemul:

$$C_5^2\alpha \cdot x_1 + C_4^1 \cdot x_2 = 0$$
$$C_5^3\alpha^2 \cdot x_1 + C_4^2\alpha \cdot x_2 + C_3^1 \cdot x_3 = 0$$
$$C_5^4\alpha^3 \cdot x_1 + C_4^3\alpha^2 \cdot x_2 + C_3^2\alpha \cdot x_3 + C_2^1 \cdot x_4 = 0$$
$$C_5^5\alpha^4 \cdot x_1 + C_4^4\alpha^3 \cdot x_2 + C_3^3\alpha^2 \cdot x_3 + C_2^2\alpha \cdot \alpha x_4 + C_1^1 \cdot x_5 = 0.$$

Să se generalizeze.

ERNEST ABASON.

3289. Să se rezolve ecuația

$$\sin 5x \cos^5 x + \cos 5x \sin^5 x - \tfrac{1}{2} \sin 2x(5 - 7\sin^2 2x) = 0.$$

VIRGIL COȘNIȚĂ.

3290. Un film de cinematograf este adus, spre a fi proectat, înfășurat strâns pe o grosime de 22 cm., pe un rulou, al cărui diametru este de 8 cm. Proecțiunea se face cu o iuțeală de 20 imagini pe secundă și o imagine ocupă o lungime de film de 5 cm. Prin proectare, filmul se desfășoară automat de pe ruloul pe care a fost adus și se înfășoară pe un altul, al cărui diametru este de 12 cm. Știind că grosimea filmului este de două zecimi de milimetru, se întreabă:

1. Ce lungime are filmul?
2. Cât durează proecția?
3. Pe ce grosime se înfășoară filmul pe al doilea rulou?
4. Care sunt vitezele unghiulare ale celor două rulouri, după 10 minute de proectare?

GEORGE BORNEANU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Arcadian N.* (2610); *Bleiweiss P.* (3248, R); *Blumen M.* (3218); *Borș P. Dan* (3265); *Botea N.* (3254, 56, 66); *Călin M. Gh.* (3266); *Cohn H.* (3263); *Cristea Gr. P.* (P); *David Gh.* (N); *Dorneanu V.* (3235, 54, 56, 65, 66); *Drâmbă N. C.* (3248); *Florea A.* (3229, 43); *Foca I.* (3212, 48, R); *Gaiu Em.* (3266); *Gelber M.* (P); *Georgescu E.* (3243); *Georgescu V.* (3243); *Georgescu-Racoviță I. I.* (3167, 78, 266, E, R); *Giurumescu C.* (3229, 43); *Grabowski E.* (3266); *Grünstein M.* (3218, 48); *Hartular G.* (3265, 74); *Iacob Eug.* (2895, 929, 3222, 66); *Iliescu St. Dima* (3218, 66, P); *Iliuță I.* (R); *Ionescu Th. Bujor A.* (3222); *Ionescu Longin* (2610); *Katz S.* (2895); *Knapp R.* (R); *Marcovici H.* (3271, R); *Miu I.* (N); *Mladenovici A.* (3271, 77); *Nagy Sz. Iuliu* (P); *Pătroianu M.* (3236, 80, R); *Pazko Wilhelm* (3236); *Popa I.* (3229); *Popea O.* (3277, N); *Popescu N. Corneliu* (2610, 3266, 71); *Popescu I. Spirea* (3167); *Popovici A.* (3248); *Popovici C.* (3229); *Popoviciu P. Dan* (3144, 67, 78, 266); *Popovici M.* (3243); *Rabinovici H.* (3266); *Reinhorn A. B.* (3218, 22, 48, 66, 80); *Roșu Al.* (3234, 65, R); *Scripcă L.* (3218, 22, 66); *Segal L.* (3245, N); *Simionescu D. G.* (3271); *Stoica A.* (2610, 929, 3248, 66, 80); *Tailer G.* (3263); *Tăraș Vasile* (3248, 66, 77); *Tauber A.* (3243); *Teodorescu N.* (3271); *Tunaru R. Tr.* (3248, 66); *Vârlan V.* (3243, 65, R); *Vasiliu G. G.* (P, R); *Vasiliu C. I.* (3167, 78, 246, 71, 80); *Velea Gr. M.* (3266); *Vlădea I.* (3248, 66).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2091, 191, 320, 81, 431, 631, 40, 43, 61, 74, 82, 706, 820, 79, 946, 71, 72, 78, 80, 91, 3031, 84, 92, 93, 100, 02, 04, 13, 31, 62, 73, 84, 90, 91, 95, 200, 03, 19, 20, 21, 28, 29, 33, 37, 38, 39, 42, 43, 58, 59, 62, 63, 68, 69, 72, 73 și 76 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

## Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

### 29 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme (Epuizată).

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

Dna Asociatiunea pentru cultura
si Literatura poporului Român
Din Sibiu

# GAZETA MATEMATICĂ

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 9. — MAI 1925.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

## SUMARUL

1. Rezultatul Concursului Gazetei Matematice din anul 1925. . . . . *G. Țițeica.*
2. Chestiunea Calendarului. (urmare) . . . . . *C. D. Orășanu.*
3. Premiul „Inginer H. Capriel".
4. Note Matematice: 54—61.
5. Bibliografii.
6. Cereri: 123.
7. Chestiuni de examen.
8. Probleme rezolvate: 2138, 2471, 2961, 3055, 3060, 3175, 3234, 3265.
9. Exerciții: 65—67.
10. Probleme propuse: 3271, 3291—3300.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 132

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny**, Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **Gh. Em. Filipescu**, Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu**, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 92, 94, 208, 20, 26, 28, 30, 32, 38, 40, 49, 55, 57, 58, 60, 62, 68, 69, 70, 72, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 84, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 300.

Avem plăcerea a anunţà că dela 11 fevruarie a. c. fac parte din Societatea noastră şi D-nii: **Ing. E. Mircea** şi **Col. Gr. Protopopescu.**

# REZULTATUL CONCURSULUI GAZETEI MATEMATICE DIN ANUL 1925.

Concursul Gazetei Matematice, ale cărui efecte ştiinţifice şi chiar educative sunt mai presus de orice îndoială, îşi lărgeşte acţiunea, care, se poate zice, se întinde acum dela Nistru pânăla Tisa, în realitate dela Chişinău pânăla Arad. Spre bucuria noastră, numărul candidaţilor din Ţinuturile realipite creşte.

Cu toate greutăţile materiale, care apasă asupra tutulor, concursul Gazetei s'a ţinut şi anul acesta în condiţii materiale bune şi într'o atmosferă favorabilă. Colegul nostru, D-l LALESCU, a intervenit şi a obţinut reducerea de 75% pe C. F. R. şi a achitat personal restul de 25%. Direcţia Fabricii de Chibrituri, adică colegii noştrii, D-nii: MALCOCI şi ILIESCU, au organizat admirabil, până în cele mai mici amănunte, întreţinerea candidaţilor, precum şi toată partea materială a concursului. Colegul nostru, D-l G. THIERRIN, a primit în Institutul său pe elevii cari n'aveau gazdă în Capitală. In fine, probele scrise şi orale ale concursului s'au ţinut în sălile noi ale laboratorului de Căldură şi Gravitate, pus la dispoziţie, cu multă bunăvoinţă, de D-l profesor BUNGEŢIANU. Le aducem tutulor mulţumirile noastre călduroase şi le exprimăm recunoştinţa noastră.

In cernerea prealabilă, care se face între candidaţii înscrişi, au fost aleşi să se prezinte la concurs 39 candidaţi. Dintre aceştia, s'au prezentat efectiv 32, dintre care unul n'a putut fi primit, deoarece a declarat că e pregătit numai la o singură materie. Dintre cei absenţi, patru au scris din vreme, sau au telegrafiat că sunt împiedicaţi de a lua parte la concurs. Ceilalţi trei, cari nu s'au prezintat n'au trimes, pe nicio cale, niciun fel de motivare. Ne miră mai ales faptul că doi dintre ei sunt într'o şcoală, unde ştiam că se pune oarecare greutate pe educaţie. In fine, dintre candidaţii cari s'au prezentat, doi s'au retras după probele scrise.

Comisiunea de examinare a fost compusă din D-nii: G. ZAPAN, pentru Aritmetică; O. ŢINO, pentru Geometrie; T. ANGHELUŢĂ, pentru Algebră; Loc. Colonel LITEANU, pentru Trigonometrie; CL. MITITELU, pentru Mecanică; G. NICHIFOR, pentru Geometria Descriptivă şi I. VASILESCU, pentru Geometria Analitică. Bine înţeles, ca de obicei, la probele orale au pus chestiuni şi alţi membri ai Societăţii Gazeta

Matematică, dintre cei cari au urmărit probele concursului şi anume dintre D-nii: E. Abason, C. Mateescu, I. Chiţulescu, V. Cristescu, G. Dumitrescu, Colonel Felix, G. Iliescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu şi G. Ţiţeica.

Rezultatul concursului e cevà mai slab ca cel de anul trecut, deşi, luat în întregimea lui, e bun. Candidaţii reuşiţi au, anul acesta, norocul să obţină şi o răsplată materială. Un membru al societăţii Gazeta Matematică, care nu vrea să i se cunoască numele, a dăruit 10.000 lei pentru premii. O parte se va distribui în cărţi anul acesta. La cărţile cumpărate, se mai adaugă câtevà broşuri dăruite de *Cultura Naţională* prin D-l Onicescu, şi altele de D-l I. Ionescu, din publicaţiunile D-sale.

1. Ca şi anul trecut, locul întâi e cucerit de candidatul din Arad. D-l T. Udrisky, elev în cl. VII-a la liceul Moise Nicoară, din Arad, s'a distins şi prin lucrările sale scrise foarte bune şi prin răspunsurile limpezi şi precise. Şi la Geometria descriptivă şi la Algebră, D-l Udrisky a dat dovadă de cunoştinţe serioase şi de judecată bună. I se acordă ca premiu *Algèbre* (2 vol.) de Niewenglowski şi *Principes de géométrie pure et appliquée* de M. d'Ocagne, precum şi *Calculul algebric* de T. Lalescu, şi *Nomografia şi Lucrările publice la Romani sub Impăratul Traian* de I. Ionescu.

2. In locul al doilea, D-l Ioan Vasiliu, elev în cl. VII la Mânăstirea Dealului, a strălucit mai mult la oral decât la scris, dând răspunsuri foarte bune la Geometria Descriptivă şi dovedind uşurinţă de calcul, înţelegere repede şi bună orientare în studiul funcţiunilor la Algebră. I se dau ca premiu volumele: *Algèbre* de Comberousse şi *Géométrie analytique* de Papelier, precum şi *Exerciţii de Mecanică* de Abason şi *Maşinile de calcul* de I. Ionescu,

3. In rândul al treilea, şi foarte puţin deosebit de cel precedent, vine D-l C. Ionescu-Bujor, elev în clasa VI-a la liceul Cantemir-Vodă din Capitală, pentru lucrarea scrisă foarte bună şi răspunsurile orale iarăşi foarte bune la Trigonometrie, precum şi pentru probele bune scrise şi orale la Algebră. I se dau ca premii: *Exercices de géométrie* de F. J. şi *Principes de géométrie moderne* de E. Duporcq, precum şi *Calculul algebric* de T. Lalescu şi *Un nou metod pentru studiul Trigonometriei plane* de I. Ionescu.

4. Al patrulea premiant e D-l C. Ciorănescu, elev în clasa VIII-a la Mânăstirea Dealului, pentru lucrarea scrisă foarte bună de Geometria

Analitică şi pentru celelalte probe scrise şi orale bune. I se dau ca premiu volumele: *Mechanik (Aufgaben)* de WITTENBAUER şi *Mathématiques générales* de VOGT, precum şi *Distanţele cereşti* de G. DEMETRESCU şi *Momente statice polare* de I. IONESCU.

5. In al cincelea loc, vine D-l CORNELIU POPESCU, elev în clasa V-a la liceul Ioan Maiorescu din Giurgiu, pentru răspunsurile sale foarte bune, care promit şi acoper oarecare lacune dela probele scrise. I se dau ca premiu: *Mécanique* de PAPELIER şi *Trigonométrie* de C. BOURLET, precum şi un volum din colecţia revistei de popularizare ştiinţifică *Natura*, şi *Comparaţia rădăcinilor ecuaţiilor de gradul II* (2 vol.) de I. IONESCU.

6. In rândul al şaselea, vine D-l OSIAS SCHÄCHTER, elev în clasa VI-a la liceul Comunităţii israelite din Galaţi, pentru rezultatele foarte bune dela Algebră şi bune la Trigonometrie. I se dau ca premiu volumele: *Sections coniques* de SALMON şi *Géométrie Descriptive* de PAPELIER, precum şi *Distanţele cereşti* de G. DEMETRESCU şi *Geometrografia* de I. IONESCU.

7. Locul al şaptelea îl ocupă D-l MARIUS GEORGESCU, elev în clasa VII-a la liceul Internat din Iaşi, pentru răspunsurile orale foarte bune la Algebră şi lucrarea scrisă destul de bună la Mecanică. I se acordă ca premiu volumele: *Mécanique* (pentru liceu) de APPEL şi *Géométrie* de GUICHARD, precum şi *Exerciţii de Mecanică* de ABASON şi *Momente statice absolute* de I. IONESCU.

8. In locul al optulea, e D-l IOAN MIU, elev în clasa VI-a la liceul Ioniţă Assan din Caracal, pentru probele bune de Trigonometrie şi destul de bune de Algebră. I se dau ca premiu cărţile: *Géométrie* de HADAMARD şi Algèbre de PAPELIER, precum şi un volum din colecţia revistei de popularizare ştiinţifică *Natura* şi *O dedicaţie a unui matematician Neapolitan către Alexandru Ypsilante* de I. IONESCU.

Dintre ceilalţi candidaţi, cari nu sunt premianţi, sunt unii cari merită o menţiune specială şi anume: în rândul întâi, D-l TR. ANGELESCU, pentru lucrarea scrisă şi răspunsurile orale la Algebră, apoi D-nii: L. WEISS, pentru răspunsurile orale la Geometria analitică şi Algebră, D. BLUMENFELD, pentru Geometria Analitică şi G. CĂLIN, pentru lucrarea scrisă de Aritmetică.

Ajuns la capătul acestei dozări de calificare, potrivită, pe cât cu putinţă, cu rezultatele probelor scrise şi orale ale candidaţilor, trebuie să recunosc că expunerea mea nu poate redă, nici pe departe, mulţimea

şi varietatea cunoştinţelor, sforţările şi preocupările candidaţilor, precum şi întreaga atmosferă de încredere a concursurilor Gazetei. In această atmosferă fără pretenţie se plămădesc viitorii noştrii ingineri, viitorii profesori şi viitorii oameni de ştiinţă.

G. Ţiţeica.

## CHESTIUNEA CALENDARULUI*).

(Urmare).

Chestiunea determinărei cu precizie, atât a echinoxului, cât şi a fazelor lunare, prezentă la acea epocă, oare care dificultăţi, tocmai din cauza calendarului, care nu erà în concordanţă perfectă cu firmamentul. Pe lângă aceasta, dificultăţile erau sporite din următoarele cauze:

1. Pe suprafaţa globului, avem în fiecare moment o dată dublă, a cărei limită de separaţie este trasată prin meridianul care dă ora 12 noaptea.

2. Din cauza adăogirei unei zile în luna februarie, în anii bisecstili, echinoxul oscilează între două date.

3. Determinarea fazelor lunare se făceà cu ajutorul ciclului de 19 ani lunari, descoperit de geometrul grec Meton, în jumătatea a doua a secolului al V-lea a. c., şi se credeà că Ciclul Metonian conţineà un număr rotund de lunaţiuni, şi anume 235 lunaţiuni, fiecare de 29 zile şi jumătate.

O dată astronomică exactă presupune nu numai calcule astronomice precise, dar şi un meridian regulator acceptat de toţi. Prevederile astronomice din secolul IV-lea erau bazate însă numai pe observaţiuni, care ori cât de minuţioase ar fi fost, suferiau din cauza nepreciziei instrumentelor; calculele exacte ale mecanicei cereşti — care formează baza astronomiei moderne—erau lucruri necunoscute pe vremea aceea, iar chestiunea meridianului regulator nici nu fusese pusă vreo dată.

Determinarea lunei pline, care cade după echinoxul de primăvară, sau odată cu el, nefiind o operaţiune prea uşoară, a făcut pe astronomii din Roma şi cei din Alexandria, cari de mult timp erau

*) Vezi G. M. pag. 201, anul XXX.

în ceartă în privința lunei pascale, să apară în Sinodul dela Niceia în complet dezacord. Astronomii din Roma admiteau ca pascală luna plină chiar din 18 Martie, pe când cei din Alexandria nu admiteau ca luna pascală să fie înainte de 21 Martie.

In privința limitei celei mai depărtate pânăla care trebuia sărbătorit Paștele, Constituția Apostolică fixase limita prin următoarele cuvinte: «Să însemnați zilele săptămânei pascale, care se sfârșește a 21 zi a lunei Nisan, pentru ca Duminica Paștelui să nu treacă niciodată peste cele 7 zile, care urmează zilei a 14». Cum ziua de 21 a lunei Nisan corespundeà cu 9 Aprilie stil vechi, Constituția apostolică fixase deci limita cea mai depărtată a Paștelui pentru ziua de 9 Aprilie stil vechi.

Sfinții părinții, cari veniseră la Niceia să înfăptuiască unirea tuturor creștinilor în ceeace privește sărbătorirea Paștelui, aveau sub ochii lor spectacolul dezacordului între astronomii Romei și asupra primei limite a lunei pline pascale, adică asupra datei eclisiastice a echinoxului.

Consiliul declară precis că nu voește să intre în nicio discuțiune pentru a vedeà de care parte este mai mult dreptatea, dar majoritatea fiind de partea bisericei occidentale, au decretat că și minoritatea, care erà formată din orientali și quatrodecimani, să sărbătorească Paștele după felul cum sărbătoriau bisericile Romei și Alexandriei, adică toate bisericile creștine să serbeze Paștele în prima Duminică după luna plină ce ar cădeà cu echinoxul de primăvară sau imediat după el. Această deciziune au luat-o cu unicul scop al acordului tuturor bisericilor, căci aceasta erà esențialul. Mai mult încă, cunoscând reputația școalei din Alexandria, Consiliul a avut ideià de a însărcinà biserica din Alexandria să remită în fiecare an concluziile astronomilor asupra Lunei pascale la sediul papal din Roma, care apoi, la rândul său, să le transmită mai departe lumii întregi creștine.

Faptul că acest consiliu a însărcinat pe astronomi să comunice regulat calculele lor la Sediul Papal, este dovada voinței consiliului ca totdeauna calendarul eclesiastic să fie de acord cu firmamentul.

Astronomii colegiului din Alexandria au arătat consiliului că echinoxul de primăvară, în anul acela, cădeà la 21 Martie. Consiliul, după cum spune Sfântul Ambrozie, a luat act despre aceasta, invocând practica savanților (Secundum consuetudinem peritorum)

fără însă să bănuiască vreo schimbare, şi a admis sărbătorirea Paştelui în prima Duminică după luna plină ce urmează datei de 21 Martie.

Admiterea, în calendarul Iulian, a unei zile fixe (21 Martie), dela care trebuià să se socotiască luna plină pascală, însemnează introducerea unei erori, care aveà să îndepărteze Sărbătoarea Paştelui de data prescrisă de Sf. Sinod de la Niceia. In adevăr, SOSIGENE se înşelase în aprecierea lungimei anului cu 11m, 12s, 5 ceeace face o zi la 128 de ani şi jumătate. Această diferenţă de o zi la 128,5 ani mergeà crescând, şi cu ea echinoxul se depărtà de ziua de 21 Martie, iar creştinii sărbătoriau Paştele după luna plină dela 21 Martie, iar nu după luna plină dela echinox, căci aceste două date 21 Martie şi echinoxul, după 128 de ani şi jumătate, nu mai coincideau. Suntem deci în faţa unei abateri dela prescripţiunile Sinodului dela Niceia, căci nu mai sărbătorim Paştele după echinox. Aceasta este prima abatere.

Pe lângă aceasta, Părinţii Bisericei, adunaţi în consiliul dela Niceia, au fixat serbătoarea Paştelul legând-o de o fază lunară, ori fazele lunare erau date de ciclul de 19 ani lunari, de ciclul Metonian, care se credeà că conţine un număr rotund de lunaţiuni şi anume 235 lunaţiuni, fiecare executată în timp de 29 zile şi jumătate. Astăzi este cunoscut că ciclul Metonian nu este perfect exact. Diferenţa cu care mişcarea Lunei anticipează mişcărei solare, în timp de 19 ani, este de aproape o oră şi jumătate ceeace face aproximativ o zi la 308 ani. Aşà că, dacă Luna plină pascală ar cădeà într'un an la echinoxul de primăvară, după 308 ani ar cădeà cu o zi mai devreme, deci trebue conform prescripţiunilor formulate la Niceia să se aştepte luna plină următoare, care este pascală.

Ce făceau însă astronomii timpului şi cu ei părinţii bisericei? In loc să urmărească cu sfinţenie pe cer mersul Lunei, pentru a anunţà cu exactitate pe viitor Luna pascală, ei priviau ca sfinte greşelile lui METON şi anunţau existenţa Lunei pline — după care trebuia sărbătorit Paştele — la o dată când nu era Luna plină şi atunci bieţii pravoslavnici creştini când îşi îndreptau ochii rugători spre cer, constatau că Luna plină anunţată era ştirbită. Suntem deci în faţa unei abateri noi dela prescripţiunile consiliului dela Niceia, căci trebueşte să sărbătorim Paştele după Luna plină pascală şi noi nu o facem.

Pentru ca să punem în evidenţă, mai precis, mărimea erorii, vom lua exemplul citat de Domnul profesor COCULESCU, în tratatul său de astronomie:

Să presupunem că, într'un an, avem lună plină într'o Duminică ce cade chiar în ziua echinoxului. Această Lună, conform prescripţiunilor Sinodului dela Niceia, este pascală şi deci Paştele urmează să fie sărbătorit în Dumineca următoare. Astronomii ne dau poziţiunea echinoxului la 8 Martie stil vechi, deci Paştele, conform celor precedente, trebueşte sărbătorit la 15/28 Martie. Ce zic Sfinţii Părinţi ortodoxi? Luna plină avută în Duminica ce căzuse chiar în ziua echinoxului, poate fi recomandată de astronomi ca pascală, noi Părinţii Bisericei ortodoxe, conservatorii tradiţiei, ne uităm la tabula pascală, care conţine «Litere dominicale şi Numere de aur» scoatem de acolo data greşită a lunei pline pascale şi o impunem credincioşilor, indiferent dacă ea este recomandată de astronomi sau dacă e în conformitate cu spiritul prescripţiunilor Sinodului dela Niceia, importantul este că forma e îndeplinită. Luna plină din Duminica dela 8 Martie stil vechi, ce cade odată cu echinoxul, nu este pascală, nu cade după 21 Martie st. v., cum scrie la pascalie, deci trebue să fie abandonată pentru a se lua ca pascală Luna plină următoare dela 7 Aprilie st. v.

Din pricina celor 5 zile de diferenţă datorite ciclului lui METON, luna pascală anunţată de Sfinţii părinţi va fi la 12/25 Aprilie, care zi ar cădeà iar în o Duminică. Trebuind să se serbeze Paştele în Duminica următoare, Biserica ne va anunţà să sărbătorim Paştele la 19 Aprilie st. v., adică la 9 Mai stil nou, prin urmare, după 42 de zile după echinoxul de primăvară; şi iată-ne căzuţi în a treia greşeală. Călcăm constituţia apostolică care pune limită datei celei mai depărtate de sărbătorire a Paştelui. Să însemnaţi zilele săptămânei pascale, care se sfârşeşte la a 21 zi a lunei Nisan (9 Aprilie st. v.), pentru ca Duminica Paştelui să nu treacă niciodată peste cele 7 zile care urmează zilei a 14-a.

Constituţia apostolică ne recomandă să nu sărbătorim Paştele mai târziu de 9 Aprilie st. v., şi noi îl sărbătorim la 19 Aprilie, adică cu 10 zile mai târziu de limita fixată. Suntem deci, din cauza calendarului IULIAN, la a 3-a abatere dogmatică.

(Va urmà).

Inginer-Şef C. D. ORĂŞANU.
Licenţiat în matematici

## PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL".

### SUBIECTUL PROPUS.

Fie $P_0$, $P_1$,... $P_n$,... un şir de polinoame în $x$, definite prin dezvoltarea

$$e^{\alpha}(1+\alpha x)^{\lambda} = \sum \alpha^n P_n(x, \lambda).$$

Se vor căutà relaţiuni între polinoame de indici diferiţi. Se va stabili că polinomul $P_n(x, \lambda)$ satisface la ecuaţia diferenţială

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \left[1+(n+\lambda-1)x\right]\frac{dy}{dx} + n\lambda y = 0,$$

a cărei integrală generală se va studià.

Avem reprezentarea prin integrală

$$P_n(x, \lambda) = \frac{1}{n!\,\Gamma(-\lambda)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\lambda-1} (1-xu)^n \, du.$$

Se va determinà natura rădăcinilor polinomului $P_n(x, \lambda)$.

Să se găsiască şi alte proprietăţi ale acestor polinoame.

Se vor studià apoi seriile de polinoame

$$(1) \qquad c_0 P_0 + c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n + \ldots,$$

precum şi desvoltările funcţiunilor în serii de forma (1).

Polinoamele $P_n$ pot fi extinse considerând dezvoltarea expresiunei

$$e^{\alpha+\beta}(1+\alpha x+\beta y)^{\lambda},$$

după puterile lui $\alpha$ şi $\beta$.

*Indicaţiuni bibliografice.* Câtevà din proprietăţile polinoamelor $P_n$ au fost stabilite indirect într'un articol din *Nouvelles Annales* [1]), Febr. 1925, p. 173—175. Pentru dezvoltarea în serie de polinoame $P_n$, se poate consultà o notă din *Comptes Rendus*, t. 176, p. 275; 1923.

N. Abramescu, A. Angelescu
şi G. Bratu.

1) Concurenţii doritori de a aveà un extras al articolului din *Nouvelles Annales*, îl pot cere dela D-l A. Angelescu, Profesor la Universitate, Cluj.

# NOTE MATEMATICE

54. *Alte zece feluri de Calcul.* (Vezi Nota 39, pag. 254).

11. **Avantagios.** *F. Rogel.*—Das Rechnen mit Vorteil. Lipsca 1905.
12. **Derivaţiunii.** *L. F. A. Abrogast.* — Du calcul des dérivations. 1800.
13. **Digital.** *E. Lucas.* — Recréations mathématiques. Vol. III. Cap. 1 Paris.
14. **Fluxional.** *T. Jephson.* — The fluxional calculus.
15. **Grafic.** *O. Müller.*—Graphische Rechnen und graphische Darstellung. 1913.
16. **Intuitiv.** *D. O. Gorman.* — Intuitive calculation. 1871.
17. **Mecanic.** *L. Jacob.* — Le calcul mécanique. Paris 1911.
18. **Nomografic.** *M. d'Ocagne.* — Calcul graphique et nomographique. In *Encyclopédie des Sciences mathématiques.*
19. **Quotienţial.** *Gaussin.* — Definition du calcul quotientiel. Paris 1876.
20. **Ştiinţific.** *H. Bruns.* — Die Grundlinien des Wissenschaftliches Rechnens. Lipsca 1905.

(Va urmă). I. Ionescu.

55. *Generalizarea problemei 2964.* Ne-am puteà propune să găsim numerele de $2n$ cifre cu ultimele $n$ cifre identice, care să fie îndoitul patratului unui număr prim. Se cere adică:

$$a_1a_2a_3 \ldots . a_n\overbrace{bb \ldots . b}^{n} = 2a^2.$$

Se ştie că ultimele două cifre nu sunt identice, decât dacă $b = 4$. Dacă $n > 2$, numărul se va terminà cu 2 şi nu poate fi patratul unui număr prim. Deci $n \leqslant 2$. Cazul $n = 2$ constituie problema 2964. Pentru $n = 1$, avem soluţiile 18; 50; 98.

W. I. Solomon.

56. *Asupra şirului lui* Fibonacci. Urmând numai legea de formaţiune a termenilor, se găseşte că termenii se divid prin anumite numere mici. Astfel se găseşte:

$u_{3n-1} = \mathcal{M}2$; $u_{4n-1} = \mathcal{M}3$; $u_{6n-1} = \mathcal{M}4$; $u_{5n-1} = \mathcal{M}5$.

Se consideră $u_1 = 1$, $u_2 = 2$.

A. B. REINHORN.

57. *Asupra exercițiului 27* (Anul XXX pag. 156). În acel exercițiu, se cereà numărul de două cifre egal cu îndoitul produsului cifrelor lui. Insă, în Anul XVI pag. 236, s'a publicat exercițiul No. 69 de D-l E. KÖNIGSHÖFER, cu enunț puțin diferit, și cu acelaș rezultat 36. Exercițiul 27 nu este dar original.

I. I. GEORGESCU-RACOVIȚĂ.

58. *Asupra șirului lui* LAMÉ. In problema 1586 (Anul XV pag. 372) D-l I. IONESCU cere să se arate că în șirul lui LAMÉ:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$$

inversul unui termen sporit cu 2 este produsul celor doi termeni următori.

Chestiunea se poate generalizà, astfel:

„*Produsul inversului unui termen cu termenul de rangul* p *din șirul lui* FIBONACCI, *mărit cu termenul de rangul* $(p+1)$, *este egal cu produsul celor* p *termeni următori*", adică:

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} v_p + u_{p+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdots \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} = \frac{u_{n+p}}{u_n}.$$

Verificarea se face ușor.

S. KATZ.

59. *Asupra unor relațiuni trigonometrice.* Fie S aria, R raza cercului circumscris unui triunghiu ABC și $a'$, $b'$, $c'$, $2p'$ laturile și perimetrul triunghiului ortic. Se știe că avem

$$S = Rp',$$

relație care se poate demonstrà geometricește *).

Vreau să arăt cum, din această relație, se pot deduce alte relațiuni între elementele triunghiului ABC.

---

*) A se vedeà: **F. G. — M.**, *Exercices de géométrie*, VI-ième éd. Théorème 521, p. 737.

1. Laturile triunghiului ortic fiind $a' = a\cos A$, etc., relația considerată ne dă

$$2S = R \sum a\cos A.$$

2. Avem $a' = a\cos A = R\sin 2A$, etc., deci

$$R \sum \sin 2A = 2S.$$

Dar $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, deci

$$\sum \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

3. $a' = \frac{a^2}{2R}\operatorname{cotg} A$, etc., care ne dau

$\sum a^2 \operatorname{cotg} A = 4S$. (*Culegere de Pr. Trig.* XVIII, 28, p. 398).

4. Din relația precedentă, deducem

$$\sum \frac{\operatorname{cotg} A}{h_a^2} = \frac{1}{S}.$$ (*R. M.* din Timișoara, Pr. 152).

5. Avem $a^2 = 2S(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$, etc., care înlocuind-o în 3, obținem

$\sum \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1$. (*Culegere de Pr.* XVII, 11, p. 394).

6. Avem $a' = a\cos A = abc\frac{\cos A}{bc} = \frac{abc}{4R^2 \sin B \sin C}\cdot\cos A = \frac{S}{R \sin B \sin C}\cdot\cos A$

Deci $\sum \frac{\cos A}{\sin B \sin C} = 1$. (*C. de Pr.* XVII, 21, p. 395).

7. Inmulțind expresia obținută la Nr. 5 cu $4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$, găsim

$$\sum \sin^2 A \sin 2B \sin 2C = 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C.$$

(*G. M.* Vol. XXVIII, Pr. 3029, p. 393).

8. Din 1), putem scoate

$$\sum \frac{\cos A}{h_a} = \frac{1}{R}.$$ (*G. M.* XIX, Pr. 2001, p. 269).

9. Avem $a^2 = 2S(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$, etc., cu ajutorul cărora relația 5) ne dă

$$\sum \frac{a^2}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = 2S.$$ (*G. M.* Vol. XXVIII, Pr. 2997, p. 272).

10. Avem $a' = a(1 + \cos A) - a = 2a \cos^2 \frac{1}{2}A - a.$

Deci $$\Sigma a \cos^2 \tfrac{1}{2}A = p\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

11. Dacă în relaţia 1) facem substituţia

$$\cos A = (2R + r - r_a) : 2R, \text{ etc., găsim}$$

$\Sigma a r_a = 2p(2R - r)$, (*G. M.* XXVI, Pr. 2762, p. 156), din care putem deduce problema 3139, *G. M.* XXX, p. 24.

12. Adunând relaţiunile $2R(1 + \cos A)\, a = a^2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A$, etc., obţinem

$$\Sigma a^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = 4p(R + r).$$

13. In mod analog, găsim

$$\Sigma a^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = 4p(R - r).$$

14. Din 12) şi 13), putem deduce

$$\Sigma \frac{a^2}{r_a} = 4(R + r). \quad (G.\ M.\ \text{XXIX, Pr. 3079, p. 111}).$$

15. $\Sigma a^2 r_a = 4p^2(R - r)$. (*G. M.* XXIX. p. 113).

16. Dacă în 1) facem substituţia

$$\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) : 2bc, \text{ etc.,}$$

găsim formula cunoscută

$$16 S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2.$$

De sigur, se pot obţine şi alte formule interesante, plecând dela alte relaţiuni.

MIRCEA I. ADAM.
Constanţa.

60. *Asupra distanţei dintre două tangente infinit vecine ale unei curbe strâmbe.*

In cele ce urmează, vom da o demonstraţie a unei proprietăţi cunoscute a lui O. BONNET, relativ la partea principală a distanţei dintre două tangente infinit vecine la o curbă strâmbă.

Să considerăm două tangente MT şi M'T' la curba (M), în două puncte infinit vecine M şi M'. Să proectăm figura pe un plan

perpendicular pe tangenta MT. Proecțiile arcelor MM' și MM'' sunt $M_1M'_1$ și $M_1M''_1$, tangenta comună a lor în $M_1$ fiind urma $M_1H$ a planului osculator în M la curba considerată (M) pe planul de proecție. Proecția $(M_1)$ a curbei (M) are în $M_1$ un punct de întoarcere.

Să însemnăm cu $T_1$ și H intersecțiile urmei planului osculator cu tangenta în $M'_1$ la curba $(M_1)$ și cu perpendiculara din $M'_1$ pe această urmă. Ordinul de contact al fiecărei ramuri a curbei $(M_1)$ cu tangenta comună $M_1H$ este $\frac{1}{2}$, adică

$$M'_1H = \lambda \overline{M_1H}^{\frac{1}{2}+1},$$

$\lambda$ fiind o funcțiune de $M_1H$, care nu se anulează când M' tinde către M $(M_1H \to 0)$.

Dar unghiul de contingență $M'_1T_1H$ al curbei $(M_1)$ este diferențiala unghiului ce tangenta în $M_1$ la această curbă face cu o direcție fixă. Deci

$$\operatorname{tg} \sphericalangle HM_1M'_1 = M'_1H/M_1H, \qquad \operatorname{tg} \sphericalangle HM_1M'_1 = \lambda \overline{M_1H}^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle HT_1M'_1 = d(M'_1H)/d(M_1H) = \lambda\left(\tfrac{1}{2}+1\right)\overline{M_1H}^{\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{2}\operatorname{tg} \sphericalangle HM_1M'_1.$$

Considerând numai părțile principale ale acestor infiniți mici, avem, din punct de vedere infinitezimal,

$$\sphericalangle HM_1M'_1 = \tfrac{2}{3} \sphericalangle HT_1M'_1.$$

Dar unghiul $M'_1T_1H$ este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele $MM_1T_1$, planul osculator în M, cu planul dus prin tangenta M'T' la curba (M') paralel cu tangenta MT în M.

Pe indicatoarea sferică a tangentelor, acest unghiu este egal cu unghiul planelor $0mt$, $0mm'$, care din punct de vedere infinitezimal, este egal cu unghiul coardei $mm'$ cu tangenta $mt$, ce este echivalent cu jumătatea unghiului de contingență al indicatoarei sferice $mm'$. Dar acest unghiu este tocmai unghiul de torsiune al curbei (M) în M, așă că unghiul $HM_1M'_1$ este echivalent cu o treime din unghiul de torsiune, $\frac{1}{3}\, d\tau$,

$$\sphericalangle HM_1M'_1 \sim \tfrac{1}{3}\, d\tau.$$

Acestea fiind stabilite, să observăm că planul $T_1M'_1M'$ este dus prin tangenta M'T' paralel cu tangenta MT; deci, distanța

$\delta$ dintre tangentele MT şi M'T' este măsurată de distanţa dela punctul $M_1$ la dreapta $T_1M'_1$.

$$(1)\quad \delta = M_1M'_1 \sin M_1M'_1T_1 = MM' \sin M'MT \sin M_1M'_1T.$$

Dar, am văzut că $HT_1M'_1$ este jumătatea unghiului de torsiune; $HM_1M'_1$ echivalent cu o treime din unghiul de torsiune. Observând că $HT_1M'_1$ este exterior triunghiului $T_1M_1M'_1$, avem

$$\sphericalangle M_1M'_1T_1 = \sphericalangle HT_1M'_1 - \sphericalangle HM_1M'_1 = \frac{1}{2}d\tau - \frac{1}{3}d\tau = \frac{1}{6}d\tau.$$

Inlocuind în (1) pe MM' cu echivalentul său, elementul de arc *ds* al curbei (M); pe sinM'MT cu echivalentul său, unghiul M'MT, care este unghiul format de tangenta MT şi coarda infinit mică MM', egal, după cum se ştie, cu jumătatea unghiului de contingenţă a arcului MM', $\frac{1}{2}d\sigma$; pe $\sin M_1M'_1T_1$ cu echivalentul său, unghiul $M_1M'_1T_1$, $\frac{1}{6}d\tau$, urmează că partea principală a distanţei $\delta$ dintre două tangente infinit vecine ale curbei (M), este

$$\frac{ds}{1}\,\frac{d\sigma}{2}\,\frac{d\tau}{6}.$$

Rezultatul acesta, găsit sub o expresiune mai instructivă decât cel obţinut pe cale analitică, $\frac{1}{12}\,ds\,d\sigma\,d\tau$, arată, în unele cazuri, *superioritatea metodei pur geometrice, care are printre principalele foloase şi pe acela de a ajută să se pătrundă mai bine sensul propoziţiunilor puse şi detaliile demonstraţiilor*, după cum spune D-l APPELL în prefaţa lucrării *Géométrie infinitésimale*, a D-lui DEMARTRES.

N. ABRAMESCU.

61. *Asupra inegalităţii lui Schwartz.* Se ştie că inegalitatea

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \geqslant \left[\int_a^b f(x).\,\varphi(x)\,dx\right]^2$$

joacă în multe chestiuni de analiză un rol important.

Imi propun să dau o demonstraţie simplă, bazată pe inegalitatea evidentă

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_n b_n)^2 \geqslant 0$$

care se deduce din identitatea lui LAGRANGE.

Fie intervalul $(a-b)$ divizat în $n$ părți și să însemn $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ ; $f_i = f(\xi_i)$ și $\varphi_i = \varphi(\xi_i)$, unde $x_i < \xi_i < x_{i+1}$.

In inegalitatea de mai sus, fac

$$a_i^2 = f_i^2 \delta_i \quad , \quad \text{iar} \quad b_i^2 = \varphi_i^2 \delta_i \, ,$$

ceeace este totdeauna posibil, fiindcă $\delta_i > 0$.

Inegalitatea devine

$$(f_1^2 \delta_1 + f_2^2 \delta_2 + \cdots f_n^2 \delta_n)(\varphi_1^2 \delta_1 + \cdots + \varphi_n^2 \delta_n) - (f_1 \varphi_1 \delta_1 + \cdots + f_n \varphi_n \delta_n)^2 \geqslant 0.$$

Trecând la limită, în modul obicinuit, și ținând seamă de definiția integralei, avem că

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\right]^2 \geqslant 0.$$

Q. E. D.

NICOLAE CIORĂNESCU.
Student.

## BIBLIOGRAFIE.

**Mathesis.** Vol. XXXIX. No. 3. Martie 1925. Bruxelles. Proprietăți a două diametre conjugate ale unei conici, de CL. SERVAIS. Deslegarea ecuației de gradul IV la SIMON STEVIN, de H. BOSMANS. Asupra orientării dreptei lui JERABECK, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra mișcării unui corp solid, de E. HENRIOT. Asupra sexticei focale, de R. DEAUX. Asupra legii exponențiale a erorilor a lui GAUSS și QUETELET, de C. LURQUIN. Note de geometrie elementară de AD. M.

**Idem.** Tomul XXXIX. No. 4. Aprilie 1925. Bruxelles. Asupra tetraedrului, de C. SERVAIS. Rezolvarea ecuației de gradul IV la SIMON STEVIN, de H. BOSMANS. Asupra fascicolelor de curbe plane de al șaselea ordin ale lui HALPHEN, de L. GODEAUX.

**Anales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Vol. XCVIII. No. 1—4. Iulie-Octomvrie 1924. Buenos-Aires. Arenarul lui ARCHIMEDE, de H. J. PAOLI.

**Journal de mathématiques élémentaires,** publié par H. VUIBERT. Anul 49. No. 12. Martie 1925. No. 13. Aprilie. Paris.

**Foaia Matematică.** Anul II. No. 4. Aprilie 1925. Chișinău. Asupra unei probleme de aritmetică, de O. G. POPEA. Relațiuni între elementele unui triunghiu, de M. DIMITRESCU.

**Journal matematic.** Vol. II. No. 2. Martie 1925. Bucureşti. O indreptare, de T. POPOVICIU. Asupra diferenţelor finite, de T. POPOVICIU.

**Curierul matematic.** Vol. I. No. 2. Aprilie 1925. Bucureşti. Proprietăţi în legătură cu triunghiurile pedale, de O. BOLGIU. Asupra isopolului, de N. BOTEA.

**Stanislas Millot.** *Théorie nouvelle de la probabilité des causes.* Paris. GAUTHIER-VILLARS et C-ie. Quai des Grands Augustins 55. 1925.

In urma mai multor note prezentate la Academia de Ştiinţe din Paris, autorul a publicat intr'o broşură de 36 pagini, cercetările sale asupra probabilităţei *a posteriori.* Se arată că metoda actuală de a tratà problema duce la unele concluziuni inadmisibile, ceeace se arată în Cap. I. In Cap. II, se stabileşte o-nouă formulă şi i se dă interpretarea ei geometrică. In Cap. III, se determină gradul de certitudine al probabilităţilor, o nomogramă pentru uşurarea aplicării formulelor şi se ocupă cu problema lui LAPLACE, în care acesta s'a încercat să demonstreze că naşterile masculine sunt mai numeroase decât cele femenine, în baza unei legi a naturii, iar nu a întâmplării şi compară rezultatele autorului cu cele date de LAPLACE, POISSON şi BERTRAND. Cap. IV, se ocupă cu compararea zonelor de probabilitate şi se dau câtevà aplicaţii. Cap. V, se ocupă de cazurile când se ivesc abateri anormale şi se introduce ideea de *coeficient de siguranţă* în stabilirea concluziilor scoase din calcule. Astfel se scoate concluzia că, la Paris, este dovedit că naşterea unui băiat este mai probabilă ca a unei fete, cu coeficient de siguranţă 3,215.

Lucrarea este expusă elementar şi poate fi de folos oamenilor de ştiinţă cari cercetează cauzele fenomenelor pe care le studiază.

I. I.

G. VERRIEST. **Cours de mathématiques générales.** II Partie. *Géométrie analitique à trois dimensions. Calcul integral.* Louvain, EDITIONS UNIVERSITAS şi Paris, GAUTHIER VILARS & C-ie. 1925.

In anul trecut (XXIX) al acestei reviste (pag. 144), am arătat scopul urmărit de autor în acest curs de matematici generale, cu ocaziunea apariţiunii primei părţi şi am atras în special atenţiunea asupra lui, studenţilor în ştiinţele fizico-chimice, în ştiinţele naturale, în medicină, în filozofie, precum şi elevilor secţiunilor industriale de pe lângă şcoalele politecnice. Partea a doua este făcută în aceeaşi ordine de idei şi poate aduce aceleaşi servicii.

Cap. XXI se ocupă cu vectori, proecţiuni şi cu primele noţiuni de geometria analitică în spaţiu, urmată în cap. XXII cu studiul planului şi liniei drepte, cu aplicaţiuni la cristalografie. Cap. următor se ocupă cu curbe strâmbe şi suprafeţe în general, elipsoizii cu chestiuni de fizică la care se ivesc. Cap. XXIV se ocupă, cu integrale nedefinite, cu metode de integrare şi cu aplicaţiuni la mecanică, chimie; capitolele următoare continuă integrarea fracţiilor raţionale; cu a fracţiunilor iraţionale algebrice; cu a funcţiunilor transcendente. Cap. XXVIII tratează integralele definite, arii, medii, iar în capitolul următor, se dau aplicaţiuni ale integralelor definite: cuadraturi, rectificări, cubaturi, lucrul mecanic, expansiunea gazelor, disoluţiuni, pile, încălziri. Cap. XXX se ocupă

cu integrarea aproximativă, metode grafice, mecanice, numerice. Cap. XXI se ocupă cu valorile medii ale unei funcţiuni, cicluri, diagrame. Cap. XXII se ocupă cu integralele duble şi triple, arii, cubaturi, integrala lui POISSON, centre de greutate, moment de inerţie. Cap. XXIV tratează despre derivări sub semnul integrării şi diferenţiale totale, iar cap. următor despre integralele curbilinii, care au, în un alt capitol, aplicaţiuni la energie şi entropie, iar un altul la potenţial. Dela Cap. XXXVII, încep ecuaţiile diferenţiale cu aplicaţiuni teoretice şi la diferite ramuri de matematici aplicate. Se dau câtevà indicaţiuni pentru ecuaţiuni simultanee şi cu derivate parţiale.

La fine, este un Apendice cu o notă asupra metodei celor mai mici patrate, alta asupra formulelor empirice, alta asupra interpolaţiunii şi ultima asupra seriilor.

Volumul conţine un material bogat, expus în mod elementar şi este foarte folositor celor ce se ocupă cu aplicaţiunile matematicilor.

I. I.

V. VÂLCOVICI. *Sur une note de* M. O. ONICESCU *concernant les zéros de* $\xi(s)$. Extras din *„Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine"*, Bucureşti, 1925.

## CERERI.

123. Care sunt încercările, mai vechi decât propunerile făcute de inginerul LALANNE, pentru introducerea sistemului metric în România?

I. I.

## CHESTIUNI DE EXAMEN

### CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1925.

#### PROBELE SCRISE.

*(23 aprilie 1925).*

A. PROBE TEORETICE.

(Timpul acordat: 3 ore).

*Clasa V-a.*

**Aritmetica.** Să se demonstreze că produsul divizorilor unui număr N este egal cu:

$$N^{\frac{d}{2}},$$

$d$ fiind numărul divizorilor lui N.

*Aplicație:* N = 140.

**Geometria elementară.** Se dă un patrulater oarecare ABCD fix ca mărime și poziție.

Prin D, se duce o transversală care taie pe $\overline{AB}$ în P, iar prelungirea lui $\overline{CB}$ în Q.

Cercurile PDA și QDC se întâlnesc a doua oară în M.

Transversala DP fiind variabilă, să se găsiască:

1°) Locul punctului M;

2°) Locul punctului ω, centrul cercului determinat de mijloacele segmentelor $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, CM.

**Algebra.** 1°. Dacă în ecuația de gradul al doilea

(1) $$ax^2 + bx + c + 0$$

se pune

$$x = (y - \alpha)/(y - \beta),$$

se obține ecuația

(2) $$A y^2 + B y + C = 0.$$

Să se arate că avem

$$B^2 - 4\,AC = (\alpha - \beta)^2 (b^2 - 4\,ac).$$

Dacă, în particular, se ia:

$$\alpha = 2c + b$$

$$\beta = -(2a + b),$$

să se rezolve ecuația (2) și apoi, din aceste valori, să se găsiască formula de rezolvare a ecuației (1).

2°. Să se determine un polinom de gradul al treilea, al cărui rest, dacă îl împărțim cu $(x^2 - 4)$, este $(4x - 8)$; iar restul său, când îl împărțim cu $(x^2 - 1)$, este $(x + 4)$.

Să se găsiască apoi valorile reale ale lui $x$, pentru care polinomul este negativ.

*Clasa VI-a.*

**Algebra.** 1. Intr'o notă a unei reviste, sub titlul: „Teoremă relativă la determinantul VANDERMONDE", se dovedește următorul rezultat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

şi dacă se însemnează prin $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ determinanţii obţinuţi din $\Delta$ înlocuind respectiv coloanele de rangul 1, 2, 3 pe rând cu cantităţile, $u_1$, $u_2$, $u_3$, avem identitatea

$$(1) \qquad s_2\Delta_1 + s_1\Delta_2 + s_0\Delta_3 = \Delta\,(u_1 + u_2 + u_3),$$

unde

$$s_2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad s_1 = a + b + c, \quad s_0 = a^0 + b^0 + c^0.$$

Se cere să se explice la ce se reduce în fond rezultatul de mai sus. Este nevoe ca $\Delta$ să fie determinant VANDERMONDE? (Numai pentru simplicitatea scrierei s'a luat aici $\Delta$ de ordinul al treilea).

2. Se dă o progresie aritmetică primul termen fiind $a$ şi raţia $r$. Se formează, relativ la această progresie, expresia

$$S_1^2 - S_2,$$

unde $S_1$ este suma termenilor progresiei, iar $S_2$ suma patratelor acestor termeni luaţi în număr de $n$.

Se pune de altă parte

$$s_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

şi se cere limita expresiei

$$(S_1^2 - S_2)/s_3,$$

când numărul termenilor cresc nemărginit.

*Clasa VII.*

**Algebra.** 1°. Să se găsiască limita expresiunei

$$S_n / n,$$

când $n$ creşte nemărginit şi unde s'a pus

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos \frac{i\pi}{2n}.$$

2°. Să se probeze că seria al cărei termen general este

$$u_n = \frac{(1-a)\,(2-a)\,\ldots\,(n-1-a)}{(1-b)\,(2-b)\,\ldots\,(n-1-b)}$$

e convergentă, numai dacă avem

$$b - a + 1 < 0,$$

şi că suma ei, în aceste condiţiuni, este

$$b/(1 + b - a).$$

Cantităţile $a$, $b$ sunt reale şi primul termen $u_1 = 1$.

**Mecanica.** Fie ABCDEF un exagon regulat plan; după laturile AB, BC, CD, DE, EF sunt îndreptate în acelaş sens 5 forţe egale cu P, iar după latura AF o forţă egală cu Q dar de sens contrar (primele dela A către B, dela B către C,..., dela E către F, iar ultima dela A către F). Să sa găsiască suma momentelor acestor forţe în raport cu un punct M din planul exagonului, şi să se arate cum variază această sumă, când M variază în plan; care sunt poziţiile lui M, pentru care suma precedentă e nulă? Să se găsiască apoi rezultanta forţelor date.

**Trigonometria.** 1. Cunoscându-se $\sin a$, să se calculeze

$$\sin \tfrac{1}{2}a, \cos \tfrac{1}{2}a \text{ şi } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a.$$

*Aplicaţie.* Pentru $\sin 210^0 = -\frac{1}{2}$, să se calculeze $\sin 105^0$, $\cos 105^0$ şi $\operatorname{tg} 105^0$.

2 Să se rezolve un triunghiu rectiliniu, cunoscându-se două laturi şi unghiul opus uneia din laturi. Discuţie. (Se vor lua ca date $a$, $b$, A şi se vor determină $c$, B, C).

*Clasa VIII-a.*

**Algebra.** 1°. Condiţia pentru ca ecuaţia

$$x^m + px + q = 0$$

să aibă două rădăcini inverse una alteia, este

$$qS_m + pS_{m-1} + 2 = 0,$$

unde s'a pus

$$S_i = r_1^i + r_2^i,$$

$r_1$ şi $r_2$, fiind rădăcinile unei ecuaţii de gradul al doilea.

2°. Să se discute ecuaţia

$$x^4 - 4x^3 + 2ax^2 - 1 = 0,$$

$a$ fiind o cantitate reală şi să se deă condiţia de realitate a rădăcinilor, numai în funcţie de $a$.

**Geometria analitică.** Se iau pe axa $Ox$ punctele M şi N, astfel ca $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = a^2$; prin M şi N se duc două drepte de coeficienţi unghiulari $b/a$ şi $-b/a$ care se taie în H. Se cere locul geometric al punctului H, când M şi N se mişcă pe axa $Ox$. ($a$ şi $b$ sunt două lungimi constante).

## B. PROBE PRACTICE.

(Timpul acordat: 3 ore).

### *Clasa V-a.*

Să se calculeze expresia:

$$\sqrt{(6{,}2121...)^2 + 7{,}834545...}$$

cu o eroare mai mică decât 0,01.

**Geometria elementară.** Să se construiască un patrulater inscriptibil ABCD, circumscris unui cerc dat şi având o latură dată (ca mărime şi poziţiune).

Insemnând cu O mijlocul segmentului, care uneşte mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$, să se arate că avem relaţiunea:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \tfrac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{CD})^2 + \tfrac{1}{4}(\overline{AD} + \overline{DC})^2 + \tfrac{1}{4}(\overline{AC} - \overline{BD})^2.$$

**Algebra.** 1. Intr'un patrulater ABCD de arie S se înscrie patrulaterul PQRS, punctele P, Q, R, S fiind determinate de rapoartele:

$$AP/AB = AS/AD = CQ/CB = CR/CD = 1/m,$$

$m$ pozitiv şi superior unităţei.

Se cere: 1°. Aria patrulaterului PQRS în funcţie de S.

2°. Repetând asupra patrulaterului PQRS aceeaşi construcţie, şi aşă mai departe, să se găsiască limita către care tinde suma acestor patrulatere, luate în număr infinit.

---

2. Să se simplifice expresia

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - (2c + b)}{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2a + b}.$$

### *Clasa VI-a.*

**Algebra.** 1°. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \sqrt{5x^3 + 7x^2 - 8x - 4}$$

şi să se figureze curba reprezentativă. Se va determină tangentele în punctele importante. Să se găsiască apoi limita expresiunei

$$\sqrt{5x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 4x} - \sqrt{5}x\left(x + \frac{7}{2}\right),$$

când $x$ creşte nemărginit.

2°. Să se discute sistemul:

$$x + \gamma y + \beta z = 0$$
$$\gamma x + y + \alpha z = 0$$
$$\beta x + \alpha y + z = 0,$$

dând pentru fiecare caz soluţia corespunzătoare.

*Clasa VII-a.*

**Geometria descriptivă.** Se consideră 2 drepte pe foaia epurei, intersectându-se într'un punct $\alpha$. Una reprezintă linia de pământ $0x$, a unui sistem de plane $H \perp V$ şi trecând ambele prin $0x$.

A 2-a dreaptă reprezintă, faţă cu sistemul de plane (H, V), *urmele în prelungire* ale unui plan $P'\alpha P$ perpendicular pe planul bisector al diedrului al 2-lea, definit de planele (H, V).

Se cere:

*a)* Să se figureze, pe epură, proecţiunile dreptei de intersecţie dintre planul $P'\alpha P$ şi al 2-lea bisector;

*b)* Să se determine proiecţiunile şi adevărată mărime a distanţei dela un punct al liniei de pământ $0x$ la planul $P'\alpha P$.

*c)* Să se afle adevărata mărime a unghiului format în spaţiu *de urma* $\alpha P'$ a planului $P'\alpha P$ şi de dreapta de intersecţiune dela punctul *a*);

(Se va anexà o legendă explicativă a construcţiilor).

**Mecanica.** Două cercuri O, O' de raze $R = 4$ ctm., $R' = 3$ ctm., distanţa centrelor OO' fiind egală cu 5 ctm., se intersectează în A şi B. Să se determine centrul de greutate al suprafeţei omogene ACBDA, închisă de cele două cercuri.

**Algebra.** 1°. Să se arate că dacă $a$ este un număr pozitiv, avem inegalitatea

$$\log(1 + a) > a - \tfrac{1}{2}a^2,$$

logaritmul fiind luat în baza $e$; iar dacă $-1 < a < 0$,

avem

$$\log 1/(1 + a) > -a + \tfrac{1}{2}a^2.$$

2°. Să se găsiască limita expresiunei

$$s = \frac{1}{k^2 g}\log(kv_0 \sin kgt + \cos kgt),$$

când $k$ tinde spre zero; $g, v_0, t$ nu depind de $k$, iar logaritmul este cu baza $e$.

**Trigonometria.** 1. Să se discute ecuaţia

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = a^2$$

şi, în particular, să se afle toate valorile lui $x$, care o verifică pentru valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică, ce poate avea $a$.

Soluţiile mai mici ca 360° se vor exprimă şi în radianţi.

2. Dacă A este cel mai mic unghiu pozitiv dat de

$$\operatorname{tg} A = a^2 \sin 2C \cos C / b^2 \cos (B - C),$$

să se calculeze expresiunea

$$E = \operatorname{tg} (2B - A) \operatorname{tg} (2C - A) / \cos^2 (B + C),$$

având drept date:

$$a = 0{,}12928\,;\ b = 1{,}6256\,;\ B = 170^\circ, 10', 3''\ \text{şi}\ C = 49^\circ, 25', 35''.$$

*Clasa VIII-a.*

**Algebra.** 1°. Se cere numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$2x^2 \log x + x^2 - 4x + \alpha = 0,$$

$\alpha$ fiind o cantitate reală oarecare.

Să se determine în particular $\alpha$, astfel încât ecuaţia să aibă o rădăcină dublă. Logaritmul este luat în baza $e$.

2°. Să se calculeze rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 18x + 28 = 0.$$

Pentru calcule, se cere o aproximaţie mai mică de cât o sutime.

**Geometria analitică.** Se dau punctele $A\left(\frac{16}{3}, 1\right)$, $B\left(-1, -\frac{15}{4}\right)$, $C(-1, +1)$.

Să se găsiască aria triunghiului format de bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2138. *Să se găsiască spaţiul* s, *pe care îl parcurge în timpul* t *un mobil plecat din repaos, care are o mişcare astfel că acceleraţia sa tangenţială este egală cu subtangenta curbei spaţiilor.*

G. D. Roşianu.

Soluţie dată de D-nul Şerban Gheorghiu.

Acceleraţia tangenţială a unui punct este $dv/dt = d^2s/dt^2$, $v$ fiind viteza punctului pe traectorie.

Fie $s = f(t)$ ecuaţiunea curbei spaţiilor, M punctul pe această curbă, corespunzător mobilului pe traectoria sa, $m$ proecţia lui M pe

axa timpurilor şi T intersecţia tangentei în M la curba spaţiilor, cu axa timpurilor.

Din triunghiul T$m$M, avem:

$$\overline{TM} = \overline{mM} \operatorname{cotg} \sphericalangle mTM = s/s'.$$

Avem, aşà dar, ecuaţiunea diferenţială:

$$s'' = s/s'. \qquad (1)$$

Punând $s' = u$ şi luând pe $s$ ca variabilă independentă, avem:

$$s'' = du/dt = du/ds \times ds/dt = u' . u.$$

Aşà dar, (1) devine:

$$uu' = s/u, \qquad \therefore \qquad u^2 du = s ds,$$

$$\therefore \quad u^3/3 - s^2/2 = c, \qquad \therefore \qquad s'^3/3 - s^2/2 = c. \qquad (2)$$

Cum mobilul are pentru $s = 0$ viteza $v = ds/dt$ nulă, în (2) avem $c = 0$. Aşà dar:

$$s' = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}} s^{\frac{2}{3}}, \qquad \therefore \quad s^{-\frac{2}{3}} ds = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}\, dt, \qquad \therefore \quad 3s^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}(t - t_0),$$

$$\therefore \quad s = \frac{(t - t_0)^3}{18},$$

unde $t_0$ e timpul dela care se socotesc spaţiile $s$.

Presupunând că mobilul pleacă la $t_0 = 0$, avem legea:

$$s = \tfrac{1}{18} t^3. \qquad (3)$$

*Observaţii.* Se pot face următoarele observaţiuni: Subtangenta curbei spaţiilor fiind socotită pe axa timpurilor, e de natura timpului şi deci are dimensia [T].

Apoi acceleraţia având dimensia [L : T$^2$], [L] fiind dimensia lungimilor rezultă că e impropriu a spune că e egalitate absolută între acceleraţia tangenţială şi subtangenta curbei spaţiilor.

Deaceea, între $s''$ şi $s : s'$, trebuie să se înţeleagă numai o egalitate numerică. Fie [$k$] raportul dimensional al lor. Avem:

$$[L/T^2] = [k]\ [T], \qquad \therefore \qquad [k] = [L/T^3].$$

Pentruca egalitatea (3) să aibă deci sens, vom scrie:

$$s'' = k\ s/s' \qquad \therefore \qquad s'^3 = \tfrac{1}{2} k s^2, \qquad s = \tfrac{1}{18} k t^3,$$

procedând la fel ca mai sus.

Se vede că avem

$$[s] = [k]\ [T^3] = [L/T^3]\ [T^3] = [L].$$

In cazul egalității numerice între $s''$ și $s:s'$, avem, în sistemul C. G. S. de ex.,

$$k = 1\ \text{cm}/(1\ \text{sec})^3.$$

---

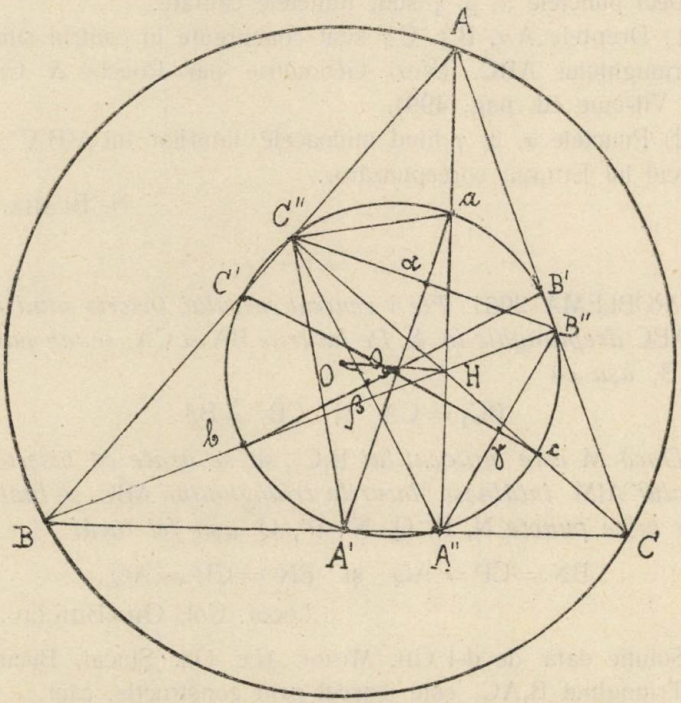
PROBLEMA 2471. *Fie* A', B', C' *și* a, b, c *mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor* AH, BH, CH, H *fiind ortocentrul triunghiului* ABC. *Pe* A' *a*, B' *b*, C' *c, se iau punctele* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *așà ca să avem:*

$$\alpha a = AH^2/8r', \qquad \beta b = BH^2/8r', \qquad \gamma c = CH^2/8r'$$

r' *fiind raza cercului lui* EULER *al triunghiului* ABC.

*Să se arate că:*

*1) Dreptele* A$\alpha$, B$\beta$, C$\gamma$ *sunt concurente.*




*2) Cercul* $\alpha\beta\gamma$ *este cercul lui* EULER *din triunghiul ortic al triunghiului dat* ABC.

D. V. IONESCU.

Fie A″, B″, C″ picioarele înălţimilor triunghiului dat ABC. Punctul 2) al problemei arată că punctele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trebuie să se găsiască sau pe mijloacele laturilor triunghiului A″B″C″, sau la a doua intersecţie ale diametrelor $a$A′, $b$B′, $c$C′ cu cercul $\alpha\beta\gamma$.

Dreptele $a$A′, $b$B′, $c$C′ sunt diametre în cercul lui Euler corespunzător lui ABC; sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ortic A″B″C″ în $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ mijloacele laturilor sale. Punctele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ îndeplinesc o condiţie din problemă, adică de a se află pe cercul lui Euler al triunghiului A″B″C″, şi a doua, că se află şi pe dreptele $a$A′, $b$B′, $c$C′.

Din triunghiul dreptunghic $a$C″A′, avem:

$$\overline{aC''}^2 = \alpha a \times 2r' \qquad \text{sau} \qquad (\tfrac{1}{2}AH)^2 \alpha a \times 2r',$$

sau:
$$\alpha a = \overline{AH}^2/8r', \text{ etc.}$$

Deci punctele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sunt punctele căutate.

1) Dreptele A$\alpha$, B$\beta$, C$\gamma$ sunt concurente în centrul simedian K al triunghiului ABC. (Vezi Géométrie par Rouché & Comberousse VII-ème éd. pag. 499).

2) Punctele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ fiind mijloacele laturilor lui A″B″C″, sunt pe cercul lui Euler, corespunzător.

N. Blaha.

---

PROBLEMA 2961. *Fie* I *centrul cercului înscris unui triunghiu* ABC *dreptunghic în* A. *Pe laturile* BA *şi* CA, *se iau punctele* $C_1$ *şi* $B_1$ *aşa că*

$$BC_1 = CA \quad \text{şi} \quad CB_1 = BA.$$

*Dacă* M *este mijlocul lui* $B_1C_1$, *să se arate că bisectoarele unghiului* AIM *întâlnesc laturile triunghiului* ABC *şi înălţimea* AH *în nişte puncte* N, P, Q, N′, P′, Q′ *aşa fel încât*

$$BN = CP = AQ \quad \text{şi} \quad BN' = CP' = AQ'.$$

Locot. Col. Gh. Buicliu.

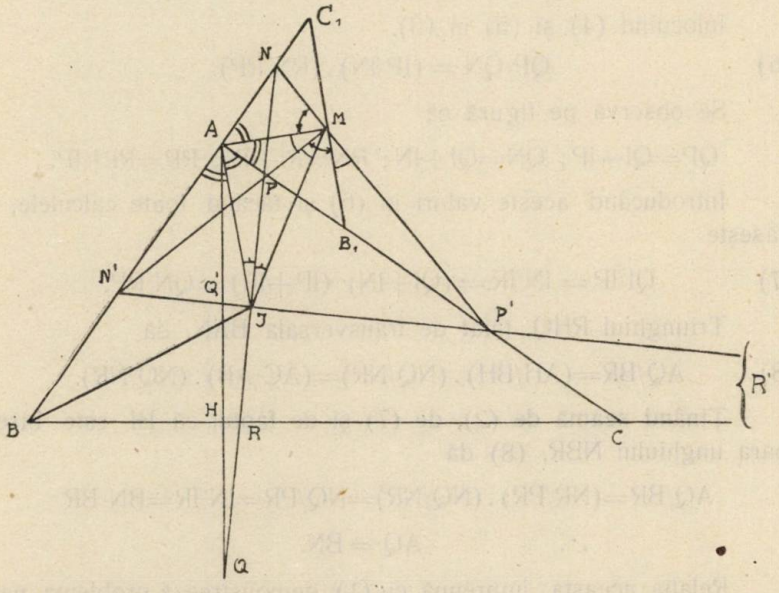
Soluţie dată de d-l Gh. Mihoc (Lc. Gh. Şincai, Bucureşti). Triunghiul $B_1AC_1$ este isoscel prin construcţie, căci

$$AC_1 = AB_1 = CA - BA.$$

Rezultă că AM este bisectoara unghiului $C_1AB_1$, deci fascicolul

A(IPLN) este armonic, de unde urmează că şi fascicolul M(IPLN) este armonic. Unghiul A fiind drept, iar AI şi AL fiind bisectoarele acestui unghiu, urmează că unghiurile IAP şi PAL sunt egale cu $45^0$ şi deci AP este bisectoarea unghiului IAM. Cum PI este bisectoara lui AIM, prin construcţie, urmează că P este centrul cercului înscris triunghiului AIM, deci MP este bisectoara unghiului AMI. Fascicolul M(IPLN) fiind armonic, urmează că MN este a doua bisectoară a unghiului AMI, deci $PM \perp MN$. Unghiurile AMN şi $PMB_1$, având laturile perpendiculare, sunt egale. Pe de altă parte

$$NAM = MAB_1 = MB_1A = 45^0,$$




deci $MB_1 = AM$, deci triunghiurile ANM şi $PMB_1$ sunt egale. Rezultă egalitatea

$$AN = PB_1,$$

la care adunând cantităţile AB, $CB_1$ egale prin construcţie, se obţine

$$AN + AB = PB_1 + CB_1 \quad \therefore \quad (1)\ BN = CP.$$

Triunghiul NAP, tăiat de transversala BRC, dă

$$(BA/BN) \cdot (RN/RP) \cdot (CP/CA) = 1$$

sau, ţinând seamă de (1),

(2) $$RN/RP = AC/AB.$$

Triunghiurile BNR şi CRP, tăiate de transversala AH, dau $(AB/AN).(QN/QR).(HR/HB)=1$ şi $(AC/AP).(QP/QR).(HR/HC)=1$.

Din compararea acestor egalităţi, se scoate

(3) $$QP/QN = (AP/AN).(AB/HB).(HC/AC).$$

AI fiind bisectoara exterioară în triunghiul PAN, avem

(4) $$AP/AN = IP/IN.$$

Triunghiurile dreptunghice asemenea ABC, BHA, CHA şi (2) dau

(5) $$(AB/HB).(HC/AC) = AC/AB = RN/RP.$$

Inlocuind (4) şi (5) în (3),

(6) $$QP/QN = (IP/IN).(RN/RP).$$

Se observă pe figură că

$$QP=QI+IP;\ QN=QI+IN;\ RN=RI+IN;\ RP=RI+IP.$$

Introducând aceste valori în (6) şi făcând toate calculele, se găseşte

(7) $$QI/IP = IN/IR = (QI+IN)/(IP+IR) = QN/RP.$$

Triunghiul RHQ, tăiat de transversala BAN, dă

(8) $$AQ/BR=(AH/BH).(NQ/NR)=(AC/AB).(NQ/NR).$$

Ţinând seamă de (2), de (7) şi de faptul că BI este bisectoara unghiului NBR, (8) dă

$$AQ/BR=(NR/PR).(NQ/NR)=NQ/PR=IN/IR=BN/BR$$

$$\therefore \qquad AQ = BN.$$

Relaţia aceasta, împreună cu (1), demonstrează problema pentru cazul bisectoarei interioare.

In triunghiul AIM, se observă că AN' este bisectoara exterioară unghiului A, iar IN' bisectoara exterioară unghiului I. Deci N' este centrul cercului exînscris unghiului M al acestui triunghiu. De asemenea, P' este centrul cercului exînscris unghiului A al aceluiaş triunghiu, căci se găseşte la întâlnirea bisectoarei interioare AP cu bisectoara exterioară IP'. Urmează că MP trece prin N' şi MN trece prin P'. Se observă pe figură că

$$\sphericalangle N'AM \sphericalangle P'B_1M \sphericalangle 135^0, \quad \text{iar} \quad AMN' \sphericalangle B_1MP',$$

ca fiind diferența dintre unghiurile drepte $AMB_1$, $PMP'$ și unghiul $PMB_1$. Triunghiurile $N'AM$ și $P'B_1M$, având laturile $AM$, $B_1M$ egale și unghiurile adiacente egale, sunt egale, deci

$$AN' = P'B_1.$$

Se observă pe figură că

$$AN' = AB - BN' \quad \text{și} \quad P'B_1 = CB_1 - CP'.$$

Ținând seamă că $CB_1$, este egal cu $AB$, egalitățile precedente dau

$$BN' = CP'. \tag{9}$$

Triunghiul $N'AP'$, tăiat de transversala $BC$, dă, ținând seamă de (9):

$$AC/AB = R'N'/R'P'. \tag{10}$$

Triunghiurile $BN'R'$ și $CR'P'$, tăiate de transversala $AH$, dau

$$(AN'/AB).(Q'R'/Q'N').(HB/HR') = 1 \text{ și } (AC/AP).(Q'P'/Q'R').(HR'/HC) = 1$$

$$\therefore \quad Q'P'/Q'N' = (AP'/AN').(AB/HB).(HC/AC). \tag{11}$$

Dar ținând seamă de (5), (10) și de faptul că $AI$ este bisectoară în triunghiul $N'AP'$, egalitatea (11) devine

$$Q'P'/Q'N' = (IP'/IN').(R'N'/R'P'), \tag{12}$$

Se observă pe figură că

$$Q'P' = IQ' + IP', \quad Q'N' = IN' - IQ', \quad R'N' = IN' + IR', \quad R'P' = IR' - IP'.$$

Inlocuind în (12) și făcând toate calculele, se găsește

$$N'Q'/R'P' = IN'/IR'. \tag{13}$$

Triunghiul $R'HQ'$, tăiat de transversala $AN'B$, dă

$$AQ'/BR' = (AH/BH).(N'Q'/N'R') = (AC/AB).(N'Q'/N'R'). \tag{14}$$

Ținând seamă de (10), de (13) și de faptul că $BI$ este bisectoara unghiului $B$ în triunghiul $R'BN'$, egalitatea (14) devine

$$AQ'/BR' = IN'/IR' = BN'/BR',$$

care arată că $AQ' = BN'$ și împreună cu (9), rezolvă partea a doua a problemei.

*Observațiuni.* 1°. D-l Gh. Mihoc, pe lângă soluția elementară a acestei probleme, a trimis și câtevă observațiuni foarte interesante și anume:

*a)* In prima parte a problemei nu s'a făcut de loc uz de proprietatea punctului I de a fi centrul cercului înscris triunghiului ABC, ci numai de aceea că AI este bisectoara unghiului BAC. Observând aceasta, prima parte a teoremei se poate generaliză în felul următor:

*Fie* I *un punct pe una din bisectoarele unghiului* A *al triunghiului dreptunghic* ABC. *Construind punctele* $N_1P_1Q$ *ca în problema 2961, avem* BN=CP=AQ.

*b)* Pentru demonstrarea egalităţei BN'=CP', nu ne-am servit de proprietatea că punctul I este întâlnirea bisectoarelor triunghiului ABC. Deci şi această egalitate este adevărată oricare ar fi I pe bisectoarele triunghiului A.

*c)* Considerând punctul $I_a$, centrul cercului exînscris triunghiului A, şi construind punctele $N_1$, $P_1$, $Q_1$, $N'_1$, $P'_1$, $Q'_1$ analog, ca pe punctele N, P, M, N', P', M', se demonstrează la fel ca în problema 2961, relaţiunile

$$BN_1 = CP_1 = AQ_1 \qquad \text{şi} \qquad BN'_1 = CP'_1 = AQ'_1.$$

2°. D-l Gh. Mihoc a încercat să mai rezolve o problemă sugerată de problema 2961 şi anume, s'a întrebat:

*Câte puncte* I *sunt pe bisectoara* AI *aşà încât, construind punctele* N, P, Q, N', P', Q', *să avem relaţiunile din enunţul problemei 2961?*

Răspunsul găsit de d-sa, la această problemă, este: *două puncte*, şi este adevărat. Soluţia d-sale, împreună cu o serie de alte observaţiuni şi proprietăţi ale figurei, vor face obiectul unui articol pe care-l voiu publică ulterior.

Gh. B.

---

PROBLEMA 3055. *Care este drumul cel mai scurt dela un punct la altul, atingând o sferă dată.*

I. Ionescu.

Fie S sfera dată cu centrul O şi două puncte $P_1$ şi $P_2$ în afara ei, presupunând sfera massivă.

Dacă dreapta $P_1P_2$ nu întâlneşte sfera, atunci vom construi un elipsoid de rotaţie având acele puncte ca focare şi tangent sferei de partea liniei $P_1P_2$. Fie T punctul de contact. Drumul căutat este $P_1TP_2$, de oarece orice alt drum atinge sfera în afară de elipsoid şi distanţa $(P_1T' + P_2T')$ este mai mare ca distanţa $(P_1T + P_2T)$, de oarece suma distanţelor dela un punct din afara elipsoidului la focarele lui $P_1$ şi $P_2$ este mai mare ca suma distanţelor dela un punct de pe dânsul la acele focare.

Dacă dreapta $P_1P_2$ taie sfera, ducem din $P_1$ şi $P_2$ două conuri tangente la sferă şi fie $P_1T_1$ şi $P_2T_2$ generatoarele lor în planul $P_1OP_2$. Drumul cel mai scurt dela $P_1$ la $P_2$ este compus din dreptele

$P_1T_1$, $P_2T_2$ şi din arcul de cerc mare $T_1T_2$. In adevăr, orice drum ce pleacă din $P_1$ ajunge la cercul de contact al conului cu vârful în $P_1$ pe o cale mai lungă ca pe generatoarea $P_1T_1$, iar între cele două cercuri distanţa cea mai scurtă este după un arc de cerc mare.

Când dreapta $P_1P_2$ este tangentă sferei S, atunci ea este drumul cel mai scurt dela $P_1$ la $P_2$.

Când $P_1P_2$ trece prin centrul sferei avem o infinitate de drumuri cele mai scurte şi egale cu distanţele dela $P_1$ şi $P_2$ la punctele unde $P_1P_2$ străbate sfera şi din jumătăţi de cercuri mari ce unesc aceste puncte de pătrundere.

O. Bolgiu.

D-l L. Weiss a studiat chestiunea în plan şi apoi a trecut în spaţiu.

---

PROBLEMA 3060. *Să se găsiască înfăşurătoarea polarelor trilineare ale potenţialelor unui punct, în raport cu un triunghiu* ABC.

M. Ghermănescu.

Soluţie dată de D-nii: O. Bolgiu şi N. Botea (Elevi Liceul «Cantemir», Bucureşti).

Ecuaţia baricentrică a polarei trilineare a potenţialului $M_k(x^k, y^k, z^k)$ al unui punct $M(x, y, z)$, fiind

$$(1) \qquad \alpha/x^k + \beta/y^k + \gamma/z^k = 0,$$

înfăşurătoarea cerută se va obţine eliminând parametrul $k$ între (1) şi derivata sa în raport cu $k$, adică:

$$(2) \qquad \alpha \log x/x^k + \beta \log y/y^k + \gamma \log z/z^k = 0.$$

Din aceste două ecuaţii, deducem:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\log\left(\frac{z}{x}\right)}{\log\left(\frac{y}{z}\right)} \qquad \left(\frac{y}{z}\right)^k = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\log\left(\frac{x}{y}\right)}{\log\left(\frac{z}{x}\right)}.$$

Pentru eliminarea lui $k$, luăm logaritmii în ambele părţi şi apoi împărţim parte cu parte; obţinem, după câtevă transformări simple:

$$\alpha^{\log\left(\frac{y}{z}\right)} \cdot \beta^{\log\left(\frac{z}{x}\right)} \cdot \gamma^{\log\left(\frac{x}{y}\right)} = \log\left(\frac{x}{y}\right)^{\log\left(\frac{x}{y}\right)} \log\left(\frac{y}{z}\right)^{\log\left(\frac{y}{z}\right)} \log\left(\frac{z}{x}\right)^{\log\left(\frac{z}{x}\right)}.$$

Această ecuație reprezintă o curbă omotetică celei studiate de D-l M. GHERMĂNESCU, în «G. M.», vol. XXVIII, pag. 46 (locul potențialelor unui punct).

*Notă.* Se citește direct pe ecuațiune, că înfășurătoarea conține punctul de pe dreapta dela infinit

$$\frac{\alpha}{\log\left(\frac{y}{z}\right)} = \frac{\beta}{\log\left(\frac{z}{x}\right)} = \frac{\gamma}{\log\left(\frac{x}{y}\right)},$$

care e, în acelaș timp, punctul de contact al înfășurătoarei cu polara trilineară a centrului de gravitate al triunghiului, acesta fiind potențialul de ordinul *zero*, al oricărui punct din planul triunghiului.

Pe baza acestor considerațiuni, se puteà deduce *à priori*, natura parabolică a înfășurătoarei.

M. G.

PROBLEMA 3175. *Să se demonstreze că, în orice triunghiu, cele 6 drepte care unesc mijlocul unei bisectoare interioare cu extremitățile laturei tăiată de acea bisectoară, întâlnesc în prelungire laturile triunghiului complimentar în 6 puncte conciclice. Să se determine natura acestui cerc.*

N. BLAHA.

Soluție dată de D-nii: ION C. VASILIU (Elev Cl. VII, Liceul Mânăstirea Dealului), TRAIAN UDRISKY (Elev Cl. VII, Liceul Moise Nicoară, Arad), GH. D. SIMIONESCU, M. I. PĂTROIANU, CONST I. CIORĂNESCU și PAUL IONESCU (Elevi Liceul M-rea Dealului).

Fie $\alpha\beta\gamma$ triunghiul complimentar, $I_a$, $I_b$, $I_c$ centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, L mijlocul bisectoarei interioare AA', $C_2$ punctul de intersecție al dreptelor $\alpha\beta$, BL și $B_1$ punctul de intersecție al dreptelor $\gamma\alpha$, CL.

Aplicând triunghiului $A\beta\gamma$ teorema bisectoarei, avem

$$L\beta/L\gamma = A\beta/A\gamma = b/c. \qquad (1)$$

Triunghiurile asemenea $LC_2\beta$ și $LB\gamma$, ne dau

$$\beta C_2/\gamma B = L\beta/L\gamma \quad \therefore \quad \beta C_2 = \gamma B \cdot (L\beta/L\gamma). \qquad (2)$$

Dacă ținem seamă de (1), relația (2) devine

$$\beta C_2 = \frac{c}{2} \cdot \frac{b}{c} = \tfrac{1}{2} b.$$

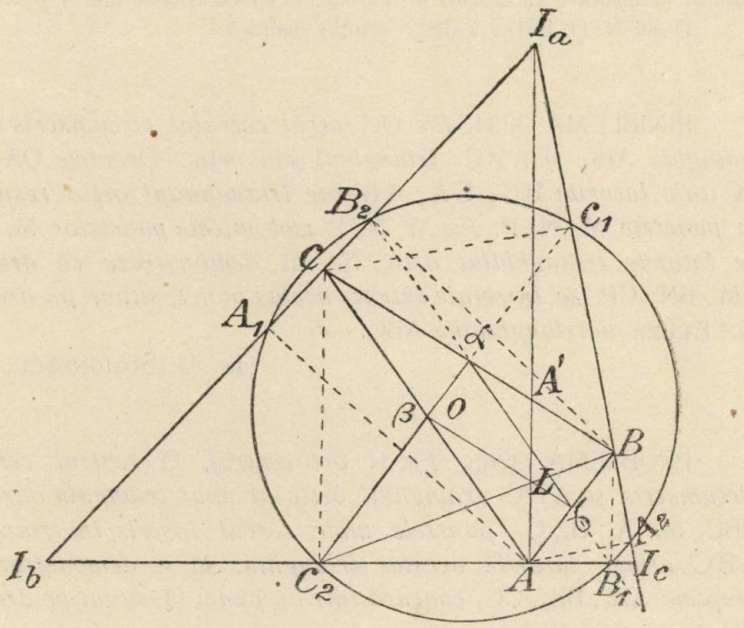
Avem deci $\beta C_2 = \beta C$ și, prin urmare, triunghiul $\beta AC_2$ este isoscel. Dar $\sphericalangle A\beta C_2 = \sphericalangle \beta A\gamma = A$ și, prin urmare, $\sphericalangle \beta AC_2 = 90^0 - \frac{1}{2}A$.

La fel, arătăm că și triunghiul $\gamma AB_1$ este isoscel și că $\sphericalangle \gamma AB_1 = 90^0 - \frac{1}{2}A$.

Rezultă, de aici, imediat, că punctele $C_2$, A, $B_1$ sunt colineare și că punctele $C_2$ și $B_1$ se găsesc pe bisectoara exterioară $I_b I_c$ a unghiului A.

După cele demonstrate mai sus, avem

$$\beta C_2 = \beta A = \beta C,$$




ceeace ne arată că unghiul $CC_2A$ este drept și la fel unghiul $BB_1A$ este drept.

Fie $A_2$, $C_1$ și $B_2$, $A_1$ punctele analoage cu $C_2$ și $B_1$, situate pe laturile $I_c I_a$ și $I_a I_b$ ale triunghiului $I_a I_b I_c$. Se știe însă că ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$. Din cele ce preced, se vede că punctele $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$; $C_1$, $C_2$ sunt proiecțiunile picioarelor înălțimilor triunghiului $I_a I_b I_c$ pe laturile acestui triunghiu. Urmează atunci, după o proprietate cunoscută*), că cele 6 puncte

*) F. G.—M. *Exercices de géometrie*, VI-e édition, théorème 1036, p. 1192.

$C_2$, $A_1$, $A_2$, $C_1$, $B_2$, $A_1$ se află pe un cerc şi anume pe cercul lui TAYLOR al triunghiului $I_a I_b I_c$.

Au rezolvat foarte bine problema, fără a preciză însă că cercul pe care se găsesc cele 6 puncte, este cercul lui TAYLOR, D-nii: M. I. FOCŞENEANU şi M. ADAM.

D-nul SOLOMON WEISS (Elev Cl. VII, Liceul Galaţi), a rezolvat bine problema, arătând că ea se reduce la proprietatea 7), demonstrată la pag. 27 a broşurei D-lui Inginer N. BLAHA, intitulată: *Proprietăţi din geometria triunghiului în legătură cu cercul lui* TAYLOR, LEMOINE, ADAMS, etc. *).

D-nul N. G. BOTEA a dat o soluţie analitică.

---

PROBLEMA 3234. *Fie* O *centrul cercului circumscris unui triunghiu* ABC *şi* A'B'C' *triunghiul său ortic. Dreptele* OA, OB, OC *taie laturile* B'C', C'A', A'B' *ale triunghiului ortic respectiv în punctele* M, N, P. *Fie* M', N', P' *isotomicele punctelor* M, N, P *pe laturile triunghiului ortic. Se să demonstreze că dreptele* AM', BN', CP' *se întretaie într'un acelaş punct, situat pe dreapta lui* EULER *a triunghiului* ABC.

GH. D. SIMIONESCU.

---

PROBLEMA 3265. *Fie* H *ortocentrul,* O *centrul cercului circumscris şi* A'B'C' *triunghiul ortic al unui triunghiu oarecare* ABC, *iar* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *punctele unde cercul înscris în triunghiul* A'B'C' *atinge laturile acestui triunghiu. Să se demonstreze că dreptele* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ *concură într'un punct* Q, *situat pe dreapta* OH *şi că raportul*

$$QH : QO = 2\cos A \cos B \cos C.$$

ATH. RADEV.

Soluţie dată de D-nii: CONST. C. POPOVICI şi AL. C. FLOREA (Elevi Cl. VII, Liceul Internat, Iaşi).

Vom arătà că aceste două probleme sunt identice. Pentru aceasta vom observà că ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ortic şi deci e destul să de-

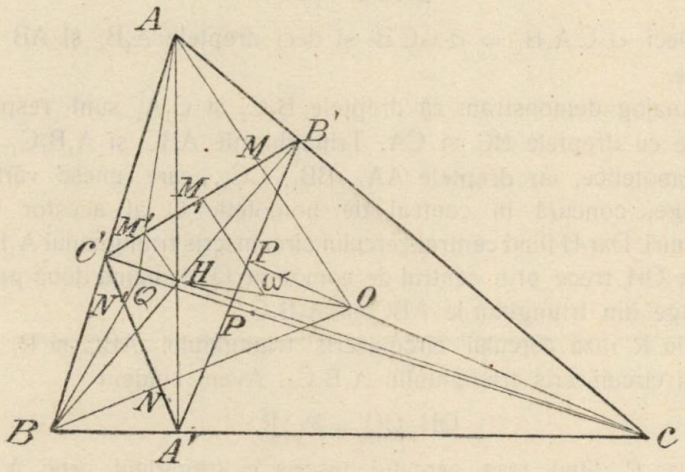
---

*) Broşură de 60 pagini, tipărită la Botoşani (preţul 40 lei), pe care o recomandăm corespondenţilor cari se interesează de geometria triunghiului

(V. C.)

monstrăm că isotomicul M′ al punctului M este piciorul perpendicularei scoborîte din H pe B′C′.

Fie $M_1$ mijlocul dreptei B′C′ şi ω mijlocul lui HO. Se ştie că ω este centrul cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC, care trece prin B′ şi C′; deci dreapta $\omega M_1$ este perpendiculară pe B′C′, şi deci este paralelă cu AO, care şi ea e perpendiculară pe B′C′, după teorema lui NAGEL. Dar punctele ω şi $M_1$, împărţind pe OH şi MM′ în acelaş raport, dreapta HM′ este şi ea paralelă cu $\omega M_1$ şi deci perpendiculară pe B′C′.




Deci problema 3234 se reduce la problema 3265. Păstrând notaţiunile primei probleme, să arătăm că dreptele AM′, BN′, CP′ concură într'un acelaş punct situat pe OH.

Fie Q punctul unde AM′ întâlneşte pe OH. Triunghiurile asemenea QHM′, QOA ne dau

$$QH : QO = HM' : OA.$$

Dar OA este raza cercului circumscris triunghiului ABC, iar HM′ este raza triunghiului ortic. Avem deci (vezi *Culegere de Problememe*, Trigonometria, XIX. 13, pag. 402) :

$$HM' = 2R\cos A \cos B \cos C, \qquad OA = R,$$

şi deci

$$QH : QO = 2\cos A \cos B \cos C.$$

Simetria rezultatului ne arată că dreptele BN′ şi CP′ vor întâlni pe OH în punctele $Q_1$ şi $Q_2$ astfel că

$$Q_1H : Q_1O = Q_2H : Q_2O = 2R\cos A \cos B \cos C.$$

$Q_1$ şi $Q_2$ se confundă deci cu Q, şi problema este asfel rezolvată.

Soluţia problemei 3265, dată de D-nii: FILIP S. GOLDSTEIN (Elev particular, Cl. VII) şi M. DRĂGHICEAN (Liceul Braşov).

Din consideraţia patrulaterelor inscriptibile $HA_1C'B_1$ şi $AC'A'C$, obţinem

$$\sphericalangle C'A_1B_1 = \sphericalangle C'HB_1 = 90^0 - \sphericalangle B_1C'H = 90^0 - \sphericalangle A'AC = \sphericalangle C$$

$$\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle C.$$

Deci $\sphericalangle C'A_1B_1 = \sphericalangle AC'B'$ şi deci dreptele $A_1B_1$ şi AB sunt paralele.

Analog demonstrăm că dreptele $B_1C_1$ şi $C_1A_1$ sunt respectiv paralele cu dreptele BC şi CA. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt deci homotetice, iar dreptele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, care unesc vârfurile omoloage, concură în centrul de homotetie Q al acestor două triunghiuri. Dar H fiind centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$, dreapta OH trece prin centrul de homotetie Q, ca unind două puncte omoloage din triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$.

Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC şi $R_1$ raza cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$. Avem evident

$$QH : QO = R_1 : R.$$

Dar $R_1$ fiind raza cercului înscris în triunghiul ortic A'B'C', avem $R_1 = 2R \cos A \cos B \cos C$ şi deci

$$QH : QO = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Soluţia problemei 3234, dată de D-nul N. G. BOTEA (Elev Cl. VII, Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti).

Se ştie că o transversală unghiulară din triunghiul AB'C' este isogonală cu transversala unghiulară corespunzătoare din triunghiul asemenea ABC. Astfel, dreapta AO este isogonala înălţimei AH şi deci reciproca ei AM' din triunghiul AB'C' este isogonala transversalei unghiulare reciproce înălţimei AH. Înălţimile AH, BH, CH întâlnindu-se în ortocentrul H, reciprocele lor vor concură în reciprocul lui H, iar isogonalele lor se vor întâlni în inversul reciprocului lui H, care punct va fi deci punctul de concurenţă al transversalelor unghiulare AM', BN', CP'.

Punctul H, având coordonatele baricentrice (tgA, tgB, tgC), reciprocul lui este punctul $H_1$, cu coordonatele (cotgA, cotgB, cotgC), care are ca isogonal punctul $H_2$ ($a^2$tgA, $b^2$tgB, $c^2$tgC).

Ecuaţia dreptei lui EULER OH, în coordonate baricentrice, fiind

$$\Sigma\, \alpha \cos A \sin(B - C) = 0,$$

se vede uşor că ea este verificată de coordonatele punctului $H_2$.

*Notă.* D-nii: C. A. MIHĂILESCU, V. I. LEPĂDATU, ILIE POPA, V. DORNEANU, V. V. VÂRLAN, DAN P. BORŞ şi G. HARTULAR (Elevi Liceul Internat Iaşi), au rezolvat problema 3265 la fel cu prima soluţie de mai sus. D-nul ATH. RADEV (Iambol, Bulgaria) a rezolvat în acelaş mod problema 3234.

Au rezolvat problema 3234, cu ajutorul coordonatelor baricentrice, D-nii: I. C. VASILIU, C. I. CIORĂNESCU, PAUL IONESCU, VALERIU MANAFU şi FILIP S. GOLDSTEIN. D-lor arată că punctul Q are ca coordonate baricentrice

($a^2$tgA, $b^2$tgB, $c^2$tgC),

şi este inversul reciprocului ortocentrului H, ceeace a fost arătat şi de D-nul GH. SIMIONESCU.

D-nul N. G. BOTEA a considerat şi cazul, mai general, când în locul punctului O se consideră un punct oarecare P ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) din planul triunghiului ABC şi facem apoi aceleaşi construcţii ca în cazul problemei 3234.

D-nii: I. C. VASILIU, PAUL IONESCU şi N. G. BOTEA au arătat că problema 3234 este un caz particular al unei teoreme mai generale din *Gazeta Matematică* Vol. XIII, pag. 173 şi *Gazeta Matematică* Vol. XXIX, pag. 291.

A rezolvat ambele probleme şi D-nul AL. AL. ROŞU.

---

## EXERCIŢII

65. Două patrate consecutive perechi diferă cu 364. Care sunt rădăcinile lor?

I. I. ILIUŢĂ.

R. Avem:

$$(x+2)^2 - x^2 = 4x + 4 = 364,$$

de unde ese $x = 90$ şi $(x+2) = 92$.

66. Să se rezolve în întregi pozitivi, mai mici ca 10, ecuaţia:

$$(x^2 - y)^2 - z(x^2 - y) + z = 1.$$

G. G. VASILIU.

R. Ecuaţia se poate scrie

$$(x^2 - y - 1)(x^2 - y - z + 1) = 0,$$

de unde

$$x^2 - y - 1 = 0, \qquad x^2 - y - z + 1 = 0.$$

$$y = x^2 - 1, \qquad z = x^2 - y + 1.$$

Prima dă soluţiile $x = 2$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 8$, cu $z$ oricare: 1, 2, 3, 2, 5, 6, 7, 8. A doua dă soluţiile:

$$x = 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4.$$

$$y = 1, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 9.$$

$$z = 1, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8.$$

67. Când ecuaţia:

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

are o rădăcină dublă celeilalte?

C. ŞTEFĂNESCU.

R. Avem:

$$x + 2\,x = 3\,x = -p, \qquad x \times 2\,x = 2\,x^2 = q$$

şi eliminând pe $x$ avem:

$$\frac{p^2}{9} = \frac{q}{2}.$$

## PROBLEME PROPUSE

3271 *). Dacă $u_i$ este un termen din şirul lui FIBONACCI, se cere a se simplifică raportul

$$\frac{u_{2n} + (-1)^n}{u_{2n-1}}$$

şi a-i găsi valoarea lui pentru $n = \infty$.

E. ŞTEFĂNESCU.

3291. In ce caz numerele *abc*, *bca*, *cab*, pot formă o progresiune aritmetică? Problemă analoagă, pentru progresiuni geometrice şi armonice.

E. ŞTEFĂNESCU.

*) *Erată.* Problema cu No. 3271 fiind aceeaşi cu cea din exerciţiul publicat la pag. 277, Anul XXIX, se anulează şi se înlocueşte cu aceasta.

3292. Când putem avea :

$$\varphi(N+1) < \varphi(N),$$

$\varphi(I)$ fiind indicatorul numărului I ?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

3293. Dacă procentul anual al unei sume dată cu dobândă este de $10^0/_0$, care este procentul lunar maximum şi minimum ?

I. IONESCU.

3294. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi $A_1B_1C_1$ triunghiul său complimentar. Să se demonstreze că centrele cercurilor lui EULER, a triunghiurilor BIC, CIA şi AIB sunt situate pe bisectoarele triunghiului complimentar $A_1B_1C_1$.

MICU GRÜMBAUM.

3295. Să se demonstreze că ortopolurile laturilor unui patrat în raport cu un triunghiu oarecare din planul patratului, sunt vârfurile unui pseudopatrat.

N. G. BOTEA.

3296. Pe laturile unui triunghiu ABC, se construesc trei dreptunghiuri, având diagonalele egale. Fie D,E,F centrele acestor dreptunghiuri, iar D',E',F' simetricele lor în raport cu BC,CA,AB. Să se demonstreze că triunghiurile ABC,DEF,D'E'F' sunt ortologice, centrele de ortologie fiind colineare.

M. GHERMĂNESCU.

3297. Fie $l_a$ , $l_b$ , $l_c$ lungimile transversalelor unghiulare $AD_a$ , $BE_b$ , $CF_c$ care trec prin punctul lui NAGEL al unui triunghiu ABC. Să se demonstreze că, între elementele triunghiului, avem relaţiunea

$$\frac{l_a^2}{r_a h_a} + \frac{l_b^2}{r_b h_b} + \frac{l_c^2}{r_c h_c} = \frac{4R}{r} - 5.$$

OVIDIU G. POPEA.

3298. Să se dea criteriile, care permit să se aranjeze în ordinea mărimei, cantitatea reală $a$ dată şi rădăcinile ecuaţiei

$$a^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

$a_1$, $a_2$, $a_3$ fiind reali.

Din aceste criterii, să se deducă acele care permit a recunoaşte semnul rădăcinilor ecuaţiei.

TH. ANGHELUŢĂ.

3299. Dacă $a$, $b$, $c$ sunt laturile unui triunghiu ABC, să se demonstreze relaţiunea:

$$\begin{vmatrix} b\cos B & -c\cos C & a\cos A \\ -c\cos C & -a\cos A & -b\cos B \\ b\cos B & 2c\cos C & 2a\cos A \\ -c\cos C & -2a\cos A & -2b\cos B \\ b\cos B & -c\cos C & 2a\cos A \\ -c\cos C & -a\cos A & -2b\cos B \end{vmatrix} = abc.$$

N. BOTEA.

3300. Pe roata de comandă a unui motor cu benzină, cu diametrul exterior 1,520 m., se înfăşoară o frânghie ABCD cu diametrul 36 mm., B şi C fiind punctele unde frânghia părăseşte roata, A şi D capetele frânghiei (AB şi CD sunt tangente la cerc). Capătul A al frânghiei este fixat la un diametru. De capătul D, atârnă vertical un platou, pe care se pun greutăţi. Pentru a asigură stabilitatea sistemului, se mai leagă de punctul C un dinamometru, ataşat la un punct fix, pe o direcţie care coincide aproximativ cu CD.

Greutatea capului de frânghie CD, împreună cu platoul, este 6,300 kg., iar tensiunea iniţială a frânghiei, datorită greutăţii ei şi citită la dinamometrul A, a fost 12,360 kg. După ce s'a pornit motorul, pentru a aveà echilibru, s'a pus în platou 435 kg., iar dinamometrul A a arătat, în timpul experienţei, în mediu 80 kg., iar cel din C, 52 kg. La începutul experienţei, contorul de viteză arătà 10.782; iar la sfârşit, 50.736 învârtituri complete. Experienţa durând 5 ore şi 25 minute, se întreabă cât a consumat motorul pe cal-vapor şi oră, ştiind că în timpul experienţei s'au consumat 126 kg. benzină.

OCTAV ORĂNESCU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Bleiweiss P.* (3283, E); *Blumen M.* (3162, 67, 233, E); *Botea N.* (3195, N); *Brădeţeanu C. I.* (3280); *Călin G.* (3243); *Cohn H.* (3266); *Cojoc Gh.* (3263, 74); *Dânga V.* (3266); *Dermer M.* (3274, 80); *Diaconescu V. T.* (3102, 248); *Dorneanu V.* (3229); *Drăghicean M.* (3264, 65, 74); *Foca I.* (E, R); *Gaiu Em.* (3248, 85); *Georgescu M.* (3229, R); *Ghelber M.* (P); *Gheorghiu Gh.* (3263); *Goldstein F.* (3131); *Grünstein E.* (3274, 80); *Iacob St. F.* (3248); *Ionescu Bujor C.* (3248, 83); *Istinie I. C. Brezuica* (3248, 66); *Kahane Arno* (3285, 89, P); *Katz L.* (3233); *Lazanu N. V.* (3266); *Leon S.* (3184); *Manolache I. V.* (3266); *Marcovici H.* (2929, 3263); *Massler M. E.* (3102); *Mihăescu St. N.* (3102); *Mihăilescu A. C.* (3234); *Mladenovici Al.* (3273); *Nestor G. D.* (3222); *Opran A. Al.* (3102); *Pălărieru Eug.* (3131); *Paszko W.* (3219, 29); *Popa I.* (3102); *Popea O.* (3190, 200, 73); *Popescu A. D.* (3277); *Popescu N. C.* (3273); *Popovici C. Const.* (3131); *Popovici T. M.* (3102); *Popovici D. P.* (2929, 3184, 280); *Puşcă V. T.* (3266, 80); *Rabinovici H.* (3289); *Reinhorn B.* (3184); *Segârceanu C. N.* (3102); *Spathy I. R.* (3102); *Tauber Al.* (3131); *Teodorescu N.* (2298, 3059, 263, P); *Vârlan V.* (3229); *Vasiliu C. I.* (3273); *Zane I. Gh.* (3102).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 944, 2408, 773, 856, 79, 3092, 163, 230, 32, 37, 41, 59, 69, 73, 82 și 87 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

# Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

## 29 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme (Epuizată).

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

Asociația pentru cultura și literatura poporului Român din Sibiu

# ETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1925.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

## SUMARUL

1. Problema simultaneității . . . . . *G. Zapan.*
2. Patrate decapitate (urmare și sfârșit) . . *Emil Ștefănescu.*
3. Premiile „Gazetei Matematice" pentru concursul ținut în anul 1924.
4. Note Matematice: 62—66.
5. Bibliografii.
6. Cereri: 124.
7. Chestiuni de examen.
8. Probleme rezolvate: 2841, 3093, 3102, 3105, 3131, 3191, 3280.
9. Exerciții: 68—73.
10. Probleme propuse: 3301—3310.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 152

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **A. Saligny,** Inginer Inspector General, Membru al Academiei Române, Profesor onorific şi Preşedintele Consiliului de perfecţionare la Şcoala Politechnică din Bucureşti; **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89, 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 92, 94, 208, 20, 26, 28, 30, 32, 38, 40, 49, 55, 57, 58, 60, 62, 69, 70, 72, 75, 76, 78, 79, 82, 84, 88, 91, 92, 94, 95, 96, 98, 99, 300, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXX *SUPLIMENT* No. 10

# DARE DE SEAMĂ

## asupra mesei comune a membrilor şi corespondenţilor „Gazetei Matematice", din seara de 25 aprilie 1925, cu prilejul Concursului anual.

Tot mai în urmă rămâne războiul general, şi totuşi nu se vede pe aproape momentul când toate alcătuirile din ţara noastră îşi vor fi reluat mersul normal şi progresând. In aşteptare, atmosfera e tot mai încărcată, pedeoparte de patimi care isbucnesc necruţătoare şi de pofte care se întreciocnesc insatiabile şi pedealtă parte, de deziluzii pentru toţi cei cari aşteptau să vadă după războiu, îndreptându-se toate, ca prin farmec.

In acestă atmosferă, e neîndoios că tot mai rare sunt exemplele de muncă dezinteresată, de entuziasm statornic şi sentimente generoase.

Iar dintre aceste exemple, credem că şi mai rare sunt operele utile şi continuu susţinute, care prin singurele mijloace de mai sus, să răuşiască a culege necontenit laurii succesului, pe teren ştiinţific, educativ şi patriotic, aşa cum răuşeşte „G. M".

Aceste gânduri şi alte multe, din cele mai spre lauda „Gazetei Matematice", au trebuit desigur să se nască în mintea tuturor celor care au avut mulţumirea să ia parte la tradiţionala *masă comună*, din seara de 25 aprilie, cu care s'a încheiat Concursul din anul acesta.

Pentrucă *tradiţia* este un element din cele mai respectate în sânul Societăţii noastre, cu satisfacţie trebue să menţionăm că *Fabrica de Chibrituri şi Timbre-Filaret*, a respectat-o şi anul acesta cu aceeaşi dragoste cu care ne-a deprins de mult să o vedem îmbrăţişând toate manifestaţiunile Gazetei, organizând şi de data aceasta întâlnirea noastră sărbătorească anuală.

Au răspuns chemării festive a Gazetei, următorii membri: Th. Angheluţă, I. Banciu, Al. Bunescu, I. Buşilă, I. Chiţulescu, V. Cristescu, G. I. Dumitrescu, Colonel C. Felix, Gh. Em. Filipescu, M. Ghermănescu, A. G. Ioachimescu, Al. Ionescu, I. Ionescu, Gh. Iliescu, C. Malcoci, Cr. Mateescu, Cl. Mititelu, I. Mititelu, G. Nichifor, O. Onicescu, C. Orăşanu, I. Popescu, M. Saligny, C. Sfinţescu, D. Stan, A. Thierrin, O. Ţino, Gh. Ţiţeica, I. Vardala, I. Vasilescu, Gr. Zamfirescu şi Căpitan Gr. Zapan, iar dintre corespondenţi, candidaţii dela Concursul anului acestuia şi anume: T. Angelescu, M. Bernstein, N. Beschea, D. Blumenfeld, O. Bolgiu, N. Botea, G. Călin, G. Cazan, C. Ciorănescu, G. Cojoc, G. David, M. Georgescu, C. Ionescu-Bujor, S. Katz, I. Miu, M. Pătroianu, I. Popa, C. Popescu, Th. Popovici,

Al. Roşu, Ide Arie Schächter, O. Schächter, C. Schönfeld, A. Stoica Th. Stoicescu, T. Udrisky, I. Vasiliu, B. Vulpanovici, L. Weiss şi S. Weiss.

După luarea contactului şi-a ţuicei româneşti bine garnisite, aceeaşi plăcută impresie ca şi în anii trecuţi, de sărbătorească şi generoasa ospitalitate, ne cuprinde pe toţi, intrând în sala pavoazată cu steaguri, verdeaţă şi lumini multicolore, unde ne aşteaptă masa înflorită şi atrăgătoare. Dela început deci, sufletele tuturor au trebuit să se pună la unison întru amintirea meselor comune din urmă şi întru gratitudine pentru organizatori. In mod firesc, amintirea fostului Director General al Regiei, I. Teodor, se trezeşte în fiecare din cei de faţă şi, la îndemnul D-lui Gh. Ţiţeica, o clipă, cu toţii ne întoarcem gândurile către el, cu pietate şi nesfârşit regret de a nu-l mai avea între noi.

Atmosfera de familie a Gazetei este astfel, dintr'odată, realizată sufleteşte, Comunitatea de gânduri şi sentimente readuce îndată voioşia, care domneşte apoi netulburată, dela aşezarea tuturor în jurul mesei în formă de U — cu cei 4 întemeetori şi stâlpi pururea neobosiţi ai Gazetei în frunte, — şi până către 3 dimineaţa.

Dar pentru prima oară, taraful de excelenţi lăutari cari au desfătat conform tradiţiei pe conmeseni, a avut un *serios* şi... *nefericit* concurent: postul de radiotelefonie înjghebat şi instalat în sală de către D-l I. I. Chiţulescu. Serios, pentru că a pus la grea încercare nemăsurata răbdare a D-lui Chiţulescu, care i-a sacrificat mai bine de două ore precum şi.... partea D-sale din bucatele alese ce s'au servit în acest timp; şi *nefericit*, fiindcă n'a răsplătit decât vag şi capricios bunăvoinţa D-sale de a ne face să auzim concert din Roma, în locul câtorvă cântece româneşti.

In tot cursul mesei, glumele se încrucişează, mulţumirea sufletească e deplină şi generală, voioşia şi entuziasmul pentru Gazetă ne stăpânesc pe toţi.

Şi pentrucă nicăeri mai mult ca la G. M., nu se cultivă armonizarea plăcutului cu utilul, ce ar fi putut fi mai potrivit pentru aceste momente de destindere sufletească, decât urmărirea unui film atât de instructiv ca acel care arată instalaţiile şi realizările uzinelor de locomotive Schwartzkopf din Berlin!

La şampanie, D-l V. Cristescu începe seria toasturilor, închinând pentru Cel care veghează la destinele Ţării, pentru *Majestatea Sa Regele*. In sunetul Imnului Regal, ascultat în picioare, toţi conmesenii aclamă pe *Suveran*.

D-l I. Ionescu ia cuvântul imediat apoi, spre a vorbi de 2 dintre mulţii binevoitori de care s'a bucurat întotdeauna G. M. Cel dintâi e D-l C. Malcoci, Directorul Fabricei de Chibrituri şi Timbre, care nu numai că a dovedit neîntemeiată bănuiala că după moartea lui I. Teodor masa comună a Gazetei nu se va mai puteă bucură de aceeaşi splendoare din trecut, ci a ţinut să arate că o poate şi întrece. La mulţumirile ce D-l Ionescu exprimă D-lui Malcoci, întreaga asistenţă se asociază cu entuziasm şi recunoştinţă.

Cel de-al doilea binevoitor anunţat e..... *un necunoscut*, care a pus la dispoziţia Gazetei suma de 10.000 lei pentru a se împărţi între cei reuşiţi la Concursul de anul acesta. Concurenţii cât şi membrii de faţă au primit această veste cu egală bucurie şi cu aceeaşi sinceritate au aplaudat urarea D-lui I. Ionescu ca asemenea generoşi donatori să se înveascâ mereu şi în număr tot mai mare.

Inainte de a-şi începe tradiţionala şi totdeauna înălţătoarea-i cuvântare morală, D-l Gh. Ţiţeica, în asentimentul întregei asistenţe, adresează cuvenitele mulţumiri D-lui I. Chiţulescu pentru perseverenţa cu care s'a obosit timp de 2 ore în dorinţa de a ne procură o plăcere cu totul rară şi nouă.

In prima parte, cea poetică, a cuvântării sale, D-l Ţiţeica compară aşteptarea înfrigurată a tuturor, când iarna se prelungeşte mai mult ca de obiceiu, dea vedeà apărând mugurii,—cu aşteptarea întemeetorilor Gazetei de a vedeà în fiecare an, apărând printre corespondenţii acestei reviste, noi talente matematice, adică ceeace numeşte D-sa *„muguri matematici"*.

„Considerându-i dintre aceştia pe concurenţii din anul acesta, le urez să trăiască ani mulţi şi să realizeze aşteptările îndrumătorilor lor dela Gazetă"!

Prelungind apoi imaginar masa, pentru a coprinde pe toţi acei cari au luat parte la Concursurile din trecut, D-l Ţiţeica închină pentru ei şi spune că este fericit că poate vedeà printre *membrii Societăţii G. M.*, din aceşti foşti *concurenţi*. D-sa arată cu câtă mulţumire sufletească au putut admirà zilele din urmă, întemeitorii Gazetei, spectacolul ce li l'au dat asemenea *foşti* concurenţi, care acum examinau la rândul lor pe cei *actuali*.

„Dar gândul nostru nu trebuie să se oprească numai la concurenţi, ci trebuie să cuprindă pe toţi *corespondenţii*, căci şi aceştia au partea lor de merit, şi asupra lor se exercită, de asemenea, acţiunea educatoare a Gazetei".

„Massa acestora, cari se găsesc astăzi răspândiţi în toate ramurile de activitate, şi în care, în 30 ani de muncă statornică şi migăloasă G. M. a reuşit să infiltreze un spirit distins de ordine, de probitate şi de dragoste pentru adevăr, constituie fundamentul edificiului măreţ, la care lucrează ea".

„Iar întemeetorii Gazetei se consideră pe deplin răsplătiţi, când văd că aceştia păstrează spiritul distins căpătat dela Gazetă şi-l duc cu ei peste tot.

„Dar iată că între concurenţii de anul acesta, o împrejurare m'a făcut să bănuiesc că ar existà un alt spirit decât cel pe care-l cultivă Gazeta.

„Umblând printre băncile în care concurenţii îşi compuneau tezele, am găsit o foaie pe care un candidat scrisese : *„Toate-s deşertăciune şi nebunie!"*

„A vrut candidatul acela să înţeleagă oare că iluziile noastre, ale celor ce ne ocupăm de G. M. sunt o nebunie zadarnică ? Nu se poate ! Iluziile noastre s'au transformat până acum în atâtea realităţi frumoase.

„Cuvintele acelea se refereau poate la munca şi sforţările proprii ale candidatului ? — Nu pot crede, pentru că a reuşit să rezolve problema.

„Dacă e greu de găsit o explicaţie acelor nenorocite cuvinte, nu e mai puţin adevărat că ele denotă un pesimism curios şi dăunător, care nu se potriveşte cu spiritul întreţinut de „Gazeta Matematică".

Ajungând deci la încheierea morală a cuvântării sale, D-l Ţiţeica spune tinerilor concurenţi că încrederea în cunoştinţele şi puterea noastră este un lucru esenţial şi indispensabil în viaţă.

„Şi încrederea nu e suficient s'o avem numai în ce ne priveşte pe fiecare, dar şi toţi la un loc trebue să avem încredere în viitorul acestei Ţări.

„Nu e vorba însă de încrederea trufaşă, care e din contră deşartă.

„Increderea în noi trebue să o avem însoţită de o necontenită dorinţă de perfecţionare, de speranţa de a deveni mai buni şi mai folositori. Şi cu

toţii la un loc, trebue să căutăm a deveni *mai puţin răi.* Fiindcă nu sunt toţi buni. Exemple rele se pot cită chiar cu privire la concurenţii Gazetei, dintre cari s'a găsit, în anii trecuţi, unul care a furat hărţi din Institutul unde a fost găzduit; anul următor el a fost prins. Dar mai în fiecare an, tinerii găzduiţi cu atâta bunăvoinţă în acea Şcoală, abuzează de ospitalitatea ce li se oferă.

„Gazeta organizează concursurile şi vă chiamă aici ca să vă înălţaţi, nu să vă coboriţi!

„Şi iată dece e necesar a vă spunem în fiecare an câtevà vorbe moralizatoare.

„Momentele sunt grele pentru întreaga Ţară, la graniţele căreia, din toate direcţiile, se ridică spectre tot mai ameninţătoare. Dacă sufletele noastre vor fi josnice, jos vom cădeà; iar de ne vom înălţà, sus vom fi!

„Cel puţin noi, pe care Matematica ne poartă cu mintea pe culmile abstractului, să ne curăţim sufletele pentru a fi demni de înălţimile acestor culmi.

„Iar speranţele şi iluziile noastre, pe care nimic nu trebue să le distrugă, — niciodată — să ne străduim a le transformà în realităţi bune.

„Pentru aceste frumoase realizări, ridic paharul meu".

Cuvintele D-lui Gh. Ţiţeica, reliefate de minunatul său dar de expunere, nu puteau să nu se sape adânc, în sufletele tinerilor concurenţi, şi aceasta a ţinut s'o afirme în primul rând D-l Ciorănescu, elev în clasa VIII dela Liceul Mânăstirea Dealului, când a cerut îngăduiala să adreseze câtevà cuvinte celor 4 evanghelişti ai „G. M.", D-nii: V. Cristescu, A. Ioachimescu, I. Ionescu şi Gh. Ţiţeica.

D-l Ciorănescu roagă să nu se dea altă însemnătate cuvintelor colegului său, la care s'a referit D-l Gh. Ţiţeica, decât acea cuvenită unei manifestări a emoţiei, inerente clipelor dinaintea unui examen, sau în general, din preajma unei încercări grele.

Înfierează pe concurentul din trecut, care a putut să fure.

Ultimele cuvinte ale D-lui Ciorănescu sunt apoi menite să exprime mulţumirile entuziaste şi întreaga recunoştinţă a celor 30 de concurenţi din anul acesta, cari se angajează solemn să depună toate sforţările pentru a ajunge să realizeze speranţele ce-şi pun în ei profesorii şi îndrumătorii lor dela „G. M."

D-l A. Ioachimescu, spre deosebire de D-l Gh. Ţiţeica a cărui cuvântare a avut în vedere partea înaltă, ideală a manifestărilor Gazetei, se referă la chestiunile practice de care e legată viaţa materială a Gazetei.

D-sa aduce meritate elogii, tuturor celor cari au contribuit la pregătirea Concursului. Astfel D-sa citează în aclamaţiile asistenţei pe D-l Th. Angheluţă, profesor la Facultatea din Cluj, care a pregătit într'un termen extrem de scurt chestiunile de examen şi pe D-l Tr. Lalescu, care a completat din buzunarul său cheltuiala cu transportul concurenţilor pe calea ferată, deoarece n'a putut fi obţinut integral gratuit.

Urmând cu entuziasm exemplul D-lui A. Ioachimescu, toţi conmesenii manifestează apoi întreaga lor simpatie recunoscătoare pentru D-l H. Thierrin care oferă ospitalitatea Institutului său, în fiecare an, concurenţilor Gazetei şi pentru D-l G. Borneanu, casierul Societăţii, a cărui muncă continuă contribue atât de puternic la propăşirea Gazetei.

Nu trebue să se uite spune apoi D-l A. Ioachimescu, că dacă D-lui C. Malcoci trebue să-i mulţumim pentru directivele ce-a dat la organizarea atât de fastuoasă a acestei mese comune, meritul execuţiei demne de toată lauda, revine D-lui Gh. Iliescu, Sub-Directorul Fabricei de Chibrituri. „D-l Iliescu dealtfel depune o activitate susţinută şi impovorătoare, îngrijind de redactarea şi tipărirea Gazetei, făcând toate corecturile, supraveghiând expediţia, lansând toate convocările ş. a. m. d. Toate acestea cer D-lui Iliescu o muncă şi-o bunăvoinţă mai presus de orice laudă. Datori suntem să-i aducem toate mulţumirile".

D-l Iliescu este aclamat şi felicitat de toţi pentru frumoasa sa activitate.

D-l Avocat Al. Ionescu, unul din cei mai vechi prieteni şi mai neclintiţi susţinători ai Gazetei, atrage atenţia tineretului de faţă că nu trebuie să-şi închipue că în viaţă le va ajunge numai ceeace vor puteà desprinde din cărţi, ci să se pătrundă de nevoia de a cunoaşte viaţa. D-sa îi sfătueşte, pentru aceasta, să-şi îndrepte mereu privirile către înaintaşii şi îndrumătorii lor de aci, şi în special către cei 4 titani ai Gazetei, căutând să imite exemplul lor de muncă neîntreruptă, dezinteresată şi entuziastă, susţinută de sufletul lor generos.

„Ca să vă completaţi pregătirea pentru viaţa publică de mai târziu, să vă pregătiţi şi sufletul. Aceasta se va face numai prin contactul cu generaţia înaintaşă, ale cărei realizări sunteţi meniţi a le aduce mai departe, — misiune tot atât de grea pe cât de frumoasă".

„Vă doresc să nu risipiţi patrimoniul Gazetei, ci să-l duceţi mai departe timp îndelungat, pe calea celor mai neaşteptate progrese".

D-l V. Cristescu citeşte telegrama adresată cu această ocazie, din Paris, de către D-l Căp. I. Linteş, întemeietorilor şi membrilor „G. M."

D-l Vardala coprinde în sărbătorirea de astăzi pe toţi vrednicii colaboratori şi corespondenţi din rândurile Armatei, felicitându-i pentru activitatea lor extra-militară dedicată Gazetei.

După D-sa, D-l Gh. Nichifor se ridică pentru a scoate în relief *valoarea* sfaturilor pe care D-l Ţiţeica le dă în fiecare an concurenţilor Gazetei. „Fac aceasta, spune D-sa, sub impresia adâncă ce mi-a făcut recitirea din întâmplare a cuvintelor *profetice* rostite de D-l Ţeţeica la masa comună din 1916".

Considerând că acele cuvinte nu îngădue să fie comentate spre a nu fi întunecate, D-l Nichifor reciteşte pasagiile în care D-l Ţiţeica profetizà că războiul neamului de va fi, nu va aveà urmări rele pentru neamul nostru, dar cu o viziune uimitor de clară, atrăgea atenţia asupra *imenselor greutăţi ce vor veni după războiul european*, pentru popoarele nepregătite şi neprevăzătoare!

In ce priveşte datoria de a pregăti cu grije viitorul, cuvintele D-lui Ţiţeica din 1916, se potrivesc tot atât de bine şi astăzi, spune D-l Nichifor, întrucât cu tot idealul naţional împlinit, *nu e timpul să dormim pe laurii biruinţei.*

Dorind ca generaţia care se ridică să fie tot aşà de viguroasă ca generaţia care a făcut România Mare, D-l Nichifor încheie ca şi D-l Ţiţeica în

1916: „Să trăiţi şi să realizaţi speranţele noastre"!, dar adaogă şi urarea de viaţă lungă *Profetului* şi celorlalţi 3 *evanghelişti:* Andrei, Ioan şi Vasile.

Se părea că vorbele şi indemnurile bune vor lua sfârşit cu această urare, care stă pe buzele tuturor şi la care din toată inima se asociază toţi cei de faţă, când D-l A. Bunescu ia cuvântul din partea seriei de *membri* tineri ai Societăţii, cari ieri se găseau printre *concurenţi* şi palpitau aşteptând consacrarea vre-unui premiu.

Comparând activitatea de atunci cu relativa lor inactivitate de astăzi, în ce priveşte Gazeta, D-l Bunescu stabileşte definiţia D-sale relativă la *membri platonici* şi-şi ilustrează definiţia pe loc, dându-se ca exemplu.

D-l Bunescu explică apoi cauzele relativei lor neactivităţi la Gazetă, dar asigură că simt adânc remuşcările de câteori se regăsesc în contact cu membrii *activi* şi în special cu „stâlpii" Gazetei. Inchee, adresându-se concurenţilor cu sfatul de-a se strădui să nu devină *membri platonici*, ci să persevereze neîntrerupt în activitate pe ogorul Gazetei, pentru a fi cruţaţi de remuşcări şi a avea, din contră, satisfacţiile pe care orice activitate dezinteresată nu poate întârzia să le aducă.

Chestiunile ridicate de D-l Bunescu au darul să stârnească controverse, care dau loc imediat la un întreg şir de replici şi răspunsuri, presărate de glume şi urmărite cu deosebit interes în atmosfera de bună dispoziţie generală.

Cel dintâi, D-l I. Ionescu, referindu-se la scuzele *membrilor platonici* de a nu puteà lucrà pentru G. M. atât cât ar dorì, spune că departe de exclusivismul lui Platon, care scrisese pe uşa sa: „Nimeni să nu intre aci, dacă nu e geometru!", G. M. se mulţumeşte să ceară membrilor ei numai bunavoinţă. Şi cum D-l I. Ionescu, ştie că toţi câţi sunt în jurul G. M. au multă bunăvoinţă pentru ea, crede că trebue să se mulţumească chiar şi *membrilor platonici* şi le urează: *Să trăiască!*

D-l A. Ioachimescu, merge mai departe şi atrage atenţia că dacă îndemnul D-lui Bunescu, către tineretul de faţă, de a se ocupa toată viaţa de matematică ar fi urmat, ar fi o nenorocire. Unii vor urma desigur matematicile mai departe, dar nu trebuesc uitate carierele practice a căror pregătire cere învăţământul matematic la bază. Sunt de faţă un mare număr de ingineri şi militari, pe lângă profesori şi toţi sunt de o potrivă de utili. Chiar D-l Bunescu, care a fost un bun matematic, foloseşte poate mai mult Ţării astăzi, ca industriaş. Deci, ceea ce crede D-l Ioachimescu, că au de cerut întemeetorii Gazetei dela tineret, este să păstreze în toate ramurile de activitate în care s'ar găsi mai târziu, *metoda* matematică şi să păstreze totdeauna o bună amintire celor dela G. M., cari se străduesc să-i pătrundă de un spirit de muncă onestă, hărnicie şi dragoste de adevăr.

D-l Gh. Ţiţeica e de părere însă că D-l A. Ioachimescu are o concepţie prea largă în această privinţă şi ca s'o dovediască dă două exemple: primul e însuşi D-l A. Ioachimescu, care oricât ar vrea să se lase de matematici, nu poate. Nu mai departe, la acest concurs al Gazetei chiar, asistând la oral, până în cele din urmă n'a putut rezistà, şi a examinat şi D-sa pe candidaţi. Al 2-lea exemplu îl dă D-l avocat A. Ionescu, care a trecut la început prin facultatea de matematici şi care păstrează atâta dragoste G. M., pe care a sprijinit-o

întotdeauna. „La începuturile G. M., D-l A. Ionescu, îngrijia de toată administraţia Gazetei, întâi ascultând de D-l I. Ionescu, fratele D-sale, pe urmă fără îndemnul nimănui, din dragoste. Chiar şi acum, când e atât de ocupat, iată-l aci, între noi.

Iată dar că *dragostea de matematici* rămâne, este *invariantă* faţă de timp. Pentru această dragoste de matematici, în felul libaţiunilor antice, D-l Ţiţeica propune să închinăm un pahar.

Dintre *evanghelişti*, singur D-l V. Cristescu nu-şi spusese cuvântul în chestiune. Dar iată-l şi pe D-sa ridicându-se pentru a apăra calea de mijloc.

D-l V. Cristescu readuce chestiunea la sfera practică a Gazetei, care nu poate există fără redactori, după cum „*concurs*“ n'ar putea avea loc fără candidaţi. In primul rând, D-l Cristescu, închină pentru candidaţii dela Concursul de anul acesta, care-au muncit pregătindu-se, şi-au renunţat la o parte din vacanţă, spre a veni aci să se supună, de bună voie, unui examen.

In ce priveşte pe *membrii platonici*, D-l V. Cristescu îi întreabă ce s'ar face D-nii: G. Borneanu şi Gh. Iliescu în ziua când n'ar avea materie pentru Gazetă. Deaceea, D-l V. Cristescu doreşte ca dintre cei 104 membri ai Societăţii, cât mai mulţi să fie *activi* şi nu *platonici*.

Fără deci a îndepărtă pe tineret de carierele practice, D-l V. Cristescu nu e nici de părerea D-lui A. Ioachimescu, şi îi îndeamnă să nu înceteze de a lucrà pentru Gazetă. Paharul său, D-l Cristescu îl închină deci pentru acei ce vor continuà pe *fondatori* şi pe actualii *membrii activi!*

D-l A. Ioachimescu nu e de acord cu D-l V. Cristescu şi spune în replică, că dacă e îndulgent pentru *membrii platonici*, e pentrucă are credinţa că în orice moment pe lângă aceştia se vor găsì şi *membri activi*.

Dar D-l Ţiţeica revine la punctul său de vedere, adresându-se D-lui A. Ioachimescu cu vorbele: „Nu le mai spune, că de lăsat se lasă singuri!“

Pentru a doua oară, ia apoi cuvântul D-l Avocat A. Ionescu, rugând pe tinerii veniţi aci din toate unghiurile ţării să se facă purtătorii de îndemn ai Gazetei, şi să ducă cu ei vestea că astăzi când toate se *comercializează*, se mai găsesc totuşi apostoli în ţara aceasta, care veghează şi întreţin făclia ştiinţei. „Ar fi un mare câştig pentru ţară, dacă întreaga suflare cultă a ei ar trece pe la acest mare Institut de cultură care este „G. M.“, pentrucă pentru orice ramură de activitate, matematica este bună, chiar şi pentru avocatură“.

D-l A. Ionescu n'are decât cuvinte de recunoştinţă pentru cei 4 distinşi şi desinteresaţi fondatori şi conducători ai Gazetei, dela care a avut fericirea să ia îndemn şi D-sa şi urează tineretului să ajungă să ia cu demnitate locul celor ce stau azi în fruntea instituţiei.

La rândul său, D-l O. Ţino, ţine să aducă şi D-sa prinos de recunoştinţă şi să ureze viaţă îndelungată fondatorilor.

„E o înălţătoare şi nemăsurată plăcere pentru noi, când foştii noştri profesori ascultă pe candidaţii dela concursurile Gazetei, lângă noi“.

Referindu-se apoi şi D-sa la cuvintele D-lui A. Bunescu, D-l Ţino crede că trebue să mulţumească inginerilor tineri care stau la dispoziţia Gazetei pentru a-i împlini nevoile, căci profesorii singuri nu ar avea posibilitatea s'o facă. In special, munca depusă de D-nii: Gh. Borneanu şi Gh. Iliescu merită

toată recunoştinţa din partea Gazetei. Să le urăm sănătate şi viaţă lungă! Să trăiască!

Vorbele D-lui O. Ţino sunt acoperite de o caldă manifestaţie a tuturor celor prezenţi.

Apoi, D-l Ţino închee, amintind că dintre fondatori singur D-l Gh. Ţiţeica nu este *decât* profesor şi speră că totdeauna inginerii vor sprijini Gazeta, de oarece puţini dintre cei pregătiţi în spiritul şi de către Gazetă intră mai târziu în învăţământ.

Dar timpul a trecut pe nesimţite şi iată-ne la orele 2 din noapte încă la masă, prinşi în farmecul discuţiilor înălţătoare, pe deasupra cărora planează atmosfera familiară a Gazetei şi voia bună a tuturor.

E timpul acum să se treacă la producţiile artistico-literare, de oarece nu numai tradiţia meselor comune o cere, dar multe talente tinere aşteaptă să se releve.

Intr'adevăr, imediat D-l I. Ciorănescu reuşeşte să captiveze atenţia şi să măgulească spiritul matematicianilor de faţă, citind cu talent poezia sa: *Ore de matematici* (Convorbire cu o scolăriţă), în care termenii matematici se îmbină fericit cu gingaşe imagini poetice şi mult umor.

D-nii: M. Ghermănescu şi Colonel Liteanu au delectat apoi pe toţi cu frumoase arii, cântate cu minunatul talent ce ne-au dat şi alte dăţi ocazia să le admirăm.

Veselia e mare, se încinge hora tradiţională în care rivalizează de zel cei mai în vârstă cu cei tineri, alţi talentaţi concurenţi se mai produc, — şi după câtevă momente de convorbire intimă între membrii Gazetei şi corespondenţi, masa ia sfârşit pe la orele 3 dimineaţa, adăogând încă o amintire frumoasă la lanţul neîntrerupt de satisfacţii ce procură adepţilor ei *Gazeta*.

Ing. D. Stan.

# PROBLEMA SIMULTANEITAŢII.

Faimoasa teorie a relativităţii pasionează, de câţivă ani încoace, întreaga lume ştiinţifică. Consecinţele curioase şi uneori fantastice ale acestei noui şi îndrăzneţe teorii au dat naştere la discuţii şi controverse nesfârşite; căci, dacă se obţin unele verificări, în domeniul relativităţii — bine înţeles în limita aproximaţiilor posibile — se pare totuşi că această teorie nu ar închide, în punctul ei de plecare, un fundament logic.

Vom discută, principial, fundamentul logic al relativităţii într'un studiu viitor; deocamdată, vom insistă doar asupra unei chestiuni în legătură cu relativitatea şi anume asupra problemei simultaneităţii, care se pare că nu şi-a găsit încă o soluţionare definitivă.

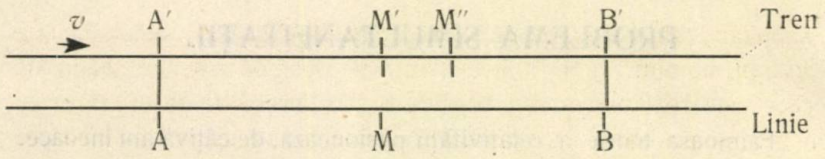
Expunând, în cele ce urmează, şi punctul de vedere al lui BERGSON asupra problemei simultaneităţii — căci teoria relativităţii a dat lui BERGSON putinţa unei minunate aplicaţii a sistemului său de filozofie—prin soluţionarea pe care o vom da noi problemei, vom fi conduşi direct către critica filozofiei lui BERGSON, care dimpreună cu teoria lui EINSTEIN ar constitui desigur două mari evenimente ale secolului.

Problema simultaneităţii este formulată de EINSTEIN în exemplul următor:

*Un tren foarte lung merge pe linie cu o iuţeală v. Două raze de lumină, ieşite din punctele* A *şi* B *de pe linie, sunt simultane în punctul* M, *mijlocul distanţei* AB. *Dar punctelor* A *şi* B *de pe linie le corespund punctele* A' *şi* B' *de pe tren. Fie* M' *mijlocul vectorului în mers; acest punct coincide cu punctul* M, *în clipa în care se produc luminile. Se pune întrebarea: evenimentele* A *şi* B *fiind simultane în raport cu punctul* M *de pe linie, sunt simultane şi în raport cu punctul* M' *din trenul în mers?*

Răspunsul lui EINSTEIN este negativ, stabilind principiul «relativităţii simultaneităţii». Iată cum argumentează el:

«Dacă trenul nu s'ar mişcă, atunci un observator aşezat în tren, în punctul M' (care s'ar confundă cu M), ar vedeă simultan cele două lumini A şi B. Dar, în realitate, trenul — şi cu el odată şi observatorul M' — se mişcă




în raport cu linia şi prin urmare observatorul merge în calea luminei care vine dinspre B (presupunem că trenul se mişcă în sensul AB) şi se depărtează de raza de lumină care vine dinspre A. Observatorul va vedeà deci lumina din B înaintea celei din A» [1]).

Asupra modului cum EINSTEIN a rezolvat problema, s'au ridicat proteste. Suficient să pomenim, printre adversari, pe BERGSON[2]) şi MARITAINE[3]). Ambii, luând de bază principiul invarianţei iuţelei luminei, ajung la concluzia perfect contrară aceleia la care a ajuns EINSTEIN, arătând că fenomenele simultane în raport cu linia ferată sunt simultane şi în raport cu trenul. BERGSON trage, de aci, argumente în sprijinul «timpului absolut». Dar, iată că astronomul francez CHARLES NORDMANN[4]) vine să aducă contra-argumente în favoarea lui EINSTEIN. De partea cui cade dreptatea?

Soluţia problemei se găseşte uşor, dacă ascultăm pe rând argumentările lui BERGSON, MARITAINE şi NORDMANN.

Iată ce spune BERGSON:

«Nu trebuie să uităm că trenul şi linia sunt în stare de mişcare reciprocă. EINSTEIN alege linia ca sistem de referenţă. Dar filozoful, care se întreabă dacă linia şi trenul au sau n'au acelaş timp real, adică acelaş timp trăit, sau putând să fie trăit, filozoful va trebui să-şi amintească neîncetat că nu are a alege între cele două sisteme: va pune un observator conştient în unul şi în cellalt şi va căutà pentru fiecare dintre ei timpul trăit. Să dăm drumul celor două lumini. Punctele de unde ele pornesc nu aparţin nici pământului, nici trenului; undele merg independent de mişcarea sorgintei. Va fi vădit atunci că cele două sisteme pot fi schimbate între ele şi că se va întâmplà în M' exact acelaş lucru caşi în punctul corespunzător M. Dacă M este mijlocul lui AB şi dacă în M se percepe

1) La Théorie de la Relativité restreinte et généralisée. (trad. Rouvière).
2) Durée et simultanéité. (Alcan).
3) Nouveaux débats einsteiniens. (Revue Universelle du 1-er avril 1923).
4) Einstein ou Bergson? (L'Illustration du 28 Juin 1924).

o simultaneitate pe linie, atunci se va percepe aceeaşi simultaneitate şi în tren, în punctul M', mijlocul lui A'B'. Deci, dacă se ţine seama de ceeace este real perceput, trăit şi dacă s'ar întrebă un observator real din tren şi un observator real de pe linie, se va găsi că avem aface cu un singur şi acelaş timp: ceeace este simultan în raport cu linia, este simultan şi în raport cu trenul».

De acord cu BERGSON, iată ce remarcă şi MARITAINE:

«EINSTEIN, în demonstraţia sa, compune iuţeala luminei cu iuţeala observatorului, urmând regulele ordinare de compunere ale iuţelelor. A spune, de pildă, că lumina merge cu o iuţeală de 300.000 km. pe secundă şi că observatorul primeşte imaginea din B înaintea celei din A, pentrucă el aleargă înaintea razei trimisă din B cu 100.000 km. pe secundă, adică iuţeala în raport cu el a luminii pornită din B este de 400.000 km. pe secundă, în timp ce iuţeala în raport cu lumina trimisă din A' este de 200.000 km. pe secundă... iată o contradicţie între atare afirmaţie, pe care o implică raţionamentul lui EINSTEIN şi principiul invarianţei iuţelii luminii, pe care el însuşi îl presupune necesar, fie ca o convenţie, fie ca o concluzie demonstrată».

Să vedem, în sfârşit, cum caută şi NORDMANN să soluţioneze problema în litigiu:

«Presupunem că observatorul M are la dispoziţie un dispozitiv, care i-ar permite, după dorinţă, să emită unde herţiene. Se ştie că aceste unde se propagă cu iuţeala luminei. La un moment dat, observatorul ar produce o emisiune instantanee de aceste unde. Acestea se vor propagà la dreapta şi la stânga şi ajungând în A şi B (unde am aveà dispuse, în prealabil, pe linie două puncte metalice fine, ajungând aproape în contact cu trenul) ele vor produce în fiecare din aceste puncte câte o scântee, care va străluci între linie şi tren. Scânteia strălucind în A, va lăsà urma în punctul A' al trenului, care este atunci vecin cu linia; scânteia strălucind în B, va lăsà urma în punctul B' al trenului, care este atunci vecin cu linia. Scânteile AA' şi BB' vor fi văzute simultan de către observatorul din M, adică se vor încrucişà exact în punctul M. Intr'adevàr, când două unde (luminoase sau herţiene), emanate în acelaş timp de către un centru, se întorc după un traiect de *du-te vino* între acest centru şi două puncte echidistante, de o parte şi de alta, experienţa dovedeşte că ele ajung întotdeauna în acelaş timp. Aşà

dar, cele două scântei AA' și BB' vor fi văzute simultan de către observatorul din M.

Vor fi ele văzute tot simultan și de către observatorul așezat în punctul M', care este mijlocul distanței A'B'?

Nu. Dacă lumina ar avea o iuțeală infinită, dacă propagarea ar fi instantanee, cum o implică noțiunea clasică a timpului absolut, este sigur că scânteile AA' și BB' vor fi văzute de către observatorul din M' în același timp în care ele ar străluci, și că, în momentul în care el le va vedea, A' ar fi încă vecin cu A, B' cu B și prin urmare M' cu M. Dar, în realitate, se știe că luminei îi trebuie un anumit timp pentru ca să meargă din punctele AA' și BB' pânăla observatori. In timp ce ea merge către ei, observatorul din M', târît de iuțeala trenului, se depărtează de observatorul din M, către dreapta. Când cele două raze de lumină ieșite din cele două scântei se încrucișează în M, punctul M' se găsește undevà spre B, de pildă în punctul M''. Și pentrucă cele două raze se întâlnesc în punctul M, rezultă necesar că raza ieșită din scânteia AA' ajunge în acest punct de încrucișare înainte de a ajunge în M'', în timp ce raza ieșită din scânteia BB' nu ajunge în acest punct decât dupăce a trecut prin M''. Deci, pe când observatorul din M vede cele două scântei în același timp, observatorul din M' (cu toate că este așezat cași M la egală distanță de punctele de strălucire) vede scânteia BB' înainte de a vedeà scânteia AA'».

D-l NORDMANN repetă întrucâtvà, sub o formă complicată, soluția lui EINSTEIN și crede că printr'aceasta soluționează problema, fără să ne arate însă care sunt erorile — dacă într'adevăr sunt — în soluțiile date de BERGSON și MARITAINE, care ajung la concluzii perfect contrare. Care este atunci cauza care face ca problema simultaneității a lui EINSTEIN să poată fi privită în două moduri, atât de diferite încât unul să excludă pe cellalt?

Să fie oare acì prăpastia dintre realitatea sensibilă și conceptele simbolice ale științei, concepție pe care vom vedeà că o susține BERGSON prin sistemul său?

Nu. Sunt acì de bună seamă, mai multe erori, de alt ordin.

(Va urmà). G. ZAPAN.

# PATRATE DECAPITATE. [1])

(Urmare)

*Cazul VI.* $2\beta < n < 2\alpha$.

Voiu deosebi două cazuri, după cum $n$ este pereche sau nepereche.

(*a*) $n$ pereche. Atunci luăm $n = 2k$, iar $\beta < k < \alpha$.

Punem $\alpha = k + u$, $\beta = k - v$, $u$ şi $v$ fiind numere pozitive şi întregi.

Inlocuind acestea în inegalitatea (7), găsim:

$$p \cdot \frac{5^v}{2^u} < 1 + \sqrt{1 + pq},$$

iar din (8) deducem:

$$p \cdot 5^{2v} > q \cdot 2^{2u},$$

deci:

$$\sqrt{\frac{q}{p}} < \frac{5^v}{2^u} < \frac{1 + \sqrt{1 + pq}}{p}.$$

Aci, aplicăm logaritmii şi găsim:

$$u \cdot \log 2 + \tfrac{1}{2}\log q - \tfrac{1}{2}\log p < v \log 5 < u \log 2 + \log\left(1 + \sqrt{1 + pq}\right) - \log p$$

şi împărţind peste tot cu log5, adică înmulţind cu $1/\log 5 = 1{,}43067$ obţinem:

$$0{,}43067u + 0{,}71533 \log q - 0{,}71533 \log p < v < 0{,}43067 \cdot u + 1{,}43067 \log\left(1 + \sqrt{1 + pq}\right) - 1{,}43067 \log p.$$

Inlocuind pe $\alpha$ şi $\beta$ în (3) şi lăsând zerorile la o parte, găsim:

$$A = 5^{u-v+1}\left(p \cdot 5^{2u} + q \cdot 2^{2v}\right).$$

Evident, dacă $p$ este pereche, mai putem înlătură încă o nulă, două sau trei, după cum $p = \mathcal{M}2$, $p = \mathcal{M}4$, $p = \mathcal{M}8$.

Acum voiu particulariză pe $p$ şi $q$ ţinând seamă că $pq \leqslant 9$.

$q = 1$ dă:

$$A = 5^{u-v+1}\left(p \cdot 25^u + 4^v\right),$$

$$0{,}43067u - 0{,}71533 \log p < v < 0{,}43067u + 1{,}43067 \log\left(1 + \sqrt{1 + p}\right) - 1{,}43067 \log p.$$

Putem lua $p = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$. Dând lui $p$ aceste valori şi făcând calculele necesare, obţinem următorul tablou:

1) A se vedeà G. M. Anul XXX, pag. 205 şi pag. 245.

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(25^v+4^u)$ | $0{,}43067.u < v < 0{,}43067.u+0{,}54749$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v}(25^v+2.4^{u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}21533 < v < 0{,}43067.u+0{,}19364$ | $2u+1$ |
| $5^{u-v+1}(3.25^v+4^u)$ | $0{,}43067.u-0{,}34119 < v < 0{,}43067.u$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v-1}(25^v+4^{u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}43067 < v < 0{,}43067.u-0{,}13172$ | $2u-1$ |
| $5^{u-v+1}(5.25^v+4^u)$ | $0{,}43067.u-0{,}5 < v < 0{,}43067.u-0{,}23091$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v}(3.25^v+2.4^{u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}55652 < v < 0{,}43067.u-0{,}30948$ | $2u+1$ |
| $5^{u-v+1}(7.25^v+4^u)$ | $0{,}43067.u-0{,}60442 < v < 0{,}43067.u-0{,}37495$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v-2}(25^v+2.4^{u-2})$ | $0{,}43067.u-0{,}64600 < v < 0{,}43067.u-0{,}43067$ | $2u-3$ |
| $5^{u-v+1}(9.25^v+4^u)$ | $0{,}43067.u-0{,}68239 < v < 0{,}43067.u-0{,}49881$ | $2u+3$ |

$q=2$, deci $p \leqslant 4$, dă:

$$A = 5^{u-v+1}(p.25^v+2.4^u),$$

$$0{,}43067.u+0{,}21533-0{,}71533\log p < v < 0{,}43067.u + 1{,}43067\log\left(1+\sqrt{1+2p}\right)-1{,}43067\log p.$$

Dând lui $p$ valorile 1; 2; 3; 4; obținem tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(25^v+2.4^u)$ | $0{,}43067.u+0{,}21533 < v < 0{,}43067.u+0{,}62431$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v}(25^v+4^u)$ | $0{,}43067.u < v < 0{,}43067.u+0{,}29895$ | $2u+1$ |
| $5^{u-v+1}(3.25^v+2.4^u)$ | $0{,}43067.u-0{,}12586 < v < 0{,}43067.u+0{,}12117$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v-1}(25^v+2.4^{u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}21533 < v < 0{,}43067.u$ | $2u-1$ |

$q = 3$, deci $p \leqslant 3$, dă

$$A = 5^{u-v+1}(p.25^v + 3.4^u),$$

$$0{,}43067.u + 0{,}34119 - 0{,}71553 \log p < v < 0{,}43067.u + 1{,}43067 \log(1+\sqrt{1+3p}) - 1{,}43067 \log p.$$

Dăm lui $p$ valorile 1; 2; 3; şi găsim tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(25^v + 3.4^u)$ | $0{,}43067.u + 0{,}34119 < v < 0{,}43067.u + 0{,}68239$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v}(25^v + 2.4^u)$ | $0{,}43067.u + 0{,}12586 < v < 0{,}43067.u + 0{,}37290$ | $2u + 1$ |
| $3.5^{u-v+1}(25^v + 4^u)$ | $0{,}43067.u < v < 0{,}43067.u + 0{,}20358$ | $2u + 3$ |

$q = 4$, deci $p = 1$; 2; dă:

$$A = 5^{u-v+1}(p.25^v + 4^{u+1}),$$

$$0{,}43067.u + 0{,}43067 - 0{,}71533 \log p < v < 0{,}43067.u + 1{,}43067 \log(1+\sqrt{1+4p}) - 1{,}43067 \log p.$$

Dăm lui $p$ valorile 1; 2 şi obţinem tabloul următor:

| A (Rădăcina patratelor decapitate | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(25^v + 4^{u+1})$ | $0{,}43067.u + 0{,}43067 < v < 0{,}43067.u + 0{,}72962$ | $2u + 3$ |
| $5^{u-v}(25^v + 2.4^u)$ | $0{,}43067.u + 0{,}21533 < v < 0{,}43067.u + 0{,}43067$ | $2u + 1$ |

$q = 5$; 6; 7; 8; 9 dă $p = 1$ şi

$$A = 5^{u-v+1}(25^v + q.4^u)$$

$$0{,}43067.u + 0{,}71533 \log q < v < 0{,}43067.u + 1{,}43067 \log(1+\sqrt{1+q}).$$

Vom da deci lui $q$ valorile 5; 6; 7; 8; 9 şi obţinem tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+2}(5.25^{v-1}+4^u)$ | $0,43067.u+0,5 < v < 0,43067.u+0,76909$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v+1}(25^v+6.4^u)$ | $0,43067.u+0,55652 < v < 0,43067.u+0,80356$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v+1}(25^v+7.4^u)$ | $0,43067.u+0,60442 < v < 0,43067.u+0,83389$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v+1}(25^v+2.4^{u+1})$ | $0,43067.u+0,64600 < v < 0,43067.u+0,86134$ | $2u+3$ |
| $5^{u-v+1}(25^v+9.4^u)$ | $0,43067.u+0,68239 < v < 0,43067.u+0,88597$ | $2u+3$ |

($b$) $n$ nepereche, adică $n = 2k+1$. Din (7) deducem:

$$p.\frac{5^v}{2^u}.\sqrt{10} < 1+\sqrt{1+p.q},$$

unde am pus $u = \alpha - k$ şi $v = \beta + k$, iar din (8) deducem:

$$\sqrt{\frac{q}{10p}} < \frac{5^v}{2^u}.$$

Combinându-le pe aceste două inegalităţi, rezultă că:

$$\sqrt{\frac{q}{10p}} < \frac{5^v}{2^u} < \frac{1+\sqrt{pq}}{p\sqrt{10}}.$$

Aci aplicăm logaritmii şi, după ce facem toate calculele necesare, găsim inegalitatea următoare:

$$0,43067.v+0,71533\log q-0,71533\log p-0,71533 < v < 0,43067.u$$
$$+1,43067\log(1+\sqrt{1+pq})-1,43067\log p-0,71533.$$

Inlocuind pe $\alpha$ şi $\beta$ respectiv prin $(k+u)$ şi $(v-k)$ în (3), găsim:

$$A = 5^{u-v}(p.5^{2v-1}+q.2^{2u-1}).$$

Inegalităţile din tablourile ce urmează, se poate deduce cu uşurinţă din tablourile dela cazul ($a$), adăugând cantitatea constantă 0,71533 în prima şi ultima parte a inegalităţilor din acele tablouri.

Acum, iarăşi vom particulariză pe $p$ şi $q$, ştiind că $pq \leqslant 9$.

$q = 1$ dă $p \leqslant 9$,

$$A = 5^{u-v}(p.5^{2v+1}+2^{2u-1}).$$

$$0,43067.u-0,71533\log p-0,71533 < v < 0,43067.u$$
$$+1,43067\log(1+\sqrt{1+p})-1,43067\log p-0,71533.$$

Dăm lui $p$ valorile 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 şi obţinem următoarele soluţii:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v}(5^{2v+1}+2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}71533<v<0{,}43067.u-0{,}16784$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-1}(5^{2v+1}+4^{u-1})$ | $0{,}43076.u-0{,}93066<v<0{,}43067.u-0{,}52169$ | $2u$ |
| $5^{u-v}(3.5^{2v+1}+2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-1{,}05652<v<0{,}43067.u-0{,}71533$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-2}(5^{2v+1}+2^{2u-3})$ | $0{,}43067.u-1{,}14600<v<0{,}43067.u-0{,}84705$ | $2u-2$ |
| $5^{u-v}(25^{v+1}+2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-1{,}21533<v<0{,}43067.u-0{,}94624$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-1}(3.5^{2v+1}+4^{u-1})$ | $0{,}43067.u-1{,}27185<v<0{,}43067.u-1{,}02481$ | $2u$ |
| $5^{u-v}(7.5^{2v+1}+2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-1{,}31975<v<0{,}43067.u-1{,}09028$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-3}(5^{2v+1}+4^{u-2})$ | $0{,}43067.u-1{,}36133<v<0{,}43067.u-1{,}14600$ | $2u-4$ |
| $5^{u-v}(9.5^{2v+1}+2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-1{,}39772<v<0{,}43067.u-1{,}21414$ | $2u+2$ |

$q=2$ dă $p=1;\ 2;\ 3;\ 4;$ şi

$$A=5^{u-v}(p.5^{2v+1}+4^u).$$

Găsim următorul tablou:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v}(5^{2v+1}+4^u)$ | $0{,}43067.u-0{,}5<v<0{,}43067.u-0{,}09102$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-1}(5^{2v+1}+2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}71533<v<0{,}43067.u-0{,}41638$ | $2u$ |
| $5^{u-v}(3.5^{2v+1}+4^u)$ | $0{,}43067.u-0{,}84119<v<0{,}43067.u-0{,}59416$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-2}(5^{2v+1}+4^{u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}93066<v<0{,}43067.u-0{,}71533$ | $2u-2$ |

$q = 3$ dă $p = 1; 2; 3;$ și

$$A = 5^{u-v}(p.5^{2v+1} + 3.2^{2u-1}).$$

Găsim tabloul următor:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v}(5^{2v+1}+3.2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}37414<v<0{,}43067.u-0{,}03294$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-1}(5^{2v+1}+3.4^{u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}58947<v<0{,}43067.u-0{,}34243$ | $2u$ |
| $3.5^{u-v}(5^{2v+1}+2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u-0{,}71533<v<0{,}43067.u-0{,}51175$ | $2u+2$ |

$q = 4$ dă $p = 1; 2$ și

$$A = 5^{u-v}(p.5^{2v+1} + 2^{2u+1}).$$

Găsim soluțiile:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v}(5^{2v+1}+2^{2u+1})$ | $0{,}43067.u-0{,}28466<v<0{,}43067.u+0{,}14290$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v-1}(5^{2v+1}+4^{u})$ | $0{,}43067.u-0{,}5 \quad <v<0{,}43067.u-0{,}28466$ | $2u$ |

$q = 5; 6; 7; 8; 9$ atrage condiția $p = 1$ și

$$A = 5^{u-v}(5^{2v+1} + q.2^{2u-1}).$$

Făcând calculele necesare, obținem tabloul:

| A (Rădăcina patratelor decapitate) | Limitele lui $v$ | Numărul cifrelor lui $A^2$ |
|---|---|---|
| $5^{u-v+1}(25^v + 2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u - 0{,}21533 < v < 0{,}43067.u + 0{,}05376$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v}(5^{2v+1} + 3.4^u)$ | $0{,}43067.u - 0{,}15881 < v < 0{,}43067.u + 0{,}08823$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v}(5^{2v+1} + 7.2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u - 0{,}11091 < v < 0{,}43067.u + 0{,}11856$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v}(5^{2v+1} + 4^{u+1})$ | $0{,}43067.u - 0{,}06933 < v < 0{,}43067.u + 0{,}14601$ | $2u+2$ |
| $5^{u-v}(5^{2v+1} + 9.2^{2u-1})$ | $0{,}43067.u - 0{,}03294 < v < 0{,}43067.u + 0{,}17064$ | $2u+2$ |

* * *

Cu acestea, am terminat studiul complet al patratelor decapitate. Problema mi-a luat timp destul de mult, iar calculele au fost extrem de multe şi anevoioase, după cum se poate constată din acest articol, cu atât mai mult cu cât n'aveam la îndemână vreo maşină de calcul. Toate soluţiile problemei le-am dat în tablourile precedente. Pe lângă aceste soluţii, care intră în formulele generale găsite, mai sunt şi soluţii care nu se pot deduce din aceste formule generale. Aceste soluţii le-am găsit în prima parte a acestui articol şi sunt:

$A^2$=49(7); 64(8); 81(9); 225(15); 625(25); 5625(75); 7225(85); 9025(95);

$N^2$= 9(3); 4(2); 1(1); 25(5); 25(5); 625(25); 225(15); 025(5);

$A^2$=15625(125); 30625(175); 105625(325); 9765625(3125).

$N^2$= 5625(75); 0625(25); 05625(75); 765625(875).

(Numerele din paranteză reprezintă rădăcinile patrate).

In toate tablourile precedente, am dat numai valorile lui A, fără a da şi pe ale lui N; acestea însă se deduc foarte uşor, căci în formulele lui A n'avem decât să luăm în interiorul parantezelor semnul — în loc de +. De exemplu, în penultimul tablou, prima formulă este:

$$A = 5^{u-v}(5^{2v+1} + 2^{2u+1}),$$

atunci valoarea lui N va fi:

$$N = 5^{u-v}(5^{2v+1} - 2^{2u+1}) \text{ etc.}$$

Iată şi câtevà din şirurile de patrate de care vorbiam la începutul acestui articol:

$42025 = 205^2$ $2025 = 45^2$ $025 = 5^2$

$15625 = 125^2$ $5625 = 75^2$ $625 = 25^2$ $25 = 5^2$

$27225 = 165^2$ $7225 = 85^2$ $225 = 15^2$ $25 = 5^2$

$34225 = 185^2$ $4225 = 65^2$ $225 = 15^2$ $25 = 5^2$

$81225 = 285^2$ $1225 = 35^2$ $225 = 15^2$ $25 = 5^2$

$275625 = 525^2$ $75625 = 275^2$ $5625 = 75^2$ $625 = 25^2$ $25 = 5^2$

$893025 = 945^2$ $93025 = 305^2$ $3025 = 55^2$ $025 = 5^2$

$970225 = 985^2$ $70225 = 265^2$ $0225 = 15^2$ $25 = 5^2$

$3330625 = 1825^2$ $330625 = 575^2$ $30625 = 175^2$ $625 = 25^2$ $25 = 5^2$

$4950625 = 2225^2$ $950625 = 975^2$ $50625 = 225^2$ $625 = 25^2$ $25 = 5^2$

Voiu da acum toate patratele decapitate mai mici ca un milion (numerele din paranteză sunt rădăcinele patratelor).

| $A^2$ | $N^2$ |
|---|---|
| 49(7) | 9(3) |
| 64(8) | 4(2) |
| 81(9) | 1(1) |
| 225(15) | 25(5) |
| 625(25) | 25(5) |
| 1225(35) | 225(15) |
| 2025(45) | 025(5) |
| 3025(55) | 025(5) |

| $A^2$ | $N^2$ |
|---|---|
| 4225(65) | 225(15) |
| 5625(75) | 625(25) |
| 7225(85) | 225(15) |
| 9025(95) | 025( 5) |
| 15625(125) | 5625(75) |
| 27225(165) | 7225(85) |
| 30625(175) | 0625(25) |
| 34225(185) | 4225(65) |

| $A^2$ | $N^2$ |
|---|---|
| 42025(205) | 2025(45) |
| 50625(225) | 0625(25) |
| 70225(265) | 0225(15) |
| 75625(275) | 5625(75) |
| 81225(285) | 1225(35) |
| 93025(305) | 3025(55) |
| 275625(525) | 75625(275) |
| 330625(575) | 30625(175) |

| $A^2$ | $N^2$ |
|---|---|
| 893025(945) | 93025(305) |
| 950625(975) | 50625(225) |
| 970225(985) | 70225(265) |
| 3330625(1825) | 330625(575) |
| 4950625(2225) | 950625(975) |
| 9455625(3075) | 455625(675) |
| 9765625(3125) | 765625(875) |

Acum am terminat tot ce aveam de spus din punct de vedere teoretic asupra patratelor decapitate. Chestiuni practice se pot reluà în diferite probleme cu aspect particular.

EMIL ŞTEFĂNESCU.
Student.

## PREMIILE „GAZETEI MATEMATICE“
### PENTRU CONCURSUL ŢINUT IN ANUL 1924.

La pagina 362 a Anului XXIX al acestei reviste, s'a publicat rezultatul Concursului ţinut anul trecut, în vacanţa Paştilor şi s'a arătat cari corespondenţi s'au distins la probele teoretice şi practice, în scris şi la examinările orale. Din lipsă de fonduri, nu am putut acordà premiaţilor decât câte o diplomă, deşi am fi dorit a le da, ca amintire, şi câte o carte, cel puţin.

Mai târziu însă, răuşind a se obţine o sumă mică în acest scop, regretatul nostru coleg IOAN D. TEODOR, a intervenit la Banca Naţională a României, care a acordat *Gazetei Matematice*, mijloace de a se obţine un schimb mai favorabil al leului în franci şi cu modul acesta, s'au putut cumpărà la Paris, prin stăruinţele colegului nostru, D-l P. SERGESCU, 30 de volume de cărţi de matematici pentru premiile din anul 1924. Graţie donaţiunii de 10.000 lei făcuţi anul acesta, s'a putut completà numărul cărţilor, astfel că acum

suntem în măsură de a acordà următoarele premii celor 12 corespondenți răușiți la concursul de anul trecut:

1. D-lui T. Popoviciu:

*a)* Haag. Cours complet de mathématiques spéciales. (2 vol.)
*b)* Vivanti. Théorie des groupes.
*c)* Lebon. *Henry Poincaré.*
*d)* Jordan, Poincaré, Picard. Oeuvres de G. — H. Halphen.

2. D-lui B. M. Barbălatt:

*a)* Darboux. Principes de géométrie analytique.
*b)* Petersen. Théorie des équations algébriques.
*c)* Lebon. *Gaston Darboux.*

3. D-lui S. F. Lăzărescu:

*a)* P. Boutroux. Principes de l'analyse mathématique (2 vol).
*b)* Borel. Eléments de la théorie des probabilités.
*c)* Lebon. *Emile Picard.*

4. D-lui C. D. Mihăescu:

*a)* Goursat. Cours d'analyse mathématique. (Vol. I).
*b)* Picard. Discours et mélanges.

5. D-lui T. Udrisky:

*a)* Haag. Cours complet de mathématiques speciales (2 vol.)
*b)* Lambert. L'astronomie.

6. D-lui T. Angelescu:

*a)* Pillet. Géométrie descriptive.
*b)* Hadamard. Sur la méthode en géométrie.

7. D-lui G. P. Harnagea:

*a)* Brahy. Exercices de calcul différentiel.
*b)* Borel. Introduction à quelques théories physiques.

8. D-lui E. Ștefănescu:

*a)* Chatelet. Théorie des nombres.
*b)* Tannery. Leçons d'algébre et d'analyse.

9. D-lui E. G. Rusu:

*a)* Appell. Cours de mécanique.
*b)* Poiree. Méthodes pour les problèmes de géométrie.

10. D-lui W. Solomon:

*a)* Silberstein. Algèbre vectorielle et analyse vectorielle.
*b)* Picard. Traité d'analyse.

11. D-lui C. H. Schönfeld:

*a)* Haag. Géométrie descriptive et trigonométrie (2 vol.).
*b)* Appel. Théorie des vecteurs.

12. D-lui A. Tauber:

*a)* Haag. Mécanique. (2 vol.).
*b)* Salmon. Leçons d'algèbre supérieure.

Corespondenţii aci arătaţi, vor comunicà adresa la care să se expedieze cărţile, sau se vor duce să le ia dela Fabrica de Chibrituri, unde sunt depuse, adresându-se acolo D-lui Sub-director Gh. Iliescu.

Delegaţia Societăţii:

A. Saligny, G. Filipescu, G. Borneanu.

## NOTE MATEMATICE

62. *Alte zece feluri de Calcul.* (Vezi Nota 54, pag. 329).

21. **Echipolenţelor.** *J. Houel.* — Sur la calcul des équipollences. Paris 1869.

22. **Erorilor.** *Faa de Bruno.* — Le calcul élémentaire des erreurs. Paris 1860.

23. **Diferenţelor.** *D. Selliwanoff.* — Lehrbuch der Differenzenrechnung. Lipsca 1904.

24. **Generalizării.** *G. Oltramare.* — Calcul de généralisation. Paris 1899.

25. **Medierii.** *T. Muly.*—Grundriss der Mediationsrechnung.

26. **Punctelor.** *R. Mehmke.*—Vorlesungen uber Vektoren-und Punktrechnung. Lipsca.

27. **Probabilităţilor.** *J. Bertrand.*—Calcul des probabilités.

28. **Residuurilor.** *E. Lindelof.*—Calcul des résidus. Paris 1905.

29. **Trăsăturii.** *Cousinery.* — Le calcul par le trait. Paris.
30. **Variaţiunilor.** *O. Bolza.* — Vorlesungen über Variationsrechnung. Lipsca 1909.

(Va urmà), I. IONESCU.

63. *Asupra numerelor pitagorice**). Numerele întregi, care satisfac ecuaţia:

$$z^2 = x^2 + y^2, \tag{1}$$

se găsesc prin trei formule. Putem însă să ne dăm pe $x$ şi să găsim pe $y$ şi $z$. Fie $x$ diferit de 1 şi 2. Avem identităţile:

$$(k+1)^2 = k^2 + (2k+1), \tag{2}$$

$$(k+2)^2 = k^2 + 4(k+1), \tag{3}$$

aşà că putem pune:

$$x^2 = 2k+1, \qquad x^2 = 4(k+1),$$

după cum $x$ este fără soţ sau cu soţ. Putem porni dela patratul $x^2$, găsi pe $k$, apoi pe $k^2$ şi respectiv pe $(k+1)^2$, $(k+2)^2$. Exemplu:

$$x = 13; \qquad x^2 = 169; \qquad k = 84;$$

$$y = 84, \qquad z = 85,$$

$$85^2 = 84^2 + 13^2.$$

Alt exemplu:

$$x = 224, \qquad k = 12543,$$

$$y = 12543, \qquad z = 12545,$$

$$12545^2 = 12543^2 + 224^2.$$

Metoda nu dă toate perechile de soluţii ce satisfac ecuaţia (1), căci aceasta dă soluţii, în care $z$ diferă de $y$ cu 1 sau 2 unităţi numai.

Putem lua însă:

$$(k+n)^2 = k^2 + n(2k+n), \tag{4}$$

$$(k-n)^2 = k^2 - n(2k-n). \tag{5}$$

Dacă luăm:

*) A se vedea *Gazeta Matematică* Anul XXX, pag. 14.

$$x^2 = n(2k \pm n); \qquad y = k^2; \qquad z = (k \pm n)^2;$$

atunci $z$, $y$, $x$ sunt trei numere pitagorice. Exemplu:

$$x = 51, \qquad x^2 = 2601 = 3 \times 867.$$

Putem lua $n=3$, $k=\frac{1}{2}(867-3)=432$, $y=432$, $z=435$

$$435^2 = 51^2 + 432^2.$$

Putem simplifică cu 9 și avem:

$$145^2 = 17^2 + 144^2.$$

Și acì 145 diferă de 144 cu 1. Facem însă $x = 9$ și avem:

$$x^2 = 51^2 = 9(280 + 9), \qquad y = 140, \qquad z = 149,$$

$$51^2 - 140^2 = 149^2,$$

soluție nouă, căci 51, 140 și 149 sunt prime între ele. Mai putem lua

$$51^2 = 17(136 + 7),$$

care dă:

$$85^2 = 68^2 + 51^2,$$

care se poate simplifică și avem:

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

Cum putem pune un patrat sub forma $n(2k \pm n)$, reese că putem lua pentru $n$ divizori ai lui $x^2$ și găsì soluțiile de numere pitagorice corespunzătoare unui $x$ dat.

COLONEL C. FELIX.

64. *Asupra indicatorilor.*

I. *Să se arate că există numere al căror indicator este o putere a unui număr.*

Fie $N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$, atunci să vedem când:

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . c^{\gamma-1} \ldots . (a-1)(b-1)(c-1) \ldots = A^n .$$

1) Fie mai întâi $N = a^\alpha$, atunci

$$a^{\alpha-1}(a-1) = A^n,$$

de unde se vede că:

$$\alpha - 1 = n . k_1 \quad \text{și} \quad a - 1 = p^n,$$

deci:

$$a = p^{n+1} \quad \text{(unde } a \text{ este prim)};$$

prin urmare:

$$N = (p^n + 1)^{n \cdot k_1 + 1} .$$

2) Fie $N = a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta}$, atunci:

$$a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1} \ (a-1) \ (b-1) = A^n .$$

Atunci trebue să avem:

$$\beta - 1 = n \cdot k_1 \ , \ a - 1 = p^n$$

$$a^{\alpha-1} (b-1) = q^n ,$$

deci:

$$b = z^n \cdot a^{k_2 \cdot n - \alpha + 1} + 1$$

şi prin urmare:

$$N = (p^n + 1)^{\alpha} [t^n (p^n + 1)^{n k_2 - \alpha + 1} + 1]^{n \cdot k_1 + 1}.$$

In general, se deduce că:

$$N = (p^n + 1)^{\alpha} [t^n \cdot (p^n + 1)^{n \cdot k_2 - \alpha + 1} + 1]^{n \cdot k_1 + 1}$$

$$\times [u_1{}^n + 1]^{n \cdot k_3 + 1} \ldots$$

*Exemplu:* Fie:

$$p = 1 \ , \ \alpha = 3 \ , \ t = 1 \ , \ n = 4 \ , \ n_1 = 4$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1,$$

atunci avem:

$$N = 2^3 . 5^5 . 257^5$$

$$\varphi(N) = (2^3 . 5 . 257)^4.$$

II. *Să se arate că diferența între un număr şi indicatorul lui, nu poate fi o putere a unui număr de paritate diferită cu aceea a numărului dat.*

Adică nu putem avea:

$$N - \varphi(N) = A^n ,$$

când N şi A sunt de parităţi diferite.

In adevăr, dacă N e par şi A impar, atunci: $N - \varphi(N)$ este par şi A impar, ceeace nu se poate şi invers, dacă N este impar şi A par.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

65. *Asupra notei 87, din G. M. vol. XXVIII.* Cu ocazia rezolvării problemei 3101, la pagina 426 din *Gazeta Matematică* vol. XXIX, D-l Lt-Col. Gh. Buicliu, a atras atenţiunea corespondenţilor că nota 87 din G. M. vol. XXVIII este necompletă şi i-a invitat să o completeze. In cele ce urmează, voiu face această completare.

In sus numita notă, se ajunge la ecuaţia:

$$(n-z)^2 = k^2 + z^2, \qquad (n = x+y \ , \ n > 2z)$$

de unde se ia numai:

$$n - z = u^2 + v^2 \ , \ k = 2uv \ , \ z = u^2 - v^2$$

şi se găseşte:

$$x = u(u+v) \ , \ y = u(u-v) \ , \ z = (u-v)(u+v),$$

unde $u$ şi $v$ sunt oarecare.

Problema trebuie rezolvată în modul următor:

Din ecuaţia:

$$(n-z)^2 = k^2 + z^2,$$

se ia:

(1) $n - z = m(u^2+v^2)$ , $k = 2muv$ , $z = m(u^2 - v)$ şi

(2) $n - z = m(u^2+v^2)$ , $k = m(u^2-v^2)$ , $z = 2muv$,

cu $u$ şi $v$ prime între ele.

Relaţiile (1) şi (2) ne dau imediat soluţiile:

(3) $x = mu(u+v)$ , $y = mu(u-v)$ , $z = m(u+v)(u-v)$ şi

(4) $x = mu(u+v)$ , $y = mv(u+v)$ , $z = 2muv$,

care rezolvă complet problema.

*Observaţii* 1°. Dacă în (3) şi (4), facem $m = B.d^2$ obţinem:

(5) $x = B\,du(du+dv)$, $y = B\,du(du-dv)$,
$z = B(du+dv)(du-dv)$

(6) $x = B\,du(du+dv)$, $y = Bdv(du+dv)$, $z = 2Bdu.dv$

şi dacă în (5) luăm: $du = A$ , $du + dv = C$ , găsim:

(7) $x = ABC$ , $y = AB(2A-C)$ , $z = BC(2A-C)$,

iar dacă în (6) luăm: $du = C$ , $du + dv = A$ , găsim:

(8) $x = ABC$ , $y = AB(A-C)$ , $z = 2BC(A-C)$.

Formulele (7) şi (8) sunt cele date de D-l O. N. Ţino, la pag. 172 vol XXIX G. M. nota 33.

2°. Dacă în (3), luăm: $\alpha = u + v$ , $\beta = u - v$ , găsim:

(9) $x = \frac{1}{2} m\alpha(\alpha + \beta)$ , $y = \frac{1}{2} m\beta(\alpha + \beta)$ , $z = m\alpha\beta$,

iar în (4), dacă luăm: $u = \alpha$ , $v = \beta$ , găsim:

(10) $x = m\alpha(\alpha + \beta)$ , $y = m\beta(\alpha + \beta)$ , $z = 2m\alpha\beta$,

unde $\alpha$ şi $\beta$ sunt prime între ele, căci şi $u$ şi $v$ sunt prime între ele.

Formulele (9) şi (10) se pot strânge într'una:

(11) $x = \rho m\alpha(\alpha + \beta)$ , $y = \rho m\beta(\alpha + \beta)$ , $z = 2\rho m\alpha\beta$,

unde $\rho$ este un modul egal cu $\frac{1}{2}$, când $\alpha$ şi $\beta$ sunt de aceeaşi paritate şi egal cu 1, când $\alpha$ şi $\beta$ sunt de paritate diferită. Formulele sunt tocmai cele găsite la problema 1730 şi date la pag. 427 vol. XXIX G. M. de D-l Lt-Colonel Gh. Buicliu.

Cu aceasta, ne putem repede încredinţă că formulele (3) şi (4) sunt cele complete.

O. Popea.

66. *Asupra unor inegalităţi trigonometrice.* In *Gazeta Matematică* Vol. XXVI, pag. 88, D-nul V. Cristescu dă o soluţie pur trigonometrică problemei 2572, propusă de D-nul Al. Pantazi. Imi propun să dau acestei chestiuni de trigonometrie o soluţie bazată pe simple consideraţiuni geometrice, arătând totodată o metodă, care se aplică pentru găsirea şi altor inegalităţi asemănătoare.

Problema 2572 constă în studierea inegalităţei

$$\cos B + \cos C > \sin A,$$

ştiind că A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu ABC.

Fie H ortocentrul acestui triunghiu şi R raza cercului circumscris. Se ştie că avem relaţiunile

$$HA = 2R\cos A, \qquad HB = 2R\cos B, \qquad HC = 2R\cos C,$$

iar când unul din unghiurile lui ABC este obtuz, atunci distanţa dela acel vârf la ortocentru are în formulă semnul minus (de ex. $A > 90^0$, $HA = -2R\cos A$).

Să considerăm triunghiul BHC şi asupra lui să facem următoarele supoziţii:

1. Inălţimile duse din B şi C cad amândouă în interiorul sau exteriorul triunghiului; atunci avem neapărat $B < 90^0$ şi $C < 90^0$.

2. Inălţimile de mai sus cad una în exterior şi alta în interior; atunci sau $B > 90^0$, sau $C > 90^0$.

In primul caz, în triunghiul BHC, avem

$$BH + CH > BC$$

şi cum $BC = 2R\sin A$, inegalitatea precedentă devine

$$\cos B + \cos C > \sin A.$$

In al doilea caz, avem $BH - CH < BC$ şi cum

$$BH = 2R\cos B, \qquad CH = -2R\cos C,$$

avem

$$\cos B + \cos C < \sin A.$$

Se vede, de asemenea, că egalitatea

$$HB + HC = BC$$

va convenì când ortocentrul H va fi pe BC, ceeace e tot una cu $B = 90^0$, sau $C = 90^0$.

In general, considerând în locul lui H diferite puncte remarcabile ale triunghiului, şi aplicând inegalităţile elementare dintre laturi, obţinem inegalităţi între unghiurile triunghiului.

Astfel, fie I centrul cercului înscris. Avem totdeauna

$$IB + IC > BC,$$

$$IB = r\,\mathrm{cosec}\tfrac{1}{2}B, \qquad IC = r\,\mathrm{cosec}\tfrac{1}{2}C,$$

iar inegalitatea precedentă se transformă în

$$\mathrm{cosec}\tfrac{1}{2}B + \mathrm{cosec}\tfrac{1}{2}C > a : r.$$

B. M. Barbălatt.

---

## BIBLIOGRAFIE.

**Foaia matematică.** Anul II. No. 5. Mai 1925. Chişinău. O teoremă remarcabilă, de M. Grümbaum. Relaţii trigonometrice între elementele unui triunghiu, de Gh. D. Simionescu.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul V. No. 3. Mai 1925. Timişoara. Teoreme asupra determinanţilor, de Gh. Constantinescu.

**Journal de mathématique élémentaire,** publié par H. Vuibert. Anul 49. No. 15 şi 16. Mai 1925. Paris.

**Jurnal matematic.** Vol. II. No. 3. Aprilie 1925. Bucureşti. Asupra diferenţelor finite, de T. Popoviciu.

**Curierul matematic.** Vol. I. No. 3. Mai 1925. Bucureşti. O clasă de polinoame ortogonale, de T. POPOVICIU. Asupra criteriilor logaritmice ale lui CAUCHY, de C. E. GEORGESCU.

A. ANGELESCU. **Determination de certaines courbes par des ensemble discrets de points.** Extras din *„Bulletin de la Société mathématique de France"*, Vol. LI. 1923.

A. ANGELESCU. **Sur les polynomes hypergéométriques.** Extras din *„Nouvelles Annales de mathématique"* seria 5, vol. III, 1925.

A. LAFAY. **Notations et formules vectorielles.** GAUTHIER-VILLARS et C-ie. Quai des Grands Augustins 55. Paris, 1925.

Autorul, având nevoie de cunoştinţa vectorilor, în lecţiunile de fizică pe care le face la Şcoala Politecnică din Paris, a adunat în o formă condensată, formulele necesare, cu notaţiunea pe care o întrebuinţează. Primul capitol, *algebra vectorială*, dă definiţiuni şi reguli de calcul referitoare la vectori. Al doilea capitol se ocupă cu *analiza vectorială*, derivate, formulele lui GREEN şi STOKES. Capitolul al treilea tratează despre *câmpuri* şi unde găsim teorema lui STOKES, formula lui VASSCHY, etc.

Totul este coprins într'o broşură de 36 pagini, care poate servi drept călăuză celor ce se ocupă cu chestiunile la care intervin vectorii; ea poate folosi fizicianilor şi inginerilor, cari se ocupă cu asemenea chestiuni.

I. I.

**Memorial des Sciences mathématiques.** Sub direcţiunea D-lui H. VILLAT profesor la Universitatea din Strassbourg şi sub patronagiul mai multor Academii, printre care şi Academia română şi unele Societăţi matematice, s'a început publicarea unei colecţiuni de broşuri matematice asupra chestiunilor care interesează matematicile. Fiecare va tratà o chestiune limitată, cu rezultatele obţinute pânăla apariţiune. Expunerea va fi sumară, broşurile neavând scopuri didactice, ci numai de a fi o călăuză sigură pentru cercetări, sau pentru aceia ce vor să se pună în curent cu teorii de care nu se ocupă în special. Primul volum a şi apărut şi anume *Sur une forme générale des équations de la dynamique*, de P. APPELL. Printre cele anunţate, găsim şi două ale colegului nostru G. ŢIŢEICA, asupra geometriei diferenţiale.

I. I.

GENERAL SCARLAT PANAITESCU. **Astronomie populară.** *Ceasornicul şi abecedarul lumii.* Apărută în *„Biblioteca Foii Matematice"* sub No. 1 Preţul 25 lei. Chişinău 1925.

Într'o broşură de 96 pagini, se redă cursul de *Astronomie populară* făcut la Universitatea populară din Chişinău în anii 1920-1924.

După o *Introducere* cu caracter istoric, materia este împărţită în două părţi. Partea I intitulată *Ceasornicul lumii*, dă ştiinţa astronomică a celor vechi, care a condus la măsurarea timpului şi se tratează despre *zodiac* (cadranul); *luna* (acul secundar); *soarele* (acul principal); *planetele* şi *cometele*

(ace complimentare); *calendarele* şi *ora*. In partea II, *Abecedarul lumii*, tratează despre astronomia contimporană şi anume: *mişcarea cerească*, *lumina*, *gravitatea*, *spaţiul* şi *timpul*.

Chestiunile sunt expuse în mod popular, cu comparaţiuni care să înlesnească înţelegerea fenomenelor şi să însufle cititorilor entusiazmul pentru studiul legilor naturii. Priceperea însă este îngreuiată de lipsa completă a figurilor şi a unui mic vocabular cu aplicaţia termenilor tecnici şi ştiinţifici. Deasemenea, nu găsesc că în o expunere populară s'ar puteà întrebuinţà litere greceşti, ca la pagina 19, întrucât azi în Şcoala politecnică sunt elevi cari fac cu greu asemenea litere. Explicaţia unor cuvinte este întârziată; aşà se vorbeşte de *răsărit heliac* la pagina 20 şi se explică deabià la pagina 35. Aceste lipsuri se pot uşor înplini la o viitoare ediţiune, iar citirea *Astronomiei populare* va fi mai leznicioasă şi mai preferabilă pentru un număr mai mare de oameni doritori de cultură.

De altfel, lucrarea are multe calităţi, ceeace ne face să sperăm că o nouă ediţiune nu va întârzià mult.

I. I.

## CERERI.

124. Intr'un raport asupra unei bătăi dintre doi funcţionari dela un oficiu poştal din Basarabia, se spune că unul a lovit pe celălalt în cap cu un *grătar* cu care se fac socoteli în birou. Este de sigur vorba de un *abac* de calculat. Care este numele oficial al acelui aparat? Il numesc Modovenii *grătar?* Se cere o descriere şi modul de calcul al aparatului.

I. Ionescu.

## CHESTIUNI DE EXAMEN

### CONCURS DE BURSA PENTRU TRIMETEREA IN STRĂINĂTATE A UNUI LICENŢIAT AL FACULTĂŢII DE ŞTIINŢE DIN CLUJ, PENTRU STUDIUL FIZICEI-MATEMATICE.

*Proba teoretică.*

1. Se dă ecuaţia diferenţială

$$(1) \qquad (x^2-1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0,$$

$n$ fiind întreg şi pozitiv. Să se găsiască integrala $y(x)$ a ecuaţiei (1) satisfăcând

condiţiilor $y(0) = a$, $y'(0) = b$, $a$ şi $b$ fiind cunoscute. Din rezultatul găsit, să se deducă că integrala generală a ecuaţiei (1) este

$$y = C_1(x+1)^n + C_2(x-1)^n .$$

2. Se cere integrala $z(x, y)$ analitică în raport cu $y$ a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$(2) \qquad (x^2-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Să se integreze ecuaţia (2), făcând schimbarea de variabile

$$xy + y = 2u, \quad xy - y = 2v.$$

*Proba practică.*

Se consideră integrala dublă

$$I = \iint f(au+bv)(1-u^2-v^2)^{-\lambda-1}\,du\,dv,$$

domeniul de integrare fiind definit prin neegalitatea $u^2 + v^2 \leqslant 1$. Făcând schimbarea de variabile

$$u = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad v = \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

să se arate că

$$I = c(\lambda)\cdot\int_{-1}^{+1} f(x\sqrt{a^2+b^2})(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx,$$

$c(\lambda)$ fiind un coeficient ce nu depinde decât de $\lambda$ şi a cărui expresie se cere. Particularizând funcţiunea $f$ şi luând $f(x) = x^n$, $n$ întreg pozitiv, să se calculeze valoarea integralei I. Din rezultatul găsit, să se deducă valoarea integralei duble

$$\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} u^p v^q(1-u^2-v^2)^{\lambda-1}\,du\,dv,$$

unde $p$ şi $q$ sunt numere întregi pozitive.

(10 dec., 1924).

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2841. *Fie* O *centrul cercului circumscris,* I *centrul cercului înscris,* G *centrul de greutate al unui triunghiu* ABC. *Pe laturile* BA, CA *luăm dela* B *şi* C *către* A *lungimile*

$BP = CQ = BC$. *Fie* P' *şi* Q' *mijloacele segmentelor* AP, AQ *şi* G' *centrul de greutate al triunghiului* AP'Q'.

*Să se demonstreze că dacă* $BC^2 = CA \times AB$, *atunci:*

1) *Dreapta* GG' *este paralelă cu* PQ *şi deci perpendiculară pe* OI;

2) *Vârful* $A_1$ *al primului triunghiu al lui* BROCARD $A_1B_1C_1$ *este reciprocul* D *al punctului lui* LEMOINE *în raport cu* ABC;

3) *Diametrul cercului* O, *ale cărei extremităţi sunt punctul lui* STEINER *şi punctul lui* TARRY, *este perpendicular pe* BC;

4) $A_1$ *este centrul de omologie şi* BC *axa de omologie a triunghiurilor* ABC *şi* $A_1B_1C_1$;

5) *Bisectoara* AI *trece prin punctul lui* STEINER;

6) *Mediana* $A_1A_1'$ *din triunghiul* $A_1B_1C_1$ *este dreapta lui* EULER *a triunghiului* $N_a N_b N_c$, *format de centrele cercurilor lui* NEUBERG *a triunghiului* ABC.

V. CRISTESCU.

1. Fie A' mijlocul laturei BC. Vom demonstrà că dreapta P'Q' trece prin A'. In adevăr, scriind condiţia ca punctele P', Q', A' să fie coliniare, avem

$$BA'/CA' \cdot AP'/BP' \cdot CQ'/AQ' = 1. \qquad (1)$$

Dar $BA' = CA'$; $AP' = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2}(c - a)$, $BP' = \frac{1}{2}(AB + BP) = \frac{1}{2}(c + a)$, $CQ' = \frac{1}{2}(a + b)$, $AQ' = \frac{1}{2}(a - b)$. Figura presupune că avem $c > a > b$. Relaţia (1) devine

$$\frac{c - a}{c + a} \cdot \frac{a + b}{a - b} = 1, \quad \therefore \quad a^2 - bc = 0.$$

Deci, în triunghiul $a^2 = bc$, dreapta P'Q' trece prin A'.

Fie A'' mijlocul dreptei P'Q'. In triunghiul AA'A'' punctele G şi G' împărţind laturile AA' şi AA'' în raportul 2 : 1, dreapta GG' e paralelă cu A'A'', care, după cum am demonstrat, este chiar dreapta P'Q'; dar P'Q' este paralelă cu PQ şi se ştie*) că PQ este perpendiculară pe OI, ceeace demonstrează prima parte a problemei.

MIHAIL I. FOCŞENEANU, CONST. I. GEORGESCU, MICU GRÜNBAUM.

*) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Géométrie plane*, nouvelle édition, p. 506, question proposée 29.

J. NEUBERG, *Mathesis* 1908, p. 86.

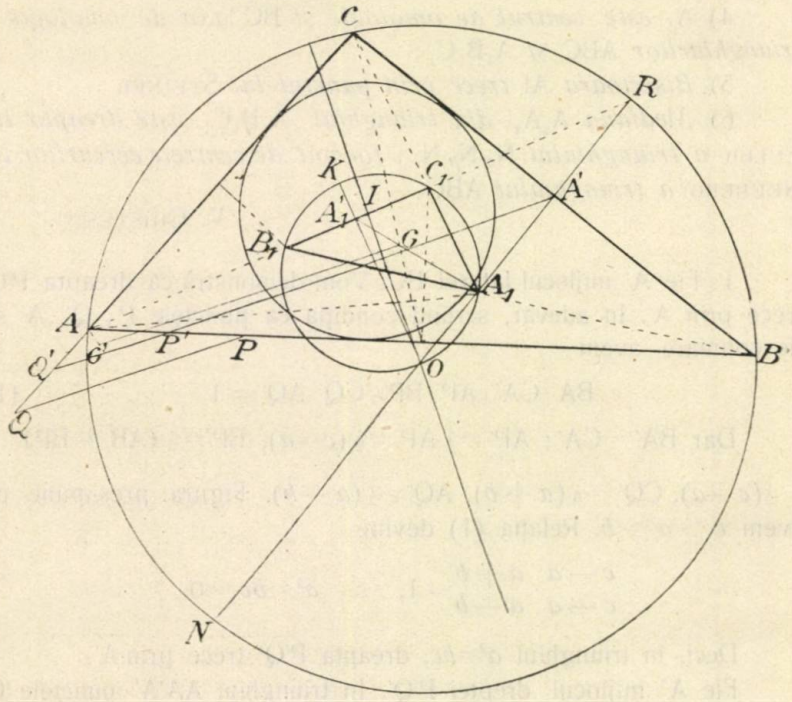
2. *a)* Se ştie *) că, în orice triunghiu, dreptele:

$AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, concură într'un acelaş punct D, care este reciprocul punctului lui LEMOINE în raport cu triunghiul ABC;

$AC_1$, $BA_1$, $CB_1$ concură în $\Omega$, primul punct al lui BROCARD din triunghiul ABC;

$BC_1$, $CA_1$, $AB_1$ concură în al doilea punct $\Omega_1$ al lui BROCARD **);

Insă, în triunghiul în care $a^2=bc$, punctele $\Omega$ şi $\Omega_1$ se confundă cu $B_1$ şi $C_1$ ***).




Din aceste proprietăţi, deducem că punctele

B, $A_1$, $B_1$ sunt coliniare;

C, $A_1$, $C_1$ » »

*) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Géométrie plane*, nouvelle édition, p. 478, § 42.

**) *Idem*, p. 479, § 43.

***) *Idem*, p. 507, question proposée 32.

adică dreptele $BB_1$ și $CC_1$ se întretaie în $A_1$ și deci $A_1$ se confundă cu D.

MICU GRÜNBAUM.

*b)* Coordonatele baricentrice ale punctului $A_1$ se află căutând intersecția dreptelor $B\Omega$, $C\Omega_1$.

Ecuațiile dreptelor $B\Omega$, $C\Omega_1$ în coordonate baricentrice fiind

$$\alpha : a^2 = \gamma : b^2, \qquad \alpha : a^2 = \beta : c^2,$$

$$\therefore \quad \alpha : a^2 = \beta : c^2 = \gamma : b^2$$

și ținând seamă că $a^2 = bc$, avem

$$\alpha a^2 = \beta b^2 = \gamma c^2.$$

Deci coordonatele baricentrice ale lui $A_1$ sunt

$$(1/a^2,\ 1/b^2,\ 1/c^2),$$

dar acestea sunt și coordonatele punctului D, reciprocul lui K.

CONST. I. GEORGESCU, M. I. FOCȘENEANU.

*c)* Se știe că, într'un triunghiu, între laturile căruia există relația $a^2 = bc$, punctele lui BROCARD se confundă cu proecțiunile punctului lui LEMOINE pe mediatoarele corespunzătoare laturilor CA și AB, adică cu punctele $B_1$, $C_1$ vârfurile primului triunghiu al lui BROCARD. Cum reciprocul punctului lui LEMOINE și punctele lui BROCARD sunt puncte permutante directe, urmează că D este permutant direct cu $B_1$, $C_1$, adică este vârful $A_1$ al primului triunghiu al lui BROCARD.

MIHAIL I. FOCȘENEANU.

3. *a)* Se știe că punctul lui STEINER (R) și punctul lui TARRY (N) sunt extremitățile unui diametru al cercului ABC și că punctul D, care în cazul problemei noastre coincide cu $A_1$, este situat pe dreapta NR, *) de unde urmează că diametrul NR este chiar mediatoarea laturei BC.

CONST. I. GEORGESCU, M. I. FOCȘENEANU.

*) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Géométrie plane*, nouvelle édition, p. 477, § 40 și p. 478, § 42.

*b)* Se ştie*) că distanţele punctului R al lui STEINER la laturile CA, AB (coordonatele normale) sunt proporţionale cu

$$1 : b(c^2 - a^2) \quad \text{şi} \quad 1 : c(a^2 - b^2).$$

Egalitatea $b(c^2 - a^2) = c(a^2 - b^2)$ ne conduce la $a^2 - bc = 0$, ceeace ne arată că R se află pe bisectoara AI, de unde conchidem că diametrul NR este perpendicular pe BC.

MICU GRÜNBAUM.

4. Am văzut, la partea a doua a problemei, că dreptele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ concură în punctul A , care e (în cazul $a^2 = bc$) centrul de omologie al triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ şi cum dreptele AB, $A_1B_1$ şi AC, $A_1C_1$ se taie respectiv în B şi C, rezultă că BC este axa de omologie a acestor două triunghiuri.

MICU GRÜNBAUM, M. I. FOCŞENEANU,
CONST. I. GEORGESCU.

5. Am demonstrat la partea 3) a problemei, că diametrul NR este perpendicular pe latura BC. Deci R este mijlocul arcului BC şi prin urmare R se află pe bisectoara AI. Mai urmează că bisectoara exterioară a unghiului A trece prin punctul N al lui TARRY.

CONST. I. GEORGESCU, M. I. FOCŞENEANU,
MICU GRÜNBAUM.

6. Se ştie**) că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au acelaş centru de greutate. Pe de altă parte, dela proprietăţile cercurilor lui NEUBERG, se ştie că punctele $N_a$ , $N_b$ , $N_c$ sunt puncte omoloage în triunghiurile direct asemenea $BN_aC$, $CN_bA$, $AN_cB$ ; urmează de aici, după o teoremă cunoscută***), că triunghiurile ABC şi $N_aN_bN_c$ au acelaş centru de greutate. Mediana $A_1A'_1$ din triunghiul $A_1B_1C_1$ trece deci prin centrul de greutate al triunghiului $N_aN_bN_c$ .

Se mai ştie****) însă că, într'un triunghiu oarecare, dreapta GD este dreapta lui EULER a triunghiului $N_aN_bN_c$ . Ori, am arătat

*) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, op. cit. p. 478, § 40.
**) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, op. cit. p. 476, § 39.
***) *Idem*, p. 476, § 38.
****) A. GOB, Sur les cercles de NEUBERG, *Mathesis* 1889, Supplément p. 13, § 9.

că în triunghiul $a^2 = bc$, punctul D se confundă cu $A_1$, ceeace demonstrează şi ultima parte a problemei.

CONST. I. GEORGESCU.

*Observaţie.* 1) Fie $J_1$ şi $J_2$ punctele lui JERABECK ($J_1$ punctul retrograd, $J_2$ punctul direct) şi $I_r$ reciprocul centrului cercului inscris I. Avem proprietăţile:

Dreapta $J_1J_2$ trece prin A;
Dreapta $J_1I_r$ „ „ B;
Dreapta $J_2I_r$ „ „ C,

căci toate aceste condiţii ne conduc la $a^2 = bc$.

M. I. FOCŞENEANU.

2) In triunghiul $a^2 = bc$, centrul cercului inscris I se află pe dreapta care uneşte punctele lui BROCARD (sau pe dreapta $B_1C_1$), proprietate care face obiectul problemei 2804 (*G. M.* Vol. XXVI, p. 243).

V. C.

*Notă.* Au rezolvat bine primele 5 părţi ale problemei, cu ajutorul coordonatelor baricentrice, D-nii: I. C. VASILIU şi PAUL I. IONESCU. D-lor au demonstrat că dreapta $\Omega\Omega_1$ este bisectoara interioară a unghiului A şi că dreapta $J_1J_2$ care uneşte punctele lui JERABEK, trece prin A.

Triunghiul $a^2 = bc$ a fost considerat de E. LEMOINE. (*Mathesis* 1885, p. 107).

Mai multe proprietăţi ale acestui triunghiu au fost date de D-nul R. GOORMAGHTIGH în *Mathesis* 1912, p. 152 şi u. Printre acestea, este şi aceea că punctele $J_1$, $J_2$, A sunt colineare.

---

PROBLEMA 3093. *Cu trei cifre diferite să se facă trei pătrate perfecte de câte trei cifre.*

C. E. GEORGESCU.

Cu trei cifre diferite *a, b, c,* se pot formă şase numere diferite şi anume:

*abc, acb, bac, bca, cab, cba.*

Observăm acum că, oricum am consideră trei din aceste numere, terminaţiunile de două cifre, la două din ele, sunt două numere, astfel că unul este răsturnatul celuilalt.

De altă parte, ultimile două cifre care pot termină un pătrat perfect sunt: 00, 25, 01, 09, 21, 29, 41, 49, 61, 64, 81, 89, 04,

16, 24, 36, 44, 54, 69, 76, 84, 96 [Culeg. de probleme I. Ţ. I. C. Aritm., Cap. XXXIX, 1]; deci două din cifrele căutate sunt:

1 şi 6, sau 6 şi 9.

Vedem că cifra 6 se găseşte în ambele grupe, iar rădăcina pătrată R a unui pătrat perfect de trei cifre satisface condiţiunii

$$10 \leq R \leq 31,$$

deci pentru ca pătratul să fie terminat cu 6, trebue să luăm pentru R numerele 14, 24, 16, 26 şi avem în acest caz:

*196*, 576, 256, 676,

dintre care numai 196 poate conveni problemei.

Deasemenea, pentru ca pătratul să fie terminat cu 9, trebue să luăm pentru R numerele 13, 23, 17, 27 şi avem în acest caz:

*169*, 529, 289, 729,

dintre care numai 169 poate conveni problemei.

Aşă dar, dacă problema are o soluţie, al treilea pătrat trebue să fie terminat cu 1, însă în acest caz, cifra zecilor nu poate fi decât 6, căci 91 nu este terminaţiune de pătrat perfect. Extrăgând rădăcina pătrată din 961, găsim că el este pătrat perfect şi ca urmare problema admite o singură soluţiune, anume:

$$196 = 14^2, \quad 169 = 13^2, \quad 961 = 31^2.$$

Au dat soluţiuni apropiate, făcând însă un număr prea mare de încercări, D-nii: Ioan I. Cantacuzino, E. Gulian, F. Dobrescu-Băbici, Titu Rădulescu, Ion N. Şuşelescu, Şt. Fl. Lăzărescu, Gigă Mateescu şi Ion Vasiliu.

*Observare.* Problema este cunoscută, G. M., vol. VI, p. 287.

---

PROBLEMA 3102. *Produsul a două numere este un număr format de trei cifre consecutive. Care sunt acele numere?*

E. Ştefănescu.

1. Suma celor trei cifre consecutive fiind un multiplu de trei, numerele de trei cifre cerute sunt multipli de trei; prin urmare, trebue ca unul din factori să fie multiplu de trei.

Aşă dar, scriind produsele care satisfac această condiţiune necesară şi care dau un număr de trei cifre, avem:

$$11\times12,\quad 12\times13,\quad 14\times15,\quad 15\times16,\quad 17\times18,\quad 18\times19,$$
$$20\times21,\quad 21\times22,\quad 23\times24,\quad 24\times25,\quad 26\times27,\quad 27\times28,$$
$$29\times30,\quad 30\times31,$$

dintre care, înlăturând mai întâi pe acelea care dau cifra unităţilor zero, iar pe a sutelor evident mai mare ca două, rămân de calculat numai produsele:

$$11\times12,\quad 12\times13,\quad 14\times15,\quad 15\times16,\quad 17\times18,\quad 18\times19,$$
$$21\times22,\quad 23\times24,\quad 26\times27,\quad 27\times28.$$

Se găsesc astfel următoarele patru soluţiuni:

11,12 ; 14,15 ; 18,19 ; 27,28.

Au dat soluţiuni apropiate, D-nii: E. Pălărieru, I. C. Vasiliu, N. C. Segărceanu, L. Brüll, P. I. Bleiweiss, B. A. Reinhorn.

2. Ultima cifră a produsului cerut, de trei cifre, al celor două numere consecutive cerute va rezultà din înmulţirea cifrelor 0,1 ; 1,2 ; 2,3 ; 3,4 ; 4,5 ; 5,6 ; 6,7 ; 7,8 ; 8,9 ; aşà dar, produsele căutate, putând fi terminate numai cu 0,2 sau 6, se găsesc printre numerele:

120, 210, 102, 132, 312, 342, 432, 456, 546, 576,
756, 786 şi 876.

De altă parte, produsul a două numere consecutive $a$ şi $a+1$ fiind de forma $a^2+a$, din numerele de mai sus, numai acelea convin problemei, pentru care restul extragerei rădăcinii pătrate este egal cu rădăcina aflată. Găsim astfel, pentru numărul cel mic, următoarele patru soluţiuni:

11, 14, 18 şi 27.

Au dat soluţiuni apropiate, D-nii: E. Gulian, Gh. D. Simionescu, C. N. Popescu, Şt. F. Lăzărescu, T. N. Angelescu.

3. Au rezolvat problema pe alte căi, D-nii: M. I. Adam, Ov. Bolgiu, N. Botea, D. Blumenfeld, Gh. David, I. N. Dragomir, V. Ghiţescu, F. Goldstein, G. Ionescu-Zane, Gh. Mihoc, Fl. G. Popescu, C. Răuţ, A. I. S. Schächter, I. A. Serghiev, A. Tauber, S. Weiss.

PROBLEMA 3105. *Se dă un cerc fix cu centrul* O *şi altul variabil cu centrul pe cercul* O *şi trecând printr'un punct fix* P. *Care este locul geometric al intersecţiei liniei centrelor cu coarda comună?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l WILHELM I. SOLOMON.

Luăm ca axe coordonate linia OP şi perpendiculara pe ea în O. Fie $(p, 0)$ coordonatele lui P şi M $(a, b)$ un punct pe cercul O. Ecuaţiile cercului O şi ale cercului descris din M cu raza MP, sunt:

$$x^2+y^2=r^2, \tag{1}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(p-a)^2+b^2,$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-2ax-2by+2ap-p^2=0. \tag{2}$$

Scăzând ecuaţiile (1) şi (2), avem ecuaţia axei radicale:

$$2ax+2by-2ap+p^2-r^2=0. \tag{3}$$

Ecuaţia liniei centrelor OM este:

$$bx-ay=0. \tag{4}$$

Punctul M fiind pe cercul O avem:

$$a^2+b^2-r^2=0. \tag{5}$$

Eliminarea lui $a$ şi $b$ din ecuaţiile (3), (4) (5) ne va da ecuaţia intersecţiunii dreptelor (3) şi (4), adică a locului căutat. Ecuaţiile de gradul I în $a$ şi $b$ N (3) şi (4), se rezolvă imediat şi avem:

$$a=\frac{(r^2-p^2)x}{2(px-x^2-y^2)}, \qquad b=-\frac{(r^2-p^2)y}{2(px-x^2-y^2)}.$$

Introducând aceste valori în (5) şi gonind numitorii, avem:

$$4r^2(px-x^2-y^2)^2=(r^2-p^2)^2(x^2+y^2). \tag{6}$$

Această ecuaţie reprezintă un *melc* al lui PASCAL cu punctul dublu în O, cu axa de simetrie OP. El taie OX şi în punctele depărtate de P cu $(r^2-p^2)/2r$; axa OY, la aceleaşi distanţe dela O.

Dacă P este pe cerc, atunci $p=r$ şi ecuaţia (6) devine.

$$x^2+y^2-px=0, \tag{7}$$

care reprezintă un *cerc* cu centrul la mijlocul lui OP, trecând prin O şi P.

Au rezolvat problema, când P este pe cercul O, şi D-nii: A. M. DUMITRESCU, S. C. SOLACOLU, F. NEGRETZU.

PROBLEMA 3131. *Se cer patratele mai mici ca $10^b$, prime cu 10, la care sporind cu o unitate o cifră, să rămână tot pătrate.*

EM. ȘTEFĂNESCU.

Dacă N este numărul căutat, trebue conform enunțului să avem:

(1) $\qquad N^2 + 10^n = M^2 \quad$ și $\quad N^2 < 10^b$.

Numerele M și N sunt prime între ele, deoarece N trebue să fie prim cu 10, iar divizorul comun cu numerele M și N, este deasemenea divizor comun și numerelor $10^n$ și N.

Relațiunea (1) conduce la următoarea

(2) $\qquad (M+N)(M-N) = 10^n$

și se vede că $M^2$ și $N^2$, deci M și N, sunt de aceeași paritate. De altă parte, M și N fiind prime între ele, suma și diferența lor au divizor comun numai pe 2, avem deci:

$$(I)\ \begin{cases} M+N = 2.5^n \\ M-N = 2^{n-1} \end{cases} \quad \text{sau} \quad (II)\ \begin{cases} M+N = 2^{n-1}.5^n \\ M-N = 2 \end{cases},$$

care dau respectiv:

$$(I')\ \begin{cases} N = 5^n - 2^{n-2} \\ M = 5^n + 2^{n-2} \end{cases} \quad \text{sau} \quad (II')\ \begin{cases} N = 2^{n-2}.5^n - 1 \\ M = 2^{n-2}.5^n + 1 \end{cases}.$$

Numărul $b$ fiind dat, dăm lui $n$ valori în (I') și (II'), ținând seama de condițiunea $N^2 < 10^b$.

Au rezolvat problema D-nii: C. C. POPOVICI, GH. MIHOC, AL. TAUBER, N. TEODORESCU, EUG. PĂLĂRIERU, F. S. GOLDȘTEIN.

*Observare.* Fiind dat $b$, se poate fixă limita valorilor lui $n$. Avem, după enunț: (III) $2^{n-2}.5^n - 1 < 10^{\frac{b}{2}}$, care are loc simultan cu $25.10^{n-2} < 10^{\frac{b}{2}}$, $\therefore\ 625 < 10^{b-2n+4}$, deci $b - 2n + 4 \geq 3$, care dă (III) $n \leq (b+1)/2$.

Deasemenea, avem: (IV) $5^n - 2^{n-2} < 10^{\frac{b}{2}}$, care are loc simultan cu $5^n < 10^{\frac{b}{2}}$ $\therefore\ 5^{2n} < 10^b$ $\therefore\ 5^{2n-b} < 2^b$.

$$\therefore \quad \frac{2n-b}{b} < \frac{\log 2}{\log 5}, \quad \text{sau încă} \quad \frac{2n-b}{b} \leqq \frac{30000}{70000} < \frac{\log 2}{\log 5},$$

$$\therefore \quad 14n - 7b \leqq 3b, \quad \text{de unde: (IV)} \quad n \leqq \frac{5b}{7}.$$

Dintre rezolvitorii problemei, citãm pe D-l C. POPOVICI, care a dat numai condiţiunea (III).

O. N. Ţ.

---

PROBLEMA 3191. *Să se găsiască trei numere consecutive* (n — 1), n, (n + 1), *respectiv divizibile prin trei numere consecutive* (m — 1), m, (m + 1).

E. ŞTEFĂNESCU.

Numărul $n$ fiind divizibil cu $m$, avem: $n = m \cdot \alpha$, deci:

$$(1) \qquad \begin{cases} n-1 = m\cdot\alpha - 1 = (m-1)\alpha + (\alpha - 1) \\ n+1 = m\cdot\alpha + 1 = (m+1)\alpha - (\alpha - 1) \end{cases}.$$

Cum însă $(n-1)$ şi $(n+1)$ trebue să fie divizibile respectiv cu $(m-1)$ şi $(m+1)$, urmează că:

$$(2) \qquad \alpha - 1 = k(m-1)(m+1);$$

deci, dacă $m = 2p$, avem $n = km(m^2-1) + m$, (3);

iar dacă $m = 2p+1$, avem $n = km(m^2-1)/2 + m$ (4).

Au rezolvat problema, pe o cale mai lungă, D-nii: E. ŞTEFĂNESCU, O. POPEA, GH. D. SIMIONESCU, ION C. VASILIU, FILIP S. GOLDŞTEIN, N. G. BOTEA, N. TEODORESCU, O. I. BRAIESTER, H. MARCOVICI.

*Observaţii.* D-nii: C. I. CIORĂNESCU, P. IONESCU, I. C. VASILIU arată că problema este un caz particular al celei tratate în G. M., vol. VIII, p. 117.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3280. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin x + \text{arc}\sin x = 0.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: I. I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ, E. PĂTROIANU, B. REINHORN, A. STOICA, N. MIHĂESCU, R. SPATHY.

Avem $-1 \leqslant \sin x \leqslant +1$ şi deci trebuie ca şi $-1 \leqslant \text{arc}\sin x \leqslant +1$. Arcul este coprins între $\pm 1$ radian. In cadranul I, arcul şi sinusul sunt ambii pozitivi; în al IV, ambii negativi; deci suma lor nu poate fi 0. Pentru $x=0$, luând $\arcsin 0=0$, avem o soluţie, care este dar unica soluţie a problemei.

Soluţie dată de D-nii: I. I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ, E. PĂTROIANU, E. GRÜNSTEIN, M. DERMER, C. C. BRĂDEŢEANU, T. I. PUŞCĂ, I. VASILIU, D. I. POPOVICI, V. DORNEANU:

Curbele:

$$y = \sin x, \qquad y = \text{arc}\sin x \quad \text{sau} \quad x = \sin y,$$

reprezintă sinusoide egale, una oscilând în lungul lui OX, alta în lungul lui OY, şi pornind din origină tangent la bisectoarea unghiului XOY. Ele nu au dar alt punct comun decât în origină.

Soluţie dată de D-nii: C. BRĂDEŢEANU, AL. C. MLADENOVICI, I. MIU:

Din ecuaţia dată, deducem:

$$x = -\sin(\sin x).$$

Se observă că cei doi membri ai acestei ecuaţii sunt totdeauna de semne contrare. Nu pot fi egali decât dacă avem $+0 = -0$, deci $x = 0$.

Soluţie dată de D-nii: C. BRĂDEŢEANU şi N. MIHĂESCU:

In valoare absolută, avem totdeauna $\sin x < x$, şi *a fortiori* $\sin(\sin x) < x$. Egalitatea nu poate fi decât dacă $x = 0$, ceeace verifică ecuaţia.

Soluţie dată de D-nii: D. I. POPOVICI-PUIU şi I. VASILIU:

Desvoltăm $\sin x$ şi $\text{arc}\sin x$ în serii şi avem:

$$\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-....\pm(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)+..$$

$$+\frac{x}{1}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{1.3.x^5}{2.4.5}+.....+\frac{1.3.5....(2n-1)\,x^{2n+1}}{2.4.6....\,2n\,(2n+1)}+....=0$$

sau

$$2x+\frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{x^5}{5}\left(\frac{1.3}{2.4}+\frac{1}{4!}\right)+\frac{x^7}{7}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1}{6!}\right)+....=0$$

sau

$$x\left[2+\frac{x^4}{5}\left(\frac{1.3}{2.4}+\frac{1}{4!}\right)+\frac{x^6}{7}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1}{6!}\right)+....\right]=0.$$

Paranteza dreptliniară este totdeauna pozitivă, deci nu se poate anula. Deci numai $x=0$ poate fi soluție a problemei.

## EXERCIȚII

68. Se cer patratele de patru cifre, având cifrele extreme identice.

Gh. P. Bogdan.

R. Cifrele extreme pot fi 1, 4, 5, 6, 9. In primul caz numărul e de forma $1sz1$, de unde se vede că rădăcina ar puteà fi 39 ; 41 ; 49. Primele două dau soluțiile $39^2=1521$ și $41^2=1681$. Analog cu celelalte cifre. Se găsesc $68^2=4624$ ; $75^2=5625$ și $97^2=9409$.

69. Se cere un cub de 5 cifre, așà ca ultimele trei cifre să fie patratul rădăcinii sale cubice.

Angelo P. Ionescu-Cluj.

R. Avem condiția:

$$1000\,a+n^2=n^3.$$

Cum $n^2$ are 3 cifre, când $10\leqslant n<32$ și $n^3$ are 4 cifre dacă $21<n<187$. Deci $21<n<32$. Dar $n^2$ și $n^3$ se termină la fel dacă $n$ se termină cu 1, 5 sau 6. Deci $n$ poate fi 25, 26, 31. Numai $25^3=15625$ îndeplinește condiția cerută.

70. Se cere un număr impar de patru cifre, așà că mărind cifra a treia cu întâia, pe care o ștergem, să avem jumătatea numărului format intervertind în cel dat cifra a treia cu a patra.

Gh. Gh. Vasiliu.

R. Se cere *mszu*, aşa că:

$$100\,s + 10\,(z + m) + u = \tfrac{1}{2}\,(1000\,m + 100\,s + 10\,u + z),$$

$$980\,m + 8\,u = 100\,s + 19\,z.$$

Se vede că $z = \mathcal{M}\,4$. Nu putem lua $z = 0$, căci prima parte este cel puţin 980 şi a doua cel mult 900. Pentru $z = 4$, prima parte este cel puţin 980, iar a doua cel mult 976 ($1 = 9$, $z = 4$). Pentru $z = 8$, este necesar a lua $s = 9$, pentru a trece peste 980, când $m = 1$, şi de unde ese $u = 9$. Avem o singură soluţie: *1989*.

71. Să se calculeze limita expresiunei:

$$y = \frac{1 - \cos^n \alpha}{\alpha \sin \alpha},$$

când $\alpha$ tinde către zero, fără ajutorul derivatelor.

(Generalizarea problemei 28, cap. XX din Cul. prob. Algebră).

M. Adam.

R. Avem:

$$1 - \cos^n \alpha = (1 - \cos\alpha)\,(1 + \cos\alpha + \ldots + \cos^{n-1}\alpha) = \sin^2\alpha \cdot \frac{P}{1 + \cos\alpha}$$

aşa că:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{P}{1 + \cos\alpha}$$

sau, trecând la limită, găsim:

$$\lim y = \tfrac{1}{2}\,n.$$

In mod analog putem, găsi limita expresiei:

$$z = (\cos p\alpha - \cos q\alpha)/\alpha \sin m\alpha,$$

care este mai generală.

72. Dându-se ecuaţia

$$x^2 + px + q = 0,$$

cu rădăcinile $x_1$ şi $x_2$, să se formeze ecuaţia care să aibă ca rădăcini $\sqrt{x_1}$ şi $\sqrt{x_2}$.

M. Adam.

R. Avem:

$$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{q},$$

iar:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{2\sqrt{q} - p},$$

deci ecuaţia va fi:

$$y^2 - y\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q} = 0.$$

73. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{r_a^2}{d_a^4}+\frac{r_b^2}{d_b^4}+\frac{r_c^2}{d_c^4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\,r^2,$$

unde $d_a$, $d_b$, $d_c$ sunt distanţele dela vârfurile triunghiului, la centrele cercurilor exînscrise. Să să generalizeze.

M. Adam.

R. Găsim uşor:

$$r_a = d_a \sin\tfrac{1}{2}A \quad \text{etc.}$$

şi

$$p = d_a \cos\tfrac{1}{2}A \quad \text{etc.},$$

din care deducem

$$r_a/d_a^2 = \sin A/2p \quad \text{etc.},$$

sau

$$r_a^n/d_a^{2n} = \sin^n A/(2p)^n \quad \text{etc.},$$

care adunate, ne dau:

$$\sum \frac{r_a^n}{d_a^{2n}} = \frac{1}{(2p)^n}\sum \sin^n A = \frac{a^n+b^n+c^n}{a^n\,b^n\,c^n}\,r^n.$$

## PROBLEME PROPUSE

3301. Se cere patratul perfect *mszu*, ştiind că *su* este patratul lui *m*.

Gh. Gh. Vasiliu.

3302. Să se demonstreze identitatea

$$C_{pk+n}^n - C_p^1 C_{(p-1)k+n}^n + C_p^2 C_{(p-2)k+n}^n - \ldots + (-1)^p C_p^p C_n^n = 0,$$

pentru $p > n$.

Să se găsiască o expresiune condensată a primei părţi.

M. Ghermănescu.

3303. Să se rezolve, în numere întregi, ecuația:

$$x^2 + xy = y^2 + xz.$$

N. Teodorescu.

3304. Fie O și O′ două cercuri, ale căror cercuri ortoptice sunt ortogonale. Se duc tangentele comune exterioare AA′, BB′ și tangentele comune interioare CC′, DD′ la cercurile O și O′. Să se demonstreze că punctele A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ se găsesc pe două drepte $\Delta$ și $\Delta'$, perpendiculare între ele, că aceste drepte se întâlnesc pe linia OO′ și că fac unghiuri de 45° cu OO′. Fie $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$, $2\delta$ unghiurile pe care le face $\Delta$ cu tangentele PM, PN și PM′, PN′ duse din un punct P, de pe $\Delta$, la cercurile O și O′. Să se demonstreze că, dacă sensurile acestor unghiuri sunt convenabil alese, atunci

$$\cos^2(\alpha+\beta)\cos^2(\gamma-\delta) = \cos^2(\gamma+\delta)\cos^2(\alpha-\beta),$$

iar dacă razele cercurilor O și O′ rămân constante, raportul

$$[1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)]/[1+\operatorname{tg}(\gamma+\delta)]$$

păstrează o valoare constantă, când P se mișcă pe $\Delta$ sau $\Delta'$.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

3305. Cunoscându-se punctele, care împart laturile unui triunghiu dat ABC în același sens și în același raport $k$, să se găsiască, numai cu compasul, punctele care împart laturile în același sens și același raport $k^{2^n}$ și $1 : k^{2^n}$ ($n$ întreg și pozitiv).

Ion C. Vasiliu și C. I. Ciorănescu.

3306. Dacă transversalele unghiulare AO, BO, CO din planul unui triunghiu ABC, întâlnesc laturile opuse ale triunghiului respectiv în punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$, avem relațiunea

$$\frac{OA_1}{AA_1}\left[\frac{AB}{BA_1}+\frac{AC}{CB_1}\right]+\frac{OB_1}{BB_1}\left[\frac{BC}{CA_1}+\frac{BA}{AC_1}\right]+\frac{OC_1}{CC_1}\left[\frac{CA}{AB_1}+\frac{CB}{BA_1}\right]=4.$$

Const. C. Popovici.

3307. Care sunt eptagoanele, care au două axe de simetrie?

I. Ionescu.

3308. Să se calculeze valoarea determinantului

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & \dots & u_n^2 \\ u_n^2 & u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_{n-1}^2 \\ u_{n-1}^2 & u_n^2 & u_1^2 & \dots & u_{n-2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 & \dots & u_1^2 \end{vmatrix},$$

$u_1, u_2, u_3, \dots$ fiind termenii şirului lui Fibonacci ($u_1 = 1$, $u_2 = 2$).

N. Kaufmann.

3309. Să se afle limita produsului

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{a}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{a+1}\right) \dots \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{a+n}\right),$$

în cazul când $n$ tinde spre infinit. $(0 < x/a < \frac{1}{2}\pi)$.

C. H. Nicolau.

3310. Un vas de forma unui paralelipiped drept, de dimensiuni $a$, $b$, $h$, aşezat în poziţie verticală, este plin cu un lichid de greutate specifică $\gamma$. Vasul este suspendat, putându-se roti în jurul unei axe orizontale $m\,m$, paralelă cu laturea $a$, dar variabilă ca poziţie, determinată astfel ca la fiecare poziţie a vasului (din care a curs, peste marginele lui, o cantitate de lichid), vasul să se afle în echilibru.

*a)* Să se afle locul geometric al axelor $m\,m$, considerând şi greutatea G a vasului, gol de lichid.

*b)* Să se imagineze un dispozitiv de suspensiune şi rotire a vasului, ca să se realizeze un asemenea echilibru.

Cr. Mateescu.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Bleiweiss P.* (3266); *Botea N.* (3280, 85, 86, 89, 93, 97, R); *Brezuica I. I.* (C); *Buga I.* (3237); *Călin M. Gh.* (3274); *Cristescu C. I.* (3281); *Constantinescu M. M.* (R); *Dumitrescu A. N.* (N); *Dorneanu V.* (3218, 74, 80, 85, 86, 89); *Florea Al.* (3173, 237, 39); *Florescu Oct.* (3173); *Foca I.* (3290, E, P); *Georgescu Eug.* (3237); *Georgescu-Racoviță I.* (2856, 3173, 237); *Ghelber M.* (P); *Ghimicescu Gh.* (3173); *Giurumescu C.* (3237); *Grubenmann I. Gr.* (3222); *Grünbaum M.* (P); *Hartular Gh.* (3239); *Iliuță I. I.* (3222, R); *Ioachim Gr.* (3266, 85, 86, 89); *Ionescu Angelo* (3237, 39); *Kahane A.* (3290); *Katz I.* (3212); *Marcovici H.* (2856); *Mareș Gr.* (3266); *Massler Eug.* (3173, 246); *Mihăilescu C.* (3237); *Mihăilescu S. N.* (3266, 80); *Miu I.* (3173, 280, 85, 87, P); *Novac A.* (3237); *Novacu A. C. V.* (3266); *Paszko W.* (3239); *Pătroianu M.* (2999, 3239, 53, 66); *Popa I.* (2918, 3239); *Popea O.* (3173); *Popescu Corneliu* (2631, 891, 978, 3237); *Popescu Spirea* (3173); *Popovici Al.* (3237); *Popovici Aurel* (3266); *Popovici C. C.* (3163, 239); *Popovici-Puiu Dan* (2856, 91, 978, 3259, 68, N); *Popovici Th. I.* (3173); *Radev Ath.* (3239); *Reinhorn B.* (3237); *Roșu Al.* (2856); *Spacu P.* (3237); *Spathy R. I.* (3261, 80); *Spiridonescu Gh.* (3239); *Stoica A.* (2674); *Tailer G.* (3252, N, P); *Tăraș V.* (3285); *Teodorescu N.* (2978, 3285, 86, 87); *Țigoiu I.* (E); *Vasiliu Gh.* (E); *Vârlan V.* (3285, 86, 89, R).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2129, 222, 81, 440, 795, 829, 61, 79, 95, 920, 22, 3093, 102, 67, 78, 92, 203, 27, 28, 32, 33, 37, 42, 48, 62, 69, 72, 73, 82, 83, și 92 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE"

## 29 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme (Epuizată).

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, București).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.**

Mor Asociaţiunea pentru literatura
şi cultura poporului românesc
Sibiiu

# GAZETA MATEMATICA

...RE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXX.

...UMĂRUL 11. — IULIE 1925.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
ASOCIAȚIUNEA
SIBIIU

## SUMARUL

1. † Anghel Saligny.
2. Asupra unor cercuri remarcabile din triunghiu . *C. H. Nicolau.*
3. Note Matematice: 67—71.
4. Bibliografii.
5. Cereri: 125, 126.
6. Chestiuni de examen.
7. Probleme rezolvate: 3203, 3229, 3235, 3237, 3246, 3261, 3281.
8. Exerciţii: 74—80.
9. Probleme propuse: 3141, 3311—3320.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1925

F. T. — 197

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 2 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu,** Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu,** Cassier.

---

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

---

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu,* în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

---

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

---

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsa spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

---

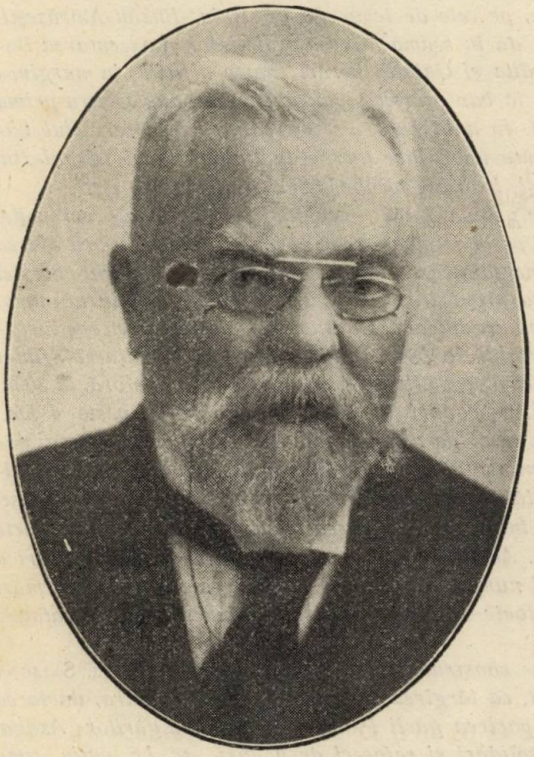
**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

---

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89. 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 92, 94, 208, 15, 20, 26, 28, 30, 32, 38, 40, 49, 55, 57, 58, 60, 62, 64, 69, 70, 72, 76, 78, 79, 82, 84, 88, 91, 92, 94, 96, 98, 300, 01, 02, 03, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

# † ANGHEL SALIGNY.

*In ziua de 17 iunie, şi-a dat obştescul sfârşit Inginerul Inspector General* Anghel Saligny, *al cărui nume este strâns legat de desvoltarea tecnică şi economică a Ţării noastre în ultimii 50 de ani, nume care va rămâne neperitor în Istoria tecnică universală.* Regele Carol I *a spus despre dânsul că era una din gloriile Domniei Lui, iar Primul Ministru al Ţării a spus, în ziua înmormântării, că „în generaţia pe care a cinstit-o, n'a fost român mai de seamă de cât* Saligny, *dacă se măsoară însemnătatea omului după roadele pe care le-a lăsat".*



Anghel Saligny *s'a născut la 2 Mai şt. v. 1854, în comuna Şerbăneşti din judeţul Tecuci. Studiile primare le-a făcut în familie, iar cele liceale, parte la Focşani şi parte la Potsdam in Germania. A urmat apoi, câtvà timp la Universitatea din Berlin, în vederea studiului Astronomiei. Actul de înscriere este semnat de marele matematician* Carol Teodor Weierstrass, *iar cel de liberă frecuentare a cursurilor de* A. Helmholz, *însă marea mişcare tecnică şi economică din acea ţară, în urma războiului ei cu Franţa din 1870, l'a făcut ca să-şi întoarcă privirile dela cer către pământ şi să se apuce de studiul ingineriei la Şcoala politecnică din Charlottenburg.*

*După terminarea studiilor, a rămas câtvà timp în Germania pentru a face practică de construcţiuni de căi ferate şi de poduri, iar la 1 ianuarie 1876, este numit în ţară, ca inginer la Stat.*

*Nu este acì locul de a expune şi a analizà opera tecnică şi economică a lui* Anghel Saligny, *de oarece un număr întreg al acestei reviste ar fi neîncăpător pentru aceasta. Societatea Politecnică din România, la întemeierea căreia, în 1881, a luat parte şi* Anghel Saligny, *şi pe care a prezidat-o în anii 1894, 1895, 1896, 1910 şi 1911 va publicà in curând un număr come-*

*morativ al Buletinului său, în care se va puteà vedeà pe larg viața și opera marelui dispărut. Aci, vom face numai o simplă enumerare a multiplelor și variatelor sale lucrări și ocupațiuni.*

*După numirea în serviciul Statului,* ANGHEL SALIGNY *a fost trimis mai întâiu în străinătate, pentru recepțiuni; a făcut apoi, pentru Primăria Capitalei, aleele de pe lângă șoseaua Kiselef, și tot în anul 1876 a fost trimis la controlul liniei în construcție Ploești-Predeal, unde a stat până la 1880, cu reședința la Breaza și în gara Câmpina. După un studiu sumar al liniei Buda-Slănic, i se dă în seamă studiul și construcțiunea liniei Adjud-Târgul-Ocna, pe care o termină în 1884. I se creează apoi, un Serviciu de Poduri la Căile ferate și reface podul de șosea și cale ferată dela Cosmești, înlocuiește, cu poduri metalice, pe cele de lemn de pe linia Buzău-Mărășești, etc. Tot în acest timp, i se dă în seamă facerea proiectelor și executarea Bazinelor și Docurilor din Brăila și Galați, lucrări foarte dificile, la marginea Dunării, pe care le-a dus la bun sfârșit și la care a introdus, pentru prima oară la noi, betonul armat. In anul 1887, i se încredințează și serviciul Lucrărilor noi dela Căile ferate, unde face lucrări la liniile Filiași-Târgul-Jiu, Bârlad-Vaslui, Crasna-Hușî, Leorda-Dorohoi, București-Fetești, etc.*

*La finele anului 1887, după două concursuri internaționale nereușite, pentru proiectul unui pod peste Dunăre, care să lege liniile ferate cu Marea Neagră, guvernul Țării încredințează lui* ANGHEL SALIGNY *studiul acestei chestiuni importante pentru propășirea economică a Țării. Înconjurat numai de ingineri români, termină, în doi ani, studiile și proiectele și începe lucrările în 1890, pe care le termină la 1895, când, în ziua de Înnălțarea Sfintei Cruci, un tren format de 15 Locomotive grele sboară cu 80 km/oră, la 30 m. înălțime deasupra Dunării, pe poduri în lungime totală de peste 4 km., având picioarele depărtate unul de altul până la 190 m., cum nu se mai văzuseră până atunci pe Continentul Europei. Bătrânul Danubiu, care la viiturile mari se răsfață pe lățimi de scurgere de peste 15 km, dela Fetești până la Cernavoda, a fost încătușat ca să treacă numai pe a patra parte din lățimea lui anterioară. Admirațiunea pentru reușita acestei lucrări a fost universală; de atunci numele lui* ANGHEL SALIGNY *a trecut peste mări și țări și este pomenit în toate școlile tecnice superioare și în toate tratatele mari de poduri.*

*In timpul pe când se construià Podul peste Dunăre,* ANGHEL SALIGNY *a mai făcut și alte lucrări, ca lărgirea liniei ferate Bacău-Piatra, dublarea liniei București-Ploiești, sporirea gării Ploiești, construcția gărilor Azuga, Râmnicul Sărat, etc.; consolidări și refaceri de poduri, etc. La puțin timp după inaugurarea podului peste Dunăre, a fost numit Director General al Căilor ferate, la care a adus îmbunătățiri mari, a sporit iuțeala trenurilor mai mult decât era, pe atunci în țările vecine, a legat Bucureștii cu Berlinul printr'un tren rapid, a făcut legi de organizare, etc.*

*In anul 1899, după moartea lui* G. DUCA, ANGHEL SALIGNY *este numit Directorul lucrărilor Portului Constanța, pentru care elaborează un proiect nou, face cheuri, bazine, rezervoare pentru exportul petrolului. docuri, etc. Lucrările au fost inaugurate în 1909, în prezența Regelui Carol I. In această*

*perioadă de timp,* ANGHEL SALIGNY *a mai avut în seamă Direcțiunea Serviciului Hidraulic, unde a adus îmbunătățiri mari porturilor dunărene, a creeat altele noi, ca noul port al Giurgiului, a semnalizat, ziua și noaptea, calea pe care trebuie să meargă vasele pe Dunăre, etc. I s'a încredințat apoi, Direcțiunea Navigațiunii fluviale române, pe care a desvoltat-o făcând-o să fie cea mai importantă pe Dunăre. Tot lui* ANGHEL SALIGNY *i se datorește extensiunea Navigațiunii maritime române dincolo de Marea Neagră, făcând ca Tricolorul Țării să fâlfâie pe Marea Mediterană, Oceanul Atlantic, Canalul Mânecii, Marea Nordului, până la Roterdam. Lui i s'a mai încredințat Inspectoratul general al Porturilor și Administrația Docurilor din Brăila și Galați. Toate aceste Direcțiuni au fost concentrate, împreună cu Șantierul naval dela Turnu-Severin, în Direcțiunea Generală a Porturilor și Căilor de comunicație pe apă, creată în anul 1908, în capul căreia* ANGHEL SALIGNY *a stat până la finele anului 1910. De atunci, a părăsit serviciile Ministerului de Lucrări Publice fiind numit în Ministerul Agriculturii și Domeniilor, la Direcțiunea Generală a îmbunătățirilor fonciare, de curând înființată, pentru punerea în valoare a terenurilor din zona inundabilă a Dunării și a altor râuri mari din țară, pentru studii de desecări de bălți, de irigațiuni, etc. Din cauza situațiunii turbure din Europa, dela 1911 încoace, a războiului cu Bulgaria în 1913 și a războiului pentru întregirea neamului din anii 1916—1918, nu a putut da acolo toate roadele ce le-ar fi putut realiză în timpuri normale. De aceea, în timpul pregătirii noastre pentru război, a fost numit la Ministerul de Război, Direcțiunea Generală a Munițiilor, ca conducător al acestei mari Direcțiuni, activând fabricațiunile la pulberării, pirotecnii, arsenale, etc. După intrarea în război, a fost însărcinat de guvern cu transportul tesaurelor țării la Moscova, și cu diferite misiuni în Rusia, unde a avut multe de îndurat și unde era să cadă pradă furiei bolșevice. La întoarcerea la Iași, a părăsit Serviciile Statului, iar în Octomvrie 1918 a fost chemat ca Ministru de Lucrări Publice în guvernul sub care s'a făcut isgonirea dușmanului din teritoriile pe care le ocupase în țara noastră. Ca Ministru, a stat numai până la Fevruarie 1919 când și-a reluat ocupațiunile sale particulare.*

*In tot timpul cât a funcționat la Stat, a avut o mulțime de însărcinări grele și importante, pe care le-a dus la bun sfârșit. Astfel, a reprezentat țara la Congrese internaționale de căi ferate și de navigațiune ; a organizat și prezidat Congresul internațional de petrol, ținut la București în 1909, a prezidat Comisiunile internaționale pentru delimitarea țării cu Bulgaria și Rusia, aducând astfel liniște țării la frontierele de Sud și de Răsărit; a făcut parte din Comisiuni pentru apărarea țării, etc. Din 1900, și până la retragerea din funcțiunile Statului, a prezidat Consiliul tecnic superior al Lucrărilor Publice, căruia i-a dat o nouă organizare în timpul cât a fost Ministru. După război, a fost chemat la toate Comisiunile care s'au ocupat cu reorganizarea Direcțiunilor pe unde a trecut* ANGHEL SALIGNY, *în Comisiuni care s'au ocupat cu refacerea Țării, reorganizare de Ministere, precum și ca președinte al Comisiunii pentru organizarea Serbării încoronării Suveranilor noștri, în anul 1922. In Corpul tecnic al Statului, a intrat la 1 Ia-*

*nuarie 1871, a fost înaintat inginer șef la 1882, Inspector general clasa II la 1890 și de clasa I la 1894, așă că, în 18 ani, a urcat toate treptele erarhiei acelui Corp.*

*Încă înainte de războiu,* ANGHEL SALILNY *fusese chemat de diferite instituțiuni financiare, economice și industriale în Consiliile lor de administrațiune pentru ca, prin luminile și marea lui experiență în chestiuni tecnice și economice, să contribuie la bunul lor mers și la prosperitatea lor. In această categorie, sunt, de exemplu : Banca Națională a României, Banca de scont, Societatea comunală de tramvaie din București, Societatea petroliferă Steaua, Societățile de navigație pe Dunăre și pe Mare, etc. Un număr mare de instituțiuni create după războiu au făcut apel la* ANGHEL SALIGNY *spre a lua parte la conducerea lor, și din acest punct de vedere, am puteà spune că s'a abuzat de sănătatea și de bătrânețele lui, căci dânsul nu se mulțumià numai de a fi un figurant în acele instituțiuni, ci l'au ținut necontenit în preocupări, griji, și muncă, până în ziua în care și-a dat sfârșitul. Printre Societățile la conducerea cărora a luat parte, putem menționà . Creditul național industrial, Șantierele navale dela Galați, Uzinele metalurgice Reșița, Clădirea românească, Mecano, Creditul pentru Intreprinderi electrice, etc. De curând, fusese ales la conducerea Societății Copșa mică și Cujir. La Stat, mai aveà și în ultimul timp câtevà ocupațiuni, ca de exemplu Președinte al Comitetului de direcțiune de pe lângă Direcțiunea Generală de Căi ferate în Construcție, și i se rezervase Președenția Consiliului de administrațiune al Căilor ferate, instituit prin legea votată anul acesta.*

*In afară de activitatea sa tecnică și economică,* ANGHEL SALIGNY *a contribuit la ridicarea ingineriei române ca profesor la Școala Națională de Poduri și Sosele unde a fost numit de* G. DUCA *în anul 1884, la Cursul de poduri. In primii ani, s'a ocupat și de lucrările practice și proiectele elevilor, căutând a le da toate cunoștințele spre a puteà fi la înălțimea absolvenților celor mai bune școli tecnice superioare din străinătate. Dânsul a făcut parte din Corpul profesoral al Școalei până la 1915, și din toate Comisiunile de îmbunătățire ale acelei școale. Dela creearea actualei Școale Politecnice din București,* ANGHEL SALIGNY *a fost necontenit Președintele Consiliului ei de perfecționare. El a fost unul din factorii de căpetenie al ridicării Corpului tecnic român.*

*Pentru marele sale merite, Academia Română, l'a ales Membru Corespondent, înainte de terminarea podului peste Dunăre, iar în anul 1897, a fost ales ca membru activ. In anii 1907—1910 a fost președinte al Academiei, în care calitate a făcut înbunătățiri în administrație și a creeat Casa de pensiuni a funcționarilor acelei Instituțiuni.*

ANGHEL SALIGNY *a făcut parte, dela 1914 și din Societatea* „Gazeta Matematică", *la care țineà foarte mult, căci, după cum s'a exprimat de mai multe ori, este singura care nu i-a adus decât mulțumire și plăcere. Inițiatorii* „Gazetei Matematice" *au fost numai ingineri din birourile tecnice de sub conducerea lui* ANGHEL SALIGNY, *în anii 1894 și 1895. Cei nouă redactori, cu care a pornit revista, au fost toți elevi ai săi la Școala națională de poduri și sosele : ei au făcut ca primul număr din revistă să apară și să*

*se distribuie a doua zi după inaugurarea podului peste Dunăre, la 15 septemvrie st. v. 1895. Apariţiunea Gazetei a fost primită de* ANGHEL SALIGNY *cu multă satisfacţiune şi cu multă încurajare pentru foştii săi elevi, ţinând să se înscrie şi printre primii abonaţi ai revistei. In anul 1909,* „Gazeta Matematică“ *a ţinut să-şi serbeze succesul său cu colaboratorii şi admiratorii ei. Printre aceşti din urmă, primul care s'a înscris a fost* ANGHEL SALIGNY, *care în calitate de Preşedinte al Academiei române a şi fost rugat să prezideze acea serbare. Pentru dragostea pe care dânsul a arătat-o totdeauna acestei reviste, Societatea noastră a admis ca în anul 1914 să se creieze fondul «*ANGHEL SALIGNY*», cu care s'a înfiinţat* **Biblioteca tecnică a Gazetei Matematice,** *din care se vor publică cărţi de matematici aplicate sau cu coprins tecnic. La masa care s'a dat cu acea ocaziune, dânsul şi-a exprimat dorinţa, ca faţă de importantul rol pe care îl are* „Gazeta Matematică“ *la noi în ţară, să fie admis ca membru al Societăţii, cerere primită cu entusiazm şi recunoştinţă. De atunci, cu toate nenumăratele sale ocupaţiuni şi preocupări, veneà din când în când la şedinţele, adunările generale sau la concursurile «Gazetei Matematice». Fiind de faţă la Adunarea generală din august 1925, membrii prezenţi l-au aclamat ca membru în Delegaţiunea Societăţii pe anii 1923—1925, fapt care l'a înduioşat foarte mult. «Gazeta Matematică» se mândreşte că a putut aveà în fruntea ei pe acest geniu al omenirii şi îi va păstrà veşnic cea mai frumoasă amintire. Prin cărţile care se vor publică în Biblioteca technică, numele lui va rămâne neşters de pe coperta «Gazetei Matematice şi de pe frontispiciul volumelor publicate în acea bibliotecă.*

*In ultimii trei ani, starea sănătăţii lui* ANGHEL SALIGNY *îi lasă puţine zile de linişte; o boală de inimă îi ameninţă existenţa din zi în zi. La 17 iunie, după ce dimineaţa a fost la una din Societăţile, pe care le conduceà, şi a luat masa în familie, vesel, pentrucă erà ziua de naştere a iubitei sale soţii, s'a aşezat pe un scaun şi pe nesimţite şi-a dat sfârşitul. Inmormântarea a avut loc în ziua de 19 iunie. După serviciul religios, la domiciliu, D-l Prim Ministru* ION I. C. BRĂTIANU, *D-l Ministru al Comunicaţiilor* A. VĂITOIANU, *D-l Vice-preşedinte al Academiei,* G. ŢIŢEICA, *D-l* O. KIRIACESCU, *Director la Banca Naţională a României şi D-l* N. P. ŞTEFĂNESCU, *Preşedintele Societăţii politecnice, au arătat, în cuvântări scurte, marea operă săvârşită de* ANGHEL SALIGNY. *Pentru serviciile aduse de dânsul Ţării, guvernul i-a făcut funerarii naţionale. Coroane purtate pe mâini, printre care şi cea depusă de o delegaţiune a «Gazetei Matematice şi două care pline cu coroane, însoţiau cortegiul funebru. Decoraţiunile: Coroana României, Steaua României şi Ordinul Carol I toate în gradul cel mai înalt de Mare Cruce; Legiunea de onoare a Franţei în gradul de Mare Ofiţer, etc. etc. erau purtate de ofiţeri. Detaşamente din toate armele, ingineri, foşti elevi, foşti funcţionari şi muncitori de prin Serviciile pe care le-a condus* ANGHEL SALIGNY, *au urmat carul funebru până la Cimitirul St. Vineri, unde rămăşiţele lui pământeşti au fost depuse în cavoul familiei.*

*Simpatia şi recunoştinţa, care s'au manifestat pentru* Anghel Saligny, *în această zi de doliu naţional, a fost o alinare a marilor dureri încercate de iubita lui soţie şi iubiţii lui copii, prin pierderea aceluia care, în viaţa lui, nu a cunoscut altcevà decât* **munca, datoria şi familia.**

*Cinstire veşnică memoriei lui!*

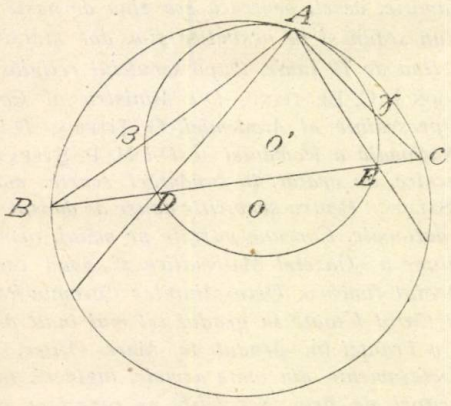
---

# ASUPRA
# UNOR CERCURI REMARCABILE DIN TRIUNGHIU.

In cele următoare, va fi vorba despre cercurile tangente interior cercului circumscris unui triunghiu şi la câte două din laturile acestuia.

Inainte însă de a trece la subiectul propriu zis al notei de faţă, vom expune în prealabil câtevà teoreme asupra dreptelor isogonale, care ne vor servì la demonstrarea unora din proprietăţile ce vor urmà.

**Teoremă.** *a) Două cercuri* O *şi* O′ *fiind tangente interior în* A *şi* BC *fiind o dreaptă oarecare din plan care taie cele două cercuri respectiv în punctele* B, C *şi* D, E *dreptele* AD *şi* AE *sunt isogonale în raport cu unghiul* BAC.




In adevăr, A fiind un centru de asemănare al cercurilor O şi O′, urmează că dreptele AB şi AC taie a doua oară cercul O′ în punctele β şi γ, care sunt omoloagele lui B şi C. De aici, rezultă

că $\beta\gamma$ este paralelă cu BC şi deci unghiurile BAD şi CAE sunt egale, căci au măsuri egale în cercul O'.

In cazul când punctele D şi E apropiindu-se, tind a se confundă la limită într'un punct D, în virtutea continuităţi, dreapta AD devine bisectoara unghiului BAC. Avem aşă dar enunţul următor:

*b) Două cercuri* O *şi* O' *fiind tangente interioare în* A *şi* BC *fiind o coardă a cercului mare tangentă în* D *la cercul mic, dreapta* AD *este bisectoara interioară a unghiului* BAC.

Această proprietate face obiectul problemei 103, dela pagina 379 a tratatului de Geometrie a lui *Rouché* şi *Comberousse*, ediţia nouă (1922).

*c)* **Teoremă reciprocă.** *Cercul, care trece prin picioarele unei perechi de drepte isogonale şi prin vârful triunghiului, opus acestora, este tangent cercului circumscris triunghiului considerat.*

Păstrând notaţiunile din teorema directă, trebue să demonstrăm că cercul (ADE) este tangent în A cercului (ABC).

Dacă A' este piciorul înălţimei care pleacă din A, se ştie că dreptele AO şi AA' sunt isogonale şi cum AD şi AE sunt isogonale prin ipoteză, urmează că avem:

$$\sphericalangle O'AE = \sphericalangle A'AD \text{ şi } \sphericalangle EAB = \sphericalangle DAC.$$

Dacă adunăm aceste egalităţi parte cu parte, obţinem:

$$\sphericalangle O'AB = \sphericalangle A'AC = \sphericalangle OAB,$$

ceeace probează că punctele O, O', sunt colineare. Cum cercul (ADE) trece prin A şi centrul său O' este pe raza OA, urmează că el este tangent cercului (ABC). In cazul când dreptele AD şi AE, continuând să rămână isogonale, se apropie până se confundă cu bisectoara unghiului BAC, putem enunţă teorema reciprocă *c)* astfel: *cercul tangent laturei* BC, *a unui triunghiu* ABC, *în piciorul bisectoarei unghiului* A *şi care trece şi prin vârful opus laturei considerate, este tangent cercului circumscris triunghiului* ABC.

Teorema *b)*, citată precedent, mai admite o reciprocă cu enunţul următor:

*d) Dacă se consideră un triunghiu oarecare* ABC, *înscris în cercul* O, *atunci cercul tangent în* A *cercului* O *şi care trece prin piciorul* D *al bisectoarei unghiului* A *este tangent laturei* BC.

In adevăr, conform primei teoreme demonstrate, cercul tangent în A cercului O taie latura BC în două puncte, care sunt picioarele

unei perechi de drepte isogonale față de unghiul A. Cum acest cerc, conform enunțului, taie latura BC în punctul D, piciorul bisectoarei unghiului A, urmează că cel de al doilea punct de intersecție se va confundà cu D și deci că cercul este tangent laturei BC în punctul D.

Teoremele enunțate sunt adevărate, cu oarecari modificări de enunț, și în cazul când cercurile O și O′ sunt tangente exterioare.

Dacă convenim a numi „isogonale exterioare" două drepte simetrice față de bisectoara exterioară a unui unghiu și trecând prin vârful acestuia, atunci enunțul teoremei corespunzătoare teoremei *a)* demonstrată mai sus, va fi:

*e) Dacă două cercuri* O *și* O′ *sunt tangente exterioare într'un punct* A *și dacă ducem o dreaptă oarecare* Δ, *care întâlnește pe cele două cercuri respectiv în punctele* B, C, D, E, *dreptele* AD *și* AE *sunt isogonale exterioare față de unghiul* BAC *și reciproc.*

In cazul când dreapta Δ este tangentă cercului O′ în punctul D, dreapta AD este bisectoara exterioară unghiului BAC.

Demonstrarea acestor proprietăți precum și a reciprocelor lor, al căror enunț este ușor de formulat, este analoagă cu cea relativ la cercurile tangente interioare, așà că nu vom insistà mai mult.

E ușor de văzut că proprietățile precedente se pot extinde la sfere.

Să trecem acum la studiul chestiunei ce ne-am propus.

Fie ABC un triunghiu oarecare, înscris în cercul O și circumscris cercului I. Să notăm cu $O_a$, $O_b$, $O_c$ centrele cercurilor înscrise respectiv în unghiurile BAC, CBA și ACB și tangente în $A_1$, $B_1$, $C_1$ la cercul O; cu $A_b$, $A_c$, $B_a$, $B_c$, $C_a$, $C_b$ respectiv punctele de contact ale cercurilor $O_a$, $O_b$, $O_c$ cu laturile AC, AB, BC, BA, CB, CA; cu A′, B′, C′ punctele de contact ale cercului I cu laturile lui ABC și cu $A_2$, $B_2$, $C_2$ punctele în care bisectoarele triunghiului ABC întâlnesc pentru a doua oară cercul O.

1. *Dreptele* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ *sunt concurente.*

Se observă că dreptele $A_1A_b$ și $A_1A_c$ trec respectiv prin punctele $B_2$ și $C_2$, aceasta conform uneia din teoremele demonstrate precedent.

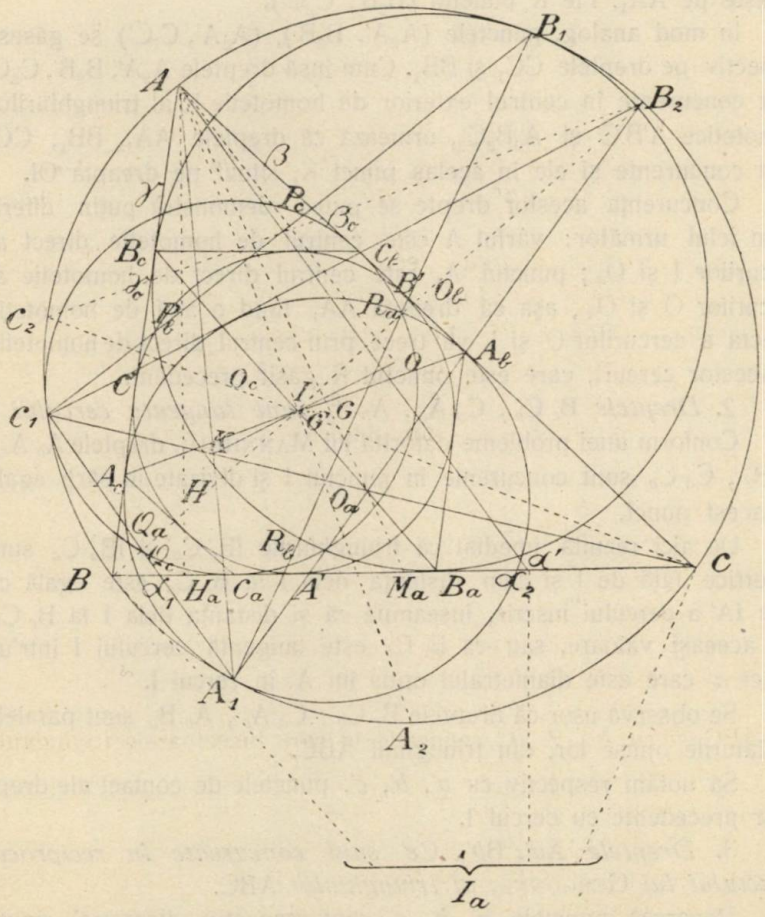
Să considerăm pe latura AB un punct $\gamma$ și pe AC un punct $\beta$, ambele mobile însă legate prin condițiunea:

$$A\beta = A\gamma.$$

In acest caz, punctele $\beta$ și $\gamma$ se corespund în două diviziuni omografice și deci locul de întâlnire al razelor omoloage $(B_2\beta,\ C_2\gamma)$ va fi o conică trecând prin punctele $B_2$ și $C_2$. Cum însă dreapta $B_2C_2$ taie laturile AB și AC în două puncte $\gamma_0$, $\beta_0$ pentru care avem evident:

$$A\beta_0 = A\gamma_0,$$

urmează că $B_2C_2$ aparține locului căutat. Conica loc al punctului $(B_2\beta,\ C_2\gamma)$ se descompune deci în două drepte, una fiind $B_2C_2$, iar




cealaltă $AA_1$, căci conform observațiunei făcută mai sus, punctul $A_1$ răspunde condițiunilor inițial impuse ( $AA_b = AA_c$ ).

Din cele precedente, rezultă un mijloc simplu pentru determinarea punctelor $O_a$ şi $A_1$, spre exemplu, fără a trasă cercul respectiv. Pentru aceasta, se iau pe laturile AB şi AC două puncte oarecare legate prin relaţia $A\beta = A\gamma$, se determină punctul $(B_2\beta,\ C_2\gamma)$ şi dreapta $A(B_2\beta,\ C_2\gamma)$ taie a doua oară cercul O în punctul $A_1$ de contact al cercurilor O şi $O_a$. Punctul $O_a$ se află la intersecţia dreptelor $(AI,\ OA_1)$.

In cazul când considerăm ca puncte $\beta$, $\gamma$ punctele B' şi C' de contact ale laturilor AC şi AB cu cercul I, punctul $(B_2B',\ C_2C')$ se găseşte pe $AA_1$. Fie K punctul $(B_2B',\ C_2C')$.

In mod analog, punctele $(A_2A',\ B_2B')$, $(A_2A',\ C_2C')$ se găsesc respectiv pe dreptele $CC_1$ şi $BB_1$. Cum însă dreptele $A_2A'$, $B_2B'$, $C_2C'$ sunt concurente în centrul exterior de homotetie K al triunghiurilor homotetice A'B'C' şi $A_2B_2C_2$, urmează că dreptele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sunt concurente şi ele în acelaş punct K, situat pe dreapta OI.

Concurenţa acestor drepte se puteà demonstrà puţin diferit şi în felul următor: vârful A este centrul de homotetie direct al cercurilor I şi $O_a$; punctul $A_1$ este centrul direct de homotetie al cercurilor O şi $O_a$, aşa că dreapta $AA_1$ fiind o axă de homotetie directă a cercurilor O şi I, va trece prin centrul direct de homotetie al acestor cercuri, care este punctul K găsit precedent.

2. *Dreptele* $B_c C_b$, $C_a A_c$, $A_b B_a$ *sunt tangente cercului* I.

Conform unei probleme datorită lui MANNHEIM, dreptele $A_b A_c$, $B_a B_c$, $C_a C_b$ sunt concurente în punctul I şi divizate în părţi egale de acest punct.

De aici rezultă imediat că triunghiurile $IB_c C_b$ şi $IB_a C_a$ sunt simetrice faţă de I şi cum distanţa dela I la $B_a C_a$ este egală cu raza IA' a cercului înscris, înseamnă că şi distanţa dela I la $B_c C_b$ are aceeaşi valoare, sau că $B_c C_b$ este tangentă cercului I într'un punct $a'$ care este diametralul opus lui A' în cercul I.

Se observă uşor că dreptele $B_c C_b$, $C_a A_c$, $A_b B_a$ sunt paralele cu laturile opuse lor, diu triunghiul ABC.

Să notăm respectiv cu $a'$, $b'$, $c'$, punctele de contact ale dreptelor precedente cu cercul I.

3. *Dreptele* $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$ *sunt concurente în reciprocul punctului lui* GERGONNE, *al triunghiului* ABC.

Deoarece punctele $a'$, $b'$, $c'$ sunt respectiv diametral opuse

punctelor A', B', C' de pe cercul I, concurența celor trei drepte rezultă din teorema lui KARIYA.

De altfel se observă că în cele două triunghiuri asemenea $AB_c C_b$ și ABC, punctul $a'$ din triunghiul $AB_c C_b$ are ca omolog, în triunghiul ABC, punctul de contact $\alpha'$ al laturei BC cu cercul exînscris $I_a$.

Rezultă că punctele A, $a'$, $\alpha'$ sunt colineare și deci că dreptele $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$ concură în reciprocul punctului lui GERGONNE, al triunghiului ABC.

4. *Dreptele* $A_1A_b$, $C_1C_b$, *precum și perechile de drepte analoage, se taie pe cercul* O.

Aceasta este o consecință imediată a teoremei *b)* enunțate la începutul acestei note. In adevăr, conform acelei teoreme, dreptele $A_1A_b$ și $C_1C_b$ sunt respectiv bisectoarele unghiurilor $AA_1C$ și $AC_1C$ și deci trec amândouă prin mijlocul $B_2$ al arcului AC.

5. *Punctele* $B_1$, $C_1$, $B_a$, $C_a$, *precum și analoagele lor, sunt pe câte un acelaș cerc.*

In adevăr, conform proprietății precedente, dreptele $B_1B_a$ și $C_1C_a$ se întâlnesc în mijlocul $A_2$ al cercului BC. De aici rezultă că avem:

$$\sphericalangle C_1 C_a B = \tfrac{1}{2} (\text{arc } C_1B + \text{arc } A_2C).$$

$$\sphericalangle C_1 B_1 B_a = \tfrac{1}{2} (\text{arc } C_1B + \text{arc } A_2B).$$

Cum însă $A_2$ este mijlocul arcului BC, urmează imediat că:

$$\sphericalangle C_1 C_a B = \sphericalangle C_1 B_1 B_a$$

și deci că patrulaterul $B_1 C_1 B_a C_a$ este inscriptibil.

Vom căuta acum expresiunile câtorvă segmente mai importante ale figurei, în funcție de elementele triunghiului ABC, care ne vor folosi în demonstrarea unora din proprietățile ce vor urmă.

Triunghiul dreptunghic $IAA_b$ dă:

$$AA_b = AI \sec \tfrac{1}{2}A = (p-a) \sec^2 \tfrac{1}{2}A = bc : p = AA_c . \qquad (1)$$

Valorile celorlalte segmente analoage se obțin prin permutări circulare, din formula precedentă.

$$AB_c = c - BB_c = c - ac/p = c(p-a)/p \qquad (2)$$

$$AC_b = b - CC_b = b - ab/p = b(p-a)/p \qquad (3)$$

Segmentele analoage acestora se deduc ușor, prin simetrie, din expresiunile precedente.

Din asemănarea triunghiurilor $AB_c C_b$ și ABC, ținând seamă de relațiile (2) și (3) deducem:

$$B_c C_b = a(p-a)/p \tag{4}$$

6. *In hexagonul* $AB_1CA_1BC_1$ *produsul a trei laturi neconsecutive este egal cu produsul celorlalte trei laturi.*

Să notăm cu $\alpha_1$, $\alpha_2$ punctele în care cercul $O_a$ taie latura BC și cu $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ punctele analoage acestora.

Dacă considerăm triunghiul $A_1BC$ și punctele $\alpha_1$, $\alpha_2$, atunci conform teoremei enunțate la începutul acestui studiu, dreptele $A_1\alpha_1$ și $A_1\alpha_2$ sunt isogonale față de unghiul $BA_1C$. In acest caz însă, conform unei teoreme asupra dreptelor isogonale, avem:

$$\frac{B\alpha_1 \cdot B\alpha_2}{C\alpha_1 \cdot C\alpha_2} = \frac{BA_1^2}{CA_1^2}. \tag{5}$$

Insă se observă că mai există și relațiunile:

$$B\alpha_1 \cdot B\alpha_2 = BA_c^2$$
$$C\alpha_1 \cdot C\alpha_2 = CA_b^2,$$

așă că, în definitiv, obținem:

$$BA_1/BC_1 = BA_c/CA_b.$$

Ținând seamă și de relațiunile (2), (3) și analoagele acestora, putem scrie:

$$BA_1/CA_1 = c(p-b)/b(p-c)$$

și prin analogie:

$$CB_1/AB_1 = a(p-c)/c(p-a);\ AC_1/BC_1 = b(p-a)/a(p-b).$$

Inmulțind ultimele trei egalități membru cu membru, obținem:

$$\frac{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B} = 1,$$

relațiune care demonstrează proprietatea anunțată.

7. *Punctele* $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ *sunt pe o aceeași conică.*

Ținând seamă de relațiunea (5) și analoagele acesteia, putem scrie:

$$\frac{B\alpha_1 \cdot B\alpha_2 \cdot C\beta_1 \cdot C\beta_2 \cdot A\gamma_1 \cdot A\gamma_2}{C\alpha_1 \cdot C\alpha_2 \cdot A\beta_1 \cdot A\beta_2 \cdot B\gamma_1 \cdot B\gamma_2} = \frac{A_1B^2 \cdot B_1C^2 \cdot C_1A^2}{A_1C^2 \cdot B_1A^2 \cdot C_1B^2}.$$

După cele demonstrate la §6, partea a doua a egalității precedente este egală cu 1, așa că, potrivit reciprocei teoremei lui CARNOT, cele șase puncte sunt pe o conică.

Să notăm cu $R_a$, $R_b$ punctele în care latura $A_1B_1$ întâlnește a doua oară respectiv cercurile $O_a$ și $O_b$, iar cu $Q_a$, $Q_c$, $P_b$, $P_c$ punctele analoage de pe dreptele $A_1C_1$ și $B_1C_1$.

8. *Punctele* $P_b$, $P_c$, $Q_a$, $Q_c$, $R_a$, $R_b$ *sunt pe o conică.*

Se observă că $P_cQ_c$ e paralelă cu $A_1B_1$, deoarece dreptele $C_1A_1$ și $C_1B_1$ care pleacă dintr'un centru de asemănare $C_1$ al cercurilor $O_c$ și O taie pe acestea în puncte omoloage.

De asemenea, se observă că $O_bP_b$ e paralelă cu $OC_1$ și $O_cP_c$ cu $OB_1$.

Din acest paralelism, deducem:

$$\frac{B_1P_c}{B_1C_1} = \frac{OO_c}{R}\ ;\ \frac{B_1P_b}{B_1C_1} = \frac{\rho_b}{R}\ ;\ \frac{C_1P_b}{C_1B_1} = \frac{OO_b}{R}\ ;\ \frac{C_1P_c}{C_1B_1} = \frac{\rho_c}{R}, \qquad (6)$$

unde $\rho_b$, $\rho_c$, R sunt respectiv razele cercurilor $O_b$, $O_c$ și O.

Din relațiunile precedente, deducem:

$$\frac{B_1P_c \cdot B_1P_b}{C_1P_c \cdot C_1P_b} = \frac{OO_c \cdot \rho_b}{OO_b \cdot \rho_c}.$$

Scriind alte două egalități analoage cu precedenta și înmulțindu-le, observăm că membrul al doilea al egalității este 1, așa că potrivit teoremei citate și la cazul precedent, cele șase puncte sunt pe o conică.

Divizând, parte cu parte, prima egalitate din șirul (6) cu a treia și pe a doua cu a patra, obținem:

$$B_1P_c / C_1P_b = OO_c / OO_b\ ;\ B_1P_b / C_1P_c = \rho_b / \rho_c.$$

Inmulțind aceste relațiuni cu analoagele lor, obținem egalitățile:

$$A_1R_b \cdot B_1P_c \cdot C_1Q_a = A_1Q_c \cdot C_1P_b \cdot B_1R_a.$$
$$A_1R_a \cdot B_1P_b \cdot C_1Q_c = A_1Q_a \cdot C_1P_c \cdot B_1R_b.$$

9. *Punctul* K *este inversul reciprocului punctului lui* GERGONNE *din triunghiul* ABC.

In patrulaterul înscris $A_1BAC$, aplicând una din teoremele lui PTOLEMEU, avem:

$$b.A_1B + c.A_1C = a.A_1A. \qquad (7)$$

Pe de altă parte, din proprietăţile precedente deducem:

$$A_1B/A_1C = BA_c\,/CA_b = c(p-b)/b(p-c). \qquad (8)$$

Din relaţiile (7), (8), obţinem:

$$A_1B/A_1A = (p-b)/b \quad ; \quad A_1C/A_1A = (p-c)/c. \qquad (9)$$

Dacă notăm cu $\alpha'$ punctul de contact al cercului exînscris $I_a$ cu latura BC, avem:

$$C\alpha' = p - b \quad ; \quad CA = b.$$

Triunghiurile $A_1AB$ şi $AC\alpha'$, având $\sphericalangle BA_1A = \sphericalangle AC\alpha' = \sphericalangle C$ şi laturile acestor unghiuri proporţionale, conform primei relaţii din (9), urmează că sunt asemenea şi deci:

$$\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle CA\alpha'.$$

De aici, urmează că dreptele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sunt respectiv isogonalele dreptelor $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, drepte care sunt concurente în reciprocul $\nu$ al punctului lui GERGONNE Γ. Punctul K este deci inversul reciprocului punctului lui GERGONNE, relaţie din care putem deduce imediat coordonatele baricentrice ale lui K.

Dacă $h_a$ este lungimea înălţimei ce pleacă din A, se observă că avem:

$$a'\alpha'/2r = A\alpha'/h_a \qquad \therefore \quad A\alpha' = a'\alpha'.h_a\,/2r. \qquad (10)$$

Cum însă triunghiurile asemenea $ABA_1$, $A\alpha'C$ ne dau

$$A\alpha' \,.\, AA_1 = b.c, \qquad (11)$$

urmează că ducând valoarea lui $A\alpha'$ din (11) în (10), obţinem:

$$AA_1.a'\alpha' = 2r.b.c/h_a = 2r.a.b.c/2S = 4Rr.$$

Aşà dar, deducem relaţiunile finale:

$$AA_1.a'\alpha' = BB_1.b'\beta' = CC_1.c'\gamma' = 4Rr.$$

10. Vom stabili acum câtevà relaţiuni metrice între diferitele segmente ale figurei. Avem relaţiunile:

$$AB_c \,.\, BC_a \,.\, CA_b = AC_b \,.\, BA_c \,.\, CB_a = A_c\,B_c \,.\, B_a\,C_a \,.\, C_b\,A_b$$
$$= \tfrac{1}{8}\,A_b\,A_c \,.\, B_a\,B_c \,.\, C_a\,C_b \,. \qquad (12)$$

Ţinând seamă că $B_c\,C_b$ e paralelă cu BC, precum şi de relaţiunile (1), (2), (3) şi analoagele lor, obţinem:

$$C_a\,B_b = a\,(p-a) : p, \text{ etc.}$$

Introducând aceste valori în (12) şi făcând calculele, găsim ca valoare comună a primelor trei produse pe $4Rr^3/p$.

Pentru ultimul produs, observăm că în triunghiul dreptunghic $AIA_b$, avem:

$$IA_b = AA_b \cdot \sin\tfrac{1}{2}A = \frac{b.c}{p} \sin\tfrac{1}{2}A.$$

Aşă dar:

$$\tfrac{1}{8}A_b A_c \cdot B_a B_c \cdot C_a C_b = \tfrac{1}{8}\frac{8a^2b^2c^2}{p^3} \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C = \frac{4Rr^3}{p}.$$

O altă relaţiune este următoarea:

$$AB_c + BC_a + CA_b = AC_b + BA_c + CB_a. \qquad (13)$$

Introducând în ambii membri valorile segmentelor, scoase din relaţiunile (1), (2), (3), găsim imediat că valoarea comună a ambelor sume este

$$(a^2 + b^2 + c^2)/2p.$$

Intre elementele figurei, mai avem şi relaţiunile:

$$\sum \frac{BC_a}{a} = \sum \frac{CB_a}{a} = \sum \frac{B_c C_b}{a} = 1. \qquad (14)$$

Mai avem:

$$AB_c \cdot A_c C_a + AC_b \cdot A_b B_a - AA_b \cdot B_c C_b = 0. \qquad (15)$$

Prin permutările circulare ale literelor, se obţin alte două relaţiuni analoage cu (15).

(Va urmà). C. H. NICOLAU.

## NOTE MATEMATICE

67. *Alte zece trigonometrii diverse.* (Vezi Nota 60 pag. 328 Anul XXVIII).

21. **Academică.** *F. M. Blackslee.*— Accademic trigonometry, plane and spherical. 1887.

22. **Ameliorată.** *H. Wilson.*—Trigonometry improved. 1720.

23. **Dirijată.** Trigonométrie des droites dirigées. (Vezi *P. Mansion*.Essence de la Trigonométrie, pag. 26. Bruxelles. 1922).

24. **Electricianilor.** *A. Hen.* — Trigonometrie für Maschinenbauer und Electrotekniker. Berlin. 1911.

25. **Incepătorilor.** *I. Todhunter.*— Trigonometry for beginners. 1873.

26. **Mecanicilor.** (Vezi No. 24).

27. **Practică.** *H. C. Playne & R. C. Foudsy.* — Practical trigonometry. 1906.

28. **Raţională.** *C. Meyer.*—A se vedeà Annales de la *Sociedad Cientifica Argentina*. No. 156.

29. **Tinerilor.** *E. Wells.*— The young gentlemens trigonometry. 1714.

30. **Unghiului.** *J. B. Leck.* — Trigonometry of one angle. 1901.

(Va urmà). I. Ionescu.

68. *Asupra unor probleme cu enunţul supraabundent.*

*PROBLEMA 2805.* In această problemă, se cere să se afle un patrat perfect de trei cifre astfel ca primele sale două cifre să fie răsturnatul rădăcinei sale patrate, iar ultima cifră egală cu suma primelor două.

Aşà dar, dacă $abc$ este patratul, avem:

$$\text{I)} \quad abc = (ba)^2$$

$$\text{II)} \quad c = a + b.$$

Problema se poate rezolvà, servindu-ne numai de una din condiţii, astfel:

I) Dacă: $abc = (ba)^2$, atunci $\sqrt{a}$ trebue să inceapă cu $b$, iar $a^2$ să se termine cu $c$. Dând lui $a$ toate valorile dela 1 la 9, şi ţinând seamă de perechile de cifre cu care se poate termina un patrat perfect, se găseşte că:

729 este singura soluţie.

II) Dacă $c = a + b$, atunci $101a + 11b$ trebuie să fie patrat perfect. Dând lui $b$ valori dela 1 la 8, ţinând seamă ca $11b + a$ să aibă terminaţie de patrat perfect, vom deduce pe

$a$. Sau, din perechile de cifre cu care se termină un patrat, se deduce $a$, căci avem:

$$a = c - b.$$

*PROBLEMA 1732.* Aici, se cer patratele $abcd$, astfel ca:

$$c + d = (b + d)^2.$$

Cum $c + d \leqslant 18$, iar: $b + d \leqslant 4$, şi cum $cd$ sunt perechi cu care se termină un patrat perfect. urmează că vor aveà numai valorile: 01, 04, 09, 81, de unde uşor se deduce soluţiunea: 8281.

TAILER GEORGE.

69. *Asupra notei 42, Vol. XXIX pag. 213.* Se afirmă, în acea notă că, pentru ca $\Sigma A^{a1}$ să fie $\mathcal{M}P$, unde P este un număr oarecare şi I indicatorul lui P, trebue să avem condiţia $\Sigma A = \mathcal{M}P$.

Aceasta nu este totdeauna adevărat. Fie:

$$A=3,\quad B=5,\quad C=8,\quad P=4n\quad I=2,\quad a=b=c=1.$$

Avem $\Sigma A=3+5+8=16=\mathcal{M}P$, pe când $3^2+5^2+8^2=98$ care nu este $\mathcal{M}4$. Teorema reuşeşte dacă P fiind oarecare, A, B, C,... sunt toate prime cu P, sau sunt toate $\mathcal{M}P$, sau când A, B, C,... fiind oarecare, P este prim absolut.

O. POPEA.

70. *Transformarea expresiei* $\sqrt{A + \sqrt{B}}$.

Când se pune $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ sub o sumă de două rădăcini patrate, se întrebuinţează o cale nenaturală şi mai este şi un alt desavantaj procedând astfel. Când se egalează părţile raţionale între ele şi de asemenea cele iraţionale. se trece cu uşurinţă peste acest lucru, luându-l ca evident. Vrem să urmăm o altă cale, punând în evidenţă că transformarea urmărită revine a rezolvà ecuaţia bipatrată, grupând termenii în două moduri deosebite.

Ecuaţia bipatrată, care are ca rădăcini cele 4 valori ale expresiei $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ este

$$(x^2 - A)^2 = B,$$

sau

(1) $$x^4 - 2Ax^2 + A^2 - B = 0.$$

Se vede dar că $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ se obţine rezolvând ecuaţia prin formarea unui patrat ca mai sus. Dar putem rezolvi ecuaţia (1) formând un alt patrat, după cum urmează:

(2) $$(x^2 - \sqrt{A^2 - B})^2 - 2(A + \sqrt{A^2 - B})x^2 = 0.$$

Considerând (2) ca o diferenţă de două patrate, se descompune ecuaţia (1) în două ecuaţii de gradul al doilea, care rezolvate, dau:

$$x = \varepsilon \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \varepsilon' \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Se obţin cele 4 rădăcini luând pentru $\varepsilon$, $\varepsilon'$ semnul $\pm$ în toate modurile posibile.

Avem deci identitatea

(3) $$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Se vede că, dacă $A^2 - B$ este un patrat perfect, transformarea (3) are un avantaj din punctul de vedere al calculului.

TH. ANGHELUŢĂ.

71. *Generalizarea problemei 3156.* (G. M. Vol. XXX, pag. 71).

Această problemă este o frumoasă aplicaţie a problemei 3006 (G. M. Vol. XXVIII, pag. 274).

Să considerăm sistemul de $n$ ecuaţii lineare:

$$a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n = k^m, \quad [m = 0,1,\ldots(n-1)]$$

în care determinantul coeficienţilor $\delta$, este diferit de zero, adică nu putem avea $a^q = a^p$. In acest caz, rădăcinile sistemului sunt date de regula lui CRAMER:

$$x_i = \delta_i / \delta, \qquad (i = 1,2 \ldots n)$$

în care $\delta_i$ se obţine înlocuind elementele coloanei $i$ respectiv prin $k^m$, $[m = 0, 1, \ldots (n-1)]$.

Observăm că $\delta$ şi $\delta_i$ sunt determinanţi ai lui VANDERMONDE, aşă că vom avea:

$$x_i = \frac{(k-a_1)\dots(k-a_{i-1})(k-a_{i+1})\dots(k-a_n)}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)} \quad [n=1,2,\dots n]$$

(Culegere de probleme, Algebră, XXIX, 5).

Inlocuind aceste valori în ecuaţia generală, obţinem identitatea

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i^m \frac{(k-a_1)\dots(k-a_{i-1})(k-a_{i+1})\dots(k-a_n)}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)} = k^m.$$

In cazul problemei 3156, avem $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_3 = c$ şi $n = 3$, şi vom obţine trei identităţi pentru cele trei valori ale lui $m$:

$$\sum \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} = 1 \qquad (1)$$

$$\sum a \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} = k \qquad (2)$$

$$\sum a^2 \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} = k^2. \qquad (3)$$

Identităţile (2) şi (3) ne demonstrează problema 3156 şi pun în evidenţă generalizarea.

Din identitatea găsită, se pot deduce multe alte identităţi. Aşă, din (1), dacă punem $k = a+b+c$, obţinem:

$$\sum \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = 1, \qquad (4)$$

(Culegere de probleme. Algebră, III, 32)

iar dacă punem $k = 0$,

$$\sum \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1. \qquad (5)$$

(Culegere de probleme. Algebră, IV, 24 şi 26.

Şi în mod analog, din (2) şi (3),

$$\sum a \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = a+b+c \qquad (6)$$

şi

$$\sum a^2 \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = (a+b+c)^2. \qquad (7)$$

Sau, dacă punem $k=1$,

$$\sum \frac{(b-1)(c-1)}{(a-b)(a-c)} = \sum a \frac{(b-1)(c-1)}{(a-b)(a-c)}$$

$$= \sum a^2 \frac{(b-1)(c-1)}{(a-b)(a-c)} = 1. \qquad (8)$$

(Revista Matematică din Timişoara — vol. III, pag. 125).

Deasemenea, se pot găsi relaţiuni între elementele unui triunghiu, aşà în relaţia (1), dacă facem $k=2(a+b+c)$, găsim:

$$\sum \frac{(2a+2c-b)(2a+2b-c)}{(a-b)(a-c)} = 1, \qquad (9)$$

însă medianele $m_a$, $m_b$, $m_c$ şi simedianele exterioare $\delta_a$, $\delta_b$, $\delta_c$ au ca expresii:

$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, etc. şi $\delta_a = (b^2 - c^2)/abc$, etc.

Ţinând seamă de relaţia (9), găsim:

$$\delta_b \delta_c / m_a^2 + \delta_c \delta_a / m_b^2 + \delta_a \delta_b / m_c^2 = R^2 \delta^2 / m_a^2 m_b^2 m_c^2. \qquad (10)$$

Putem găsi şi relaţiuni trigonometrice. Dacă în (2), punem $k = -abc$ şi apoi $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$, găsim

$$\Sigma \operatorname{cotg}(\alpha-\beta)\operatorname{cotg}(\alpha-\gamma) = -1. \qquad (11)$$

Se mai pot găsi identităţi pentru alte valori ale lui $n$.

Aşà, pentru $n=4$, găsim

$$\sum \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 0 \text{ etc.} \qquad (12)$$

Identităţi analoage, mai generale, se obţin folosind rezolvarea unui sistem de determinanţi ai lui VANDERMONDE, cărora le lipsesc unele coloane.

M. ADAM.
Constanţa

## BIBLIOGRAFIE.

**Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine.** Anul IX. No. 7—8. Bucureşti 1925. Asupra unei suprafeţe de ordinul IV considerată de CREMONA, de L. GODEAUX. Asupra unei suprafeţe considerată de G. HUMBERT, de L. GODEAUX.

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXI. No. 1—2. January—Fevruary 1925. New-York. Congresul internaţional din Toronto, de A. DRESDEN. O teoremă de algebră simplă, de J. H. M. WEDDERBURN. Notă asupra unei clase de funcţiuni armonice de M. H. STONE. Asupra independenţei complete a ecuaţiunilor funcţionale ale involuţiunii de C. C. MAC DUFFEE. Legea frencuenţii unei funcţiuni de o variabilă, de L. E. DODD. Despre accesibilitatea unui arc de complementul lui în spaţiul cu 3 dimensiuni, de C. KURATOWSKY. Un şir de trei întregi consecutivi cari sunt residuuri cuadratice sau cubice de numere prime, de H. S. VANDIVER. Congruenţe normale de curbe în spaţiul lui RIEMANN, de H. LEVY. Liniile pentru puncte duble actuale ale curbelor spaţiului, de T. R. HOLLCRAFT. Asupra unor teoreme de valori medii în legătură cu metoda lui CÔTES pentru cuadratură mecanică, de D. V. WIDDER. Geometria funcţiunilor de frecuenţă, de D. JACKSON. Matematici pentru ingineri, de H. J. ETTLINGER. Vectorii şi invarianţii lui STUDY, de J. B. SHAW.

**Idem.** No. 3—4. March—April 1925. Adunarea din Octomvrie, din New-York, de R. G. D. RICHARDSON. Adunarea din Octomvrie a Secţiunii din St. Francisco, de B. A. BERNSTEIN. A şeaptesprezecea Adunare regulată a Secţiunii din Sud Vest, de E. B. STOUFFER. Observaţiuni asupra fondaţiunilor geometriei, de O. VEBLER. Coeficienţii de rotaţie ai lui RICCI, de H. LEWY. Asupra valorilor asimptotice ale coeficienţilor lui CÔTES, de I. OUSPENSKY. Funcţiuni cu o singularitate esenţială, de P. FRANKLIN. Calculul variaţiunilor, de L. TONELLI. SCHOUTEN despre calculul lui RICCI, de C. L. E. MORE.

**Mathesis.** Tomul XXXIX. No. 5 Mai 1925. Bruxelles. Asupra anticentrului unui patrulater înscris, de J. NEUBERG. Asupra unei demonstraţii analitice a teoremei lui T. LEMOYNE relativă la ortocentru, de R. GOORMAGHTIGH. Exerciţii de geometrie vectorială, de AD. M. Transformări deduse din construcţia perechilor de puncte pe laturile unui triunghiu, de B. M. BARBĂLATT.

**Journal de mathématiques élémentaire** publié par H. VUIBERT. Anul 49. No. 17 şi 18 Iunie 1925. Paris.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul V. No. 4. Iunie 1925. Timişoara. Asupra identităţilor lui EULER, de V. ALACI.

**Foaia matematică.** Anul II. No. 6. Iunie 1925. Chişinău. Asupra calculului aproximativ de CĂP. I. LINTEŞ.

**Curierul matematic.** Vol. I. No. 4. Iunie 1925. Bucureşti (Litografiat). O clasă de polinoame ortogonale, de M. GHERMĂNESCU. Asupra formulei binomului şi a factorialei, de T. POPOVICIU. Aplicaţiile unei ecuaţii cu toate rădăcinile reale, de E. ŞTEFĂNESCU.

**J. Bosmans.** *Le géométre Jérome Saccheri*, S. J. (1667—1773). Extras din *„Revue des Questions scientifiques"*, Aprilie 1925. Supliment la *Mathesis*.

E. Borel. *Calcul de probabilités. (Principes et formules classiques)* Paris. Gauthier Villars. 1925.

Volumul este prima fascicolă din tomul I al unei colecţiuni asupra calculului probabilităţilor şi aplicaţiunilor sale; el conţine lecţiunile făcute de autor în 1922, la Facultatea de Ştiinţe din Paris, în anul 1922, redijate de D-l René Lagrange.

Cap. I *Generalităţi* conţine definiţiuni şi clasificarea probabilităţilor în *discontinue, continue* şi *enumerabile.* Cap. II conţine probleme de determinarea probabilităţilor de cele trei feluri arătate mai sus. Cap. III se ocupă cu teoria lui Gauss, abateri, teoria corelaţiunii. Cap. IV conţine probleme asupra distribuirii punctelor pe o dreaptă şi în spaţiu. Cap. V dă o serie de probleme cunoscute în popor cu numele de *rişca* (jéu de pile ou face), care deşi se bazează pe un principiu foarte simplu, conduce la chestiuni foarte grele şi interesante de matematică superioară. Cap. VI se ocupă cu chestiuni de probabilitate în legătură cu statistica, adică cu probabilităţi procurate de experienţă. Volumul se termină cu note asupra valorilor medii, asupra polinoamelor lui Hermite-Tchebychef şi bibliografia teoriei momentelor, introduse de D-l R. Lagrange.

Autorul a dat în 160 pagini principiile teoriei probabilităţilor şi rezultatele la care a ajuns ştiinţa în acest domeniu în ziua de azi. Calculul probabilităţilor pătrunde din ce în ce mai mult în ştiinţele aplicate, în care, după cum se exprimă autorul în prefaţă, pe lângă date cunoscute şi calculabile sunt şi altele nesigure sau problematice. Născut din patima jocurilor de noroc, calculul probabilităţilor a devenit azi necesar statisticianilor, acţionarilor, inginerilor, militarilor, fizicianilor, biologiştilor, agronomilor, matematicianilor şi chiar filosofilor. Toţi aceştia trebuie să fie recunoscători D-lui Borel pentru iniţiativa luată de a tipări un tratat complet de teoria probabilităţilor şi aplicaţiunilor sale, tratat în fruntea căruia stă fascicola I, din tomul I, de care am vorbit aci.

I. I.

E. Borel. *Mécanique statistique classique.* Paris. Gauthier Villars, 1925.

Această broşură constituie fascicola III din tomul II al tratatului de care am vorbit mai sus. Ea conţine lecţiunile făcute de autor la Facultatea de ştiinţe din Paris în 1921 şi a fost redijată de D-l Francis Perrin.

Mecanica statistică este aplicaţiunea calculului probabilităţilor la unele chestiuni de fizică matematică şi în special la teoria gazelor, care se consideră ca formate din un număr foarte mare de molecule foarte mici, ce se mişcă necontenit şi se izbesc unele de altele.

După o introducere referitoare la calculul probabilităţilor şi definirea probabilităţii elementare în mecanica statistică, se trece la bazele teoriei cinetice a gazelor, influenţa ciocnirilor asupra repartizării iuţelilor. Capitolele următoare se ocupă cu probabilitatea unei stări macroscopice oarecare şi stării celei mai probabile, fluctuaţiunile, presiunii, temperaturii, căldurii specifice, liberul parcurs mediu, difuziunea gazelor, chestiuni complimentare, principiul evoluţiuni.

Urmărirea chestiunilor cere cunoştinţa matematicilor superioare şi inte-

resează în gradul cel mai mare pe cei ce se ocupă de fizica matematică, cărora mecanica statistică le poate explică proprietăţi ascunse ale energiei şi ale materiei şi toate consecinţele ce se pot scoate din principiile termodinamicei.

I. I.

## CERERI.

125. La care bibliotecă din ţară, se pot găsi tabele de numere prime peste 5000?

P. PETREANU.

126. La ce bibliotecă din ţară, se pot găsi operele complete ale lui NEWTON, EULER şi LAGRANGE?

F. NEGRETZU.

## CHESTIUNI DE EXAMEN

### FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN BUCUREŞTI.

### ALGEBRA SUPERIOARĂ.

*(Anul I).*

**Intâiul examen parţial, dela 21 ianuarie 1925.**

(Două ore).

*Chestiuni teoretice.* 1. Ansamble dense şi ansamble măsurabile. Proprietăţi ale ansamblelor dense şi măsurabile.

2. Să se demonstreze că funcţiunea omografică imaginară (cu coeficienţi reali) transformă un cerc tot într'un cerc.

3. Teorema lui GAUSS asupra polinoamelor primare. Proprietăţi în legătură cu polinoamele ireductibile.

*Chestiuni practice.* 4. Să se studieze variaţia funcţiunei:

$$y = \frac{x}{x^4 - 1}.$$

5. Să se calculeze, prin metoda diferenţelor finite, suma:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

6. Să se descompună în fracţiuni simple expresiunea:

$$\frac{2x+1}{(x^2-x-2)(x^2+1)}.$$

**Al doilea examen parţial, dela 1 aprilie 1925.**

(Două ore).

*Chestiuni teoretice.* 1. Să se demonstreze desvoltarea unui determinant după elementele unei linii. Regula lui LAPLACE. Desvoltarea după elementele unei linii şi ale unei coloane.

2. Teorema lui ROUCHÉ. Ca aplicaţie, se va demonstrà formula înmulţirei determinanţilor.

3. Transformări lineare. Invarianţi, covarianţi, contravarianţi. Se va arătà că discriminantul unei forme patratice binare şi acela al unei forme patratice cu $n$ variabile sunt invarianţi.

*Chestiuni practice.* 4. Să se rezolve sistemul:

$$2y^4 - x^3(x-1)y - x^2(x-1)^2 = 0, \qquad y^2+2xy+x(x-1)=0.$$

5. Să se găsiască covarianţii formei cubice:

$$x^3 + 5x^2y + 5xy^2 + y^3$$

şi să se reducă această formă la suma a două cuburi prin o substituţie lineară.

6. Să se pună sub forma de sumă de patrate expresia:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz + 6yz.$$

**Al treilea examen parţial, dela 22 mai 1925.**

(Două ore).

*Chestiuni teoretice.* 1. Teorema fundamentală a algebrei.

2. Să se dovedească imposibilitatea rezolvărei algebrice a ecuaţiilor de grad mai mare decât 4.

*Chestiuni practice.* 3. Să se discute ecuaţia:

$$x^4 + 8x^3 - 6x + a = 0$$

şi să se calculeze rădăcinile reale cu două zecimale exacte, pentru $a = -3$.

4. Să se calculeze, prin metoda părţilor proporţionale, a lui NEWTON şi a lui GRAEFFE, rădăcina reală a ecuaţiei:

$$x^3 + 9x - 8 = 0.$$

5. Să se dezvolte în fracţie continuă rădăcina ecuaţiei:

$$x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 6x - 1 = 0.$$

## EXAMENUL GENERAL.

### PROBA PRACTICĂ.

(14 iunie, 9—12)

Se consideră ecuaţia:

$$4x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 40x + a = 0,$$

unde $a$ e un parametru variabil.

1°. Să se discute realitatea rădăcinilor, după valorile parametrului $a$.

2°. Dând lui $a$ valoarea 8, să se calculeze rădăcinile reale ale ecuaţiei cu două zecimale exacte.

3°. Se consideră ecuaţia ireductibilă de gradul al treilea, ce se obţine pentru $a = 8$. Insemnând cu $x_1$, $x_2$ şi $x_3$ rădăcinile ei, să se formeze ecuaţia care admite ca rădăcini expresiunile:

$$(x_1+x_2)/x_3 \quad , \quad (x_2+x_3)/x_1 \quad , \quad (x_3+x_1)/x_2.$$

4°. Se consideră forma cubică binară, obţinută prin omogenizarea polinomului dela No. 3. Să se reducă această formă la o sumă de două cuburi printr'o substituţie lineară. Să se deducă o soluţie algebrică a ecuaţiei ireductibile de gradul al treilea dela No. 3.

### PROBA TEORETICĂ.

(14 iunie, 3—5 p. m.).

I. Separarea rădăcinilor unei ecuaţiuni. Teoremele lui BUDAN-FOURIER, ROLLE, DESCARTES, STURM.

II. Transformările lui LAGUERRE, SCHUR şi MALO ale ecuaţiunilor cu toate rădăcinile reale.

---

# PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3203. *Câte cifre are numărul:*

$$N = 5^{5^5}.$$

*Dacă i-am mai adăogà încă un* 5 *deasupra, cu cât s'ar sporì numărul cifreior lui* N?

CĂP. I. LINTEŞ.

Numărul exact de cifre al lui N nu se poate află, din cauză că nu cunoaştem decât logaritmii cu câtevă zecimale. Din această cauză, vom determină numai limitele unui interval cât mai mic, în care variază numărul de cifre al lui N.

Observăm că:

$$\log.\log N = 5^5 \log 5 + \log.\log 5$$

$$5^5 = 3125$$

$$\log 5 = 0,\ 69897...$$

$$\log.\log 5 = 1,\ 84446...$$

Prin urmare:

$$\log.\log N = 2184,\ 12571...$$

şi

$$\log N = 10^{2184,\ 12571...}$$

Deci numărul cifrelor lui N va fi cuprins între:

$$10^{2184} < n < 10^{2185}.$$

Dacă mai adăogăm un 5 deasupra, atunci avem:

$$N' = 5^N,$$

sau:

$$N' = 10^{N.\log 5}.$$

Cum:

$$0,6 < \log 5 < 0,7,$$

urmează că numărul cifrelor lui N' va fi cuprins între:

$$6.10^{10^{2183}} < n' < 7.10^{10^{2184}}.$$

Şi atunci:

$$6.10^{10^{2183}} - 10^{2184} < n' - n < 7.10^{10^{2184}} - 10^{2185}.$$

reprezintă sporul de cifre prin adăogarea lui 5 deasupra.

Au rezolvat problema, găsind că N are:

$$\underbrace{n = 133516700 \cdot \ldots \cdot 01}_{2187} \text{ cifre}$$

şi N' are:

$$\underbrace{n' = 6989700 \cdot \ldots \cdot 01}_{n}$$

D-nii: P. Bleiweiss, N. Botea, C. Th. Ionescu şi L. Brüll.

*Observaţie.* Din soluţia problemei 3203, se deduce că:

$$10^{10^{10^{2184}}} < 5^{5^{5^5}} < 10^{10^{10^{2185}}}$$

şi:

$$10^{6.10^{10^{2183}}} < 5^{5^{5^5}} < 10^{7.10^{10^{2184}}}.$$

CĂP. I. L.

---

PROBLEMA 3229. *Să se construiască curba, a cărei ecuaţie este:*

$$(x^2+y^2-2ax)^2 = b^2(x^2+y^2),$$

*a şi b fiind două cantităţi date.*

Locot-Col. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-nii: M. GEORGESCU, C. POPOVICI, C. GIURUMESCU, I. POPA, A. FLOREA, V. DORNEANU (Lc. Internat, Iaşi), P. MARINI (Student, Cluj) şi V. VÂRLAN (Iaşi).

Trecând la coordonate polare, ecuaţia curbei devine

$$(1) \qquad \rho = 2a\cos w \pm b,$$

care nu este decât ecuaţia melcului lui PASCAL.

Când $2a$ şi $b$ sunt egali, curba devine o cardioidă.

*Notă.* 1°. D-l R. BĂDESCU (Student, Cluj) a trimis un foarte frumos şi complet studiu al construcţiei curbei (1), făcând abstracţie de faptul că această curbă este cunoscută.

2°. D-l I. POPA (Lc. Internat, Iaşi) a studiat algebriceşte şi curba în coordonate carteziene.

3°. La publicarea problemei, s'a omis, din eroare, un termen şi astfel s'a publicat o problemă cunoscută, în loc de a se cere constucţia curbei

$$(2) \qquad (x^2+y^2-2ax-2ay)^2 = b^2(x^2+y^2),$$

pe care o am în notiţele mele. Pentru a nu mai face rectificări, nu o propun din nou (2), ci voiu publică sub formă de notă, îndată ce se va primi la redacţie, soluţia completă a construcţiei curbei (2).

GH. B.

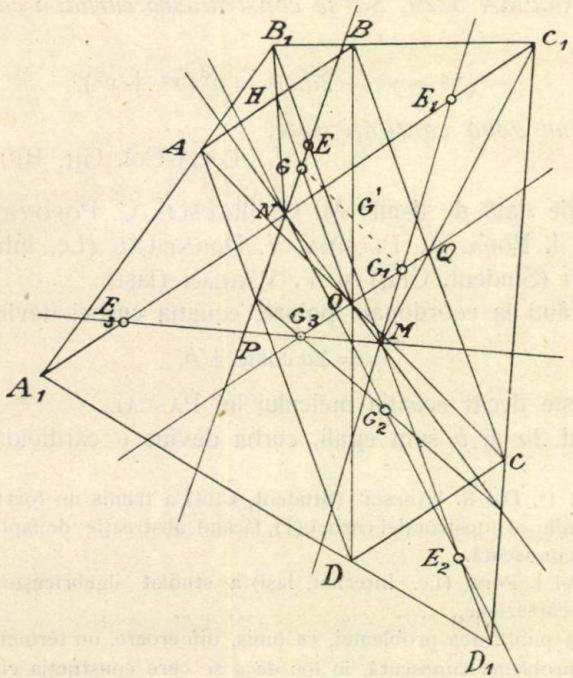
---

PROBLEMA 3235. *Se cere să se afle locul geometric al centrelor de greutate ale triunghiurilor în care se pot descompune paralelogramele înscrise într'un patrulater dat.*

C. I. CIORĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: CONST. POPOVICI și V. DORNEANU (Elevi cl. VII Liceul Internat, Iași).

Se știe [1]) că, pentru a înscrie un paralelogram ABCD într'un patrulater dat $A_1B_1C_1D_1$, e de ajuns a duce AB paralelă cu diagonala $A_1C_1$ și BC paralelă cu diagonala $B_1D_1$; dreptele CD și AD duse respectiv paralele cu primele se taie pe $A_1D_1$.




Fie M mijlocul diagonalei $B_1D_1$ și N mijlocul diagonalei $A_1C_1$, iar O intersecția diagonalelor AC, BD ale paralelogramului înscris ABCD. Aceste diagonale descompun paralelogramul în patru triunghiuri OAB, OBC, OCD și ODA.

[1]) A se vedea: F. G. — M., *Exercices de géométrie*, 6-e éd., p. 626, question 1362 și p. 458, question 1111.

Fie H mijlocul laturei AB şi G centrul de greutate al triunghiului OAB. Dreapta $NB_1$ este mediană în triunghiurile $B_1A_1C_1$ şi $B_1AB$ şi deci punctele N, H, $B_1$ sunt colineare. Se mai ştie că locul punctului O este dreapta MN care uneşte mijloacele diagonalelor patrulaterului dat[1]). Fie E punctul unde NG taie pe $B_1D_1$. Dreapta OG fiind paralelă cu BC, este paralelă şi cu $B_1D_1$, iar triunghiul $NMB_1$, ne dă:

$$B_1E : B_1M = HG : HO = 1 : 3$$

$$\therefore \quad B_1E = \tfrac{1}{3} B_1M = \tfrac{1}{6} B_1D_1.$$

Deci punctul E e fix pe diagonala $B_1D_1$ a patrulaterului dat, de unde conchidem că locul punctului G este dreapta NE.

Fie $G_1$, $G_2$, $G_3$ centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OCD, ODA şi $E_1$, $E_2$, $E_3$ punctele situate pe diagonalele $A_1C_1$ şi $B_1D_1$ astfel ca

$$E_1C_1 : C_1A_1 = E_2D_1 : D_1B_1 = E_3A_1 : A_1C_1 = 1 : 6.$$

In mod analog ca mai sus, putem arătă că locurile geometrice ale punctelor $G_1$, $G_2$, $G_3$ sunt respectiv dreptele $ME_1$, $NE_2$, $ME_3$.

D-nii: Ion C. Vasiliu şi N. Botea au considerat centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA şi ABD şi, cu ajutorul geometriei analitice, au demonstrat, în mod foarte simplu, că locurile centrelor de greutate ale acestor triunghiuri sunt patru drepte. Problema poate fi considerată şi astfel. Angajăm însă pe corespondenţi a-i da o soluţie pur geometrică, în care scop dăm următoarele indicaţiuni.

Fie G' centrul de greutate al triunghiului ABC. Observăm pe figură că triunghiurile $NMB_1$ şi $NB_1C_1$ ne dau

$$OM : ON = HB_1 : HN = BB_1 : BC_1 = k,$$

$k$ fiind un coeficient de proporţionalitate variabil. Deci extremităţile O şi B ale dreptei OB se mişcă pe dreptele fixe MN şi $B_1C_1$ astfel că:

$$BB_1 : BC_1 = k, \quad \text{iar} \quad ON : OM = 1 : k.$$

In aceste condiţii, un punct oarecare G', care împarte dreapta OB într'un raport constant

$$G'B : G'O = k_1,$$

descrie o dreaptă. (In cazul problemei noastre $k_1 = 1 : 2$).

A se compară această chestiune cu problema 1358-a din *Exercices de Géométrie* par F. G.—M., p. 624.

(V. C.)

[1]) *Ibidem*, loc. cit.

PROBLEMA 3237. *Să se verifice că polinomul*

$$P(x) = x^n + (2n-7)x^{n-1} - 2(n-2)x^{n-2} + x + 1,$$

*se divide cu* $(x-1)^2$.

1°. *Să se găsiască expresia generală a câtului.*

2°. *Să se găsiască limita fracțiunei*

$$P(x)/(x-1)^2,$$

*când* x *tinde către* 1.

3°. *Să de deducă din divizibilitatea lui* P(x) *cu* $(x-1)^2$, *că numărul*

$$2^{2n-3}(3n+5)+5,$$

*este divizibil cu 9.*

TH. ANGHELUȚĂ.

Soluție: Polinomul $P(x)$ se divide cu $(x-1)$, căci avem:

$$P(1)=1+(2n-7)-2(n-2)+1+1=0.$$

Și câtul este:

$$Q(x)=P(x)/(x-1)=x^{n-1}+(2n-6)x^{n-2}-2x^{n-3}-2x^{n-4}-\ldots$$

$$\ldots\ldots-2x-1.$$

$P(x)$ se divide și cu $(x-1)^2$ căci avem:

$$Q(1) = 1 + (2n-6) - 2(n-3) - 1 = 0.$$

1°. Iar câtul lui $P(x)$ cu $(x-1)^2$ este:

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2} = x^{n-2} + \sum_{i=3}^{n} (2n-2i+1)x^{n-i}.$$

2°. Pentru limita cerută avem:

$$\lim \frac{P(x)}{(x-1)^2} = 1 + \sum_{i=3}^{n} (2n-2i+1) = 1+(n-2)^2.$$

3°. Dacă în $P(x)$ punem în locul lui $x$ pe 4, obținem un număr întreg divizibil cu 9. Prin urmare, putem scrie:

$$2^{2n} + (2n-7)2^{2n-2} - (n-2)2^{2n-3} + 5 = \mathcal{M}9.$$

Sau încă

$$2^{2n-3}(3n-4) = \mathcal{M}9.$$

Adăogând $9 . 2^{2n-3}$, obţinem rezultatul cerut.

Au rezolvat problema, D-nii: P. Bleiweiss, N. Botea, L. Brüll, I. Buga, L. Căldăraru, I. Ciorănescu, V. Dorneanu, Al. Florea, Eug. Georgescu, I. Georgescu-Racoviţă, C. Giurumescu, Angelo Ionescu, Paul Ionescu, N. Jojea, S. Katz, A. Marcovici, C. Mihăilescu, P. Miresçu, A. Novac, Al. Opran, M. Pătroianu, Dan Petrescu, Al. Pop, Ilie Popa, O. Popea, Corneliu Popescu, Aurel Popoviciu, Const. Popoviciu, B. Reinhorn, I. A. Schächter, N. Segărceanu, Gh. Simionescu, P. Spacu, Aurel Stoica, I. Teodorescu, N. Teodorescu, I. Vasiliu, M. Velea, V. Vârlan, G. Zane.

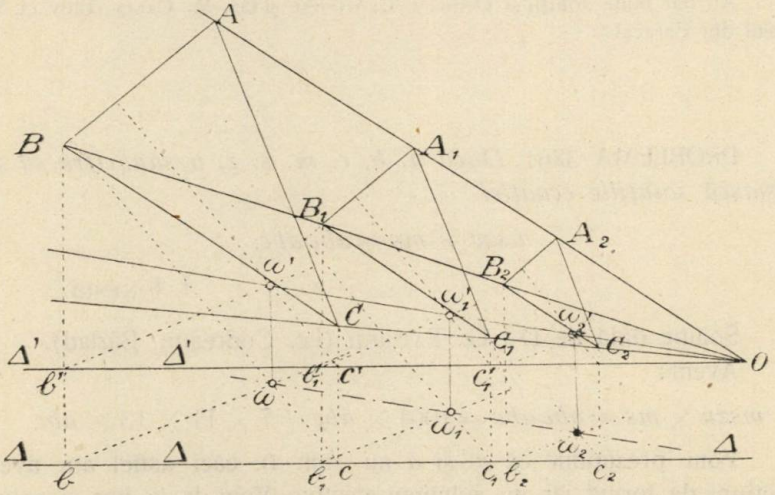
---

PROBLEMA 3246. *Ortopolurile unei drepte, în raport cu trei triunghiuri homotetice, având acelaş centru de homotetie, sunt colineare.*

M. I. Focşeneanu.

Soluţie dată de D-ul N. G. Botea (Elev cl. VII Liceul Cantemir-Vodă, Bucureşti).

Fie ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ cele trei triunghiuri, O centrul lor




de homotetie şi $\Delta$ dreapta considerată. Să ducem prin O o dreaptă $\Delta'$ paralelă cu $\Delta$. Fie $b$, $c$ şi $b'$, $c'$ proiecţiunile vârfurilor B şi C respectiv pe dreptele $\Delta$ şi $\Delta'$; $b_1$, $c_1$, $b_2$, $c_2$, $b'_1$, $c_1$, $b'_2$, $c'_2$, punctele analoage în raport cu triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$.

Perpendicularele duse din $b$ şi $c$, respectiv pe AC şi AB, determină, prin intersecţia lor, ortopolul $\omega$ al dreptei $\Delta$ în raport cu triunghiul ABC; iar perpendicularele duse din $b'$ şi $c'$ pe AC şi AB, determină ortopolul $\omega'$ al dreptei $\Delta'$ în raport cu acelaş triunghiu ABC. Fie $\omega_1$, $\omega_1'$ şi $\omega_2$, $\omega_2'$ punctele analoage în raport cu triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$.

Din construcţiile făcute, rezultă că pentagoanele $AB\,b'\,c'C$, $A_1B_1\,b'_1\,c'_1C_1$, sunt figuri homotetice cu centrul de homotetie O, iar punctele $\omega'$, $\omega'_1$, $\omega'_2$ sunt puncte homoloage în aceste figuri homotetice; ele se vor găsi deci pe o aceeaşi dreaptă ce trece prin centrul de homotetie O.

Să presupunem acum că dreapta $\Delta'$ se deplasează paralel cu ea însăşi, până ce coincide cu $\Delta$. Se ştie *) că, în acest caz, ortopolul dreptei $\Delta'$ se deplasează cu o distanţă egală cu deplasarea dreptei, descriind o dreaptă perpendiculară pe $\Delta'$. Conchidem de aici, imediat, că ortopolurile $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$, se vor găsi pe o dreaptă paralelă cu dreapta $O\omega'\omega'_1\omega'_2$.

Teorema subsistă evident pentru cazul *isopolului*. Ea subsistă de asemenea pentru $n$ triunghiuri homotetice, care au acelaş centru de homotetie.

Au dat bune soluţii şi D-nii: I. C. Vasiliu şi Gh. M. Călin (Elev cl. V. Liceul din Caracal).

---

PROBLEMA 3261. *Dacă $a$, $b$, $c$, $m$, $s$, $z$, $u$ sunt cifre, să se găsiască soluţiile ecuaţiei,*

$$mszu \times ms = abc\,abc.$$

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l G. Tauber (Lc. Codreanu, Bârlad).

Avem:

$$mszu \times ms = abc\,abc = 1001 \times abc = 7 \times 11 \times 13 \times abc.$$

Vom presupune că $m$ şi $a$ nu sunt 0, căci astfel am avea soluţiuni de formă, iar nu soluţiuni efective. Vom da la fine şi solu-

*) **J. Neuberg,** *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe.* p. 76.

ţiunile de formă. Numărul $abc\,abc$ fiind cel puţin 100 100, $m$ este cel puţin 3, căci $2999 \times 29 = 86971 < 100\,100$. Vom face acum diferite ipoteze.

1) $ms \not\equiv \mathcal{M}7 \not\equiv \mathcal{M}11 \not\equiv \mathcal{M}13$. Atunci, $mszu$ se divide cu 1001 şi este deci de forma $m0\,0m$. Pentru $m = 3$, avem $3003 \times 30 = 90090 < 100100$. Deci, avem numai următoarele 6 soluţii :

$4004 \times 40 = 160160$ ; $6006 \times 60 = 360360$ ; $8008 \times 80 = 640640$ ;
$5005 \times 50 = 250250$ ; $7007 \times 70 = 490490$ ; $9009 \times 90 = 810810$.

2) $ms = \mathcal{M}7 \not\equiv \mathcal{M}11 \not\equiv \mathcal{M}13$. In acest caz avem :

$$ms = 7t, \qquad mszu = 700t + 10z + u = 11 \times 13 \times v = 143v.$$

$$4 < t < 15, \qquad v = 5t + \frac{10z \times u - 15t}{143}.$$

Dăm valori lui $t$ şi alegem $(10z + u)$ aşă că $(10z + u - 15t)$ să fie 0 sau $-\mathcal{M}143$. Nu vom lua $t = 11$ şi $t = 13$, căci $ms \not\equiv \mathcal{M}11 \not\equiv \mathcal{M}13$. Găsim pentru $t = 5, 6, 12, 14$ următoarele 4 soluţii :

$3575 \times 35 = 125125$; $8437 \times 84 = 708708$ ;
$4290 \times 42 = 180180$; $9867 \times 98 = 966966$.

Pentru $t = 7$ găsim soluţia dela No. 1 : $7007 \times 70$ ; iar pentru $t = 8, 9$ nu se găsesc soluţii.

3) $ms = \mathcal{M}11 \not\equiv \mathcal{M}7 = \mathcal{M}13$. In acest caz avem :

$$ms = 11t, \qquad mszu = 1100t + 10z + u = 7 \times 13v = 91v,$$

$$3 < t < 10, \qquad v = 12t + \frac{10z + u + 8t}{91}.$$

Dăm valori lui $t$ şi alegem $(10z + u)$ aşă că $10z + u + 8t = \mathcal{M}91$, Nu luăm $t = 7$, căci $ms \not\equiv \mathcal{M}7$. Găsim următoarele 6 soluţii :

$3367 \times 33 = 111111$ ; $5551 \times 55 = 325325$ ; $8827 \times 88 = 776776$ ;
$4459 \times 44 = 196196$ ; $6643 \times 66 = 438438$ ; $9919 \times 99 = 981981$.

4) $ms = \mathcal{M}113 \not\equiv \mathcal{M}7 \not\equiv \mathcal{M}11$. In acest caz avem :

$$ms = 13t, \qquad mszu = 1300t + 10z + u = 7 \times 11v = 77v,$$

$$2 < t < 8 \qquad v = 17t + \frac{10z + u - 9t}{77}.$$

Dăm valori lui $t$, afară de 7, căci $ms \not\equiv \mathcal{M}7$ şi alegem $(10z + s)$

așà ca $(10z + u - 9t)$ să fie 0 sau $-\mathcal{M}77$. Găsim următoarele 4 soluții:

$$3927 \times 39 = 153153; \qquad 6545 \times 65 = 425425;$$
$$5236 \times 52 = 272272; \qquad 7854 \times 78 = 612612.$$

5) $ms = \mathcal{M}7 = \mathcal{M}11 = \mathcal{M}77$. In acest caz avem:

$$7700 + 10z + u = 13v \quad , \quad 10z + u + 4 = \mathcal{M}13.$$

Cum $ms = 77$, găsim următoarele 7 soluții:

$7709 \times 77 = 593593$; $7735 \times 77 = 595595$; $7761 \times 77 = 597597$;
$7722 \times 77 = 594594$; $7748 \times 77 = 596596$; $7774 \times 77 = 598598$.
$7787 \times 77 = 599599$;

6) $ms = \mathcal{M}7 = \mathcal{M}13 = \mathcal{M}91$. In acest caz avem:

$$9100 + 10z + u = 11v \quad ; \quad 10z + u + 3 = \mathcal{M}11.$$

Cum $ms = 91$ avem următoarele 9 soluții:

$9108 \times 91 = 828828$; $9141 \times 91 = 831831$; $9174 \times 91 = 834834$;
$9119 \times 91 = 829829$; $9152 \times 91 = 832832$; $9185 \times 91 = 835835$;
$9130 \times 91 = 830830$; $9163 \times 91 = 833833$; $9186 \times 91 = 836836$.

Problema admite dar în total $(6 + 4 + 6 + 4 + 7 + 9) = 36$ soluții efective.

7) Ca soluțiuni de formă numai, putem găsi două în studiul precedent; dăm lui $t$ valori mai mici ca acelea care sunt date ca limitele lui inferioare.

Astfel găsim soluțiuni de forma

$$00zu \times 00 = 000000,$$

luând $zu$ dela 00 la 99, adică 100 de soluțiuni. Cazul (1) dă pentru $m = 1, 2, 3$ soluțiile:

$1001 \times 10 = 010010$; $2002 \times 20 = 040040$; $3003 \times 30 = 090090$.

Cazul (2) dă pentru $t = 1, 2, 3, 4$ soluțiile:

$$0715 \times 07 = 005005; \qquad 2145 \times 21 = 045045;$$
$$1430 \times 14 = 020020; \qquad 2860 \times 28 = 080080.$$

Cazul (3) dă pentru $t = 1, 2$ soluțiile:

$$1183 \times 11 = 013013; \qquad 2275 \times 22 = 050050.$$

Cazul (4) dă pentru $t = 1, 2$ soluțiile:

$1309 \times 13 = 017017$; $2618 \times 26 = 068068$;
$1386 \times 13 = 018018$; $2695 \times 26 = 070070$.

Rămân dar 133 soluţiuni de formă.

D-l René I. Spathy a dat cele 36 soluţiuni efective.

---

PROBLEMA 3281. *In urma schimbării calendarului ortodox, cu Paştele rămas după vechile norme, vom mai aveà totdeauna Postul Sfinţilor Apostoli? Vor mai cădeà totdeauna Sfinţii 40 de Mucenici în Postul Paştelui?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l Ion C. Cristescu (Liceul Şincai, Bucureşti).

Inainte de schimbarea calendarului, Paştele cădeà între 22 Martie şi 25 Aprilie stil vechiu, iar de aci înnainte, va cădeà deci între 4 Aprilie şi 8 Mai stil nou.

In anul viitor, 1926, Paştele va cădeà la 19 Aprilie stil vechiu, sau 2 Mai stil nou. După 7 săptămâni, vor veni Rusaliile, adică la $2 + 7 \times 7 - 31 = 20$ Iunie. Duminica următoare, adică la 27 Iunie, va fi Lăsata secului pentru Postul Sfinţilor Apostoli; a doua zi, 28 Iunie, este prima şi ultima zi de post, căci la 29 Iunie, este sărbătoarea Sfinţilor Apostoli Petru şi Pavel, la care se reîncepe Dulcele. Aşà dar, în anii, în care Paştele va cădeà la 3, 4, 5, 6, 7 sau 8 Mai stil nou, nu va mai fi post al Sfinţilor Apostoli.

In anul viitor, Lăsata secului de brânză este în ziua de $2 + 30 + 31 - 7 \times 7 = 14$ Martie, pe când sărbătoarea Sfinţilor 40 de Mucenici cade la 9 Martie, adică în Săptămâna brânzei, şi anume Marţi. Prin urmare dacă Paştele cădeà cu 2 zile mai târziu, adică la 4, 5, 6, 7 sau 8 Mai, Sfinţii 40 de Mucenici ar cădeà în Carnaval.

*Notă.* Pentru a găsi toţi anii în care dispare Postul sfinţilor Apostoli, ne putem servi de Tablourile Publicate la pag. 291 şi 292 din acest an. Paştele cade între 2 şi 8 Mai stil nou, dacă va cădeà între 20 şi 25 Aprilie stil vechiu. Pentru aceasta, divizând anul cu 532 trebuie să găsim resturile din dreptul lui 20, 21, 22, 23, 24, 25. Aceste resturi, aşezate în ordinea mărimii lor, sunt următoarele: 7, 10, 18, 21, 26, 37, 45, 48, 64, 75, 83, 94,

102, 105, 113, 116, 121, 132, 140, 143, 159, 170, 178, 189, 197, 200, 208, 216, 227, 238, 254, 265, 273, 284, 292, 295, 311, 322, 333, 349, 360, 363, 368, 379, 387, 390, 406, 417, 428, 444, 447, 455, 458, 463, 479, 482, 485, 501, 512, 531. Deci, dintr'un ciclu de 532 ani, sunt 60 ani în care nu vom avea Postul Sfinţilor Apostoli. Cum anul acesta $1925 = 3 \times 532 + 329$, se vede că primul rest care întrece pe 329 este 333, şi prin urmare peste 4 ani, adică în anul 1929, va fi primul an în care va dispare acel post. Alte dispariţiuni vor urmă după 16 ani, etc.

Dacă acum observăm că, dela Sfinţii 40 Mucenici (9 Martie) până la Sfinţii Apostoli Petru şi Pavel sunt $31 - 9 + 30 + 31 + 29 = 112$ zile sau 16 săptămâni, şi că dela Lăsata Secului de carne pentru Postul Paştelui până la Lăsata Secului pentru Postul Sfinţilor Apostoli, sunt tot 16 săptămâni, se vede că cele două chestiuni puse sunt în legătură una cu alta şi anume: dacă Sfinţii 40 de Mucenici cad în Carnaval, Lăsata Secului pentru Postul Sfinţilor Apostoli nu mai cade înnainte de Sfinţii Apostoli Petru şi Pavel.

Din cele expuse, pare că reese că schimbarea calendarului s'a făcut fără a i se fi calculat toate consecinţele!

I. I.

# EXERCIŢII

74. Se cere numărul *szu* patrat perfect în orice sistem de numeraţiune.

O. Schächter.

R. Trebuie ca $s B^2 + z B + u$ să fie patrat perfect pentru orice valoare a lui B. Termenul devine patrat dacă $z^2 - 4 s u = 0$. Deci $z$ este pereche. Fie $z = 2x$, rămâne $x^2 = s u$ cu $x < 5$. Putem lua $x = 1$, $s = 1$, $u = 1$; $x = 2$, $s = 1$, $u = 4$; $x = 2$, $s = 4$, $u = 1$, căci $u$ termină un patrat; $x = 3$, $s = 1$, $u = 9$; $x = 3$, $s = 9$, $u = 1$; $x = 4$, $s = 4$, $u = 4$. De aci soluţiile:

121; 144; 441; 169; 961; 484.

75. Se cer patratele de patru cifre la care suma cifrelor întrece cu 2 îndoitul cifrei zecilor, care este îndoitul cifrei miilor.

I. Foca.

R. Enunţul ne dă:

$$m + s + z + u = 2z + 2 \qquad z = 2u, \qquad u \leqslant 4,$$

de unde:

Facem $u = 0, 1, 2, 3, 4$ şi găsim numerele: 2000; 1100; 3021; 2121 1221; 4042; 3142; 2242; 1342; 5063; 4163; 3263; 2363; 1463; 6084; 5184 4284; 3384; 2484; 1584.

76. Se cer patratele perfecte *abc*, la care *ab* este patrat perfect.

CONSTANTIN TH. IONESCU-BUJOR.

R. Dintre grupele de 2 cifre cu care sfârşesc patratele perfecte, consider pe acelea care încep cu 1, 4, 5, 6 şi 9:

16, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 96.

Pun înainte cifra care cu prima dă patratul perfect şi am 816, 641, 644, 649, 256, 361, 161, 364, 164, 369, 169, 496.

Extrag rădăcina celor ce nu sunt $\not\equiv 3+2$, nici $\not\equiv 9$ dacă sunt $\not\equiv 3$, găsesc soluţiile : 169, 256, 361.

77. Un număr de două cifre reprezintă o sumă de bani. E împărţită între două persoane în modul următor: prima primeşte cât cifra zecilor numărului, secunda cât cifra unimilor. Restul, după această împărţire, se împarte la fel. Operaţiunea se repetă de 10 ori. Care e acel număr?

CHIRIAC GEORGESCU.

R. Notând cu *ab* numărul cerut, operaţiunile vor fi reprezentate astfel:

1) $a\,b - (a + b) = a_1 b_1$ Insă $a\,b - (a + b) = 9a$

2) $a_1 b_1 - (a_1 + b_1) = a_2 b_2$ $a_1 b_1 - (a_1 + b_1) = 9a_1$.

etc. etc. . . . . .

Cifra zecilor nu poate fi decât 9, deoarece după fiecare operaţiune descreşte cu o unitate. Cifra unimilor e 0. Numărul cerut e 90. Fiecare persoană primeşte jumătate.

78. Să se găsiască locul geometric al vârfului A al triunghiului ABC, ştiind că latura BC e fixă, iar între unghiuri există relaţia

$$2\cos\tfrac{1}{2}(B - C) = 3\sin\tfrac{1}{2}A.$$

I. VASILIU.

R. Înlocuim pe $\cos\frac{1}{2}(B-C)$ prin $(b+c)/a\sin\frac{1}{2}A$ şi avem $b+c=3a/2$. De unde locul lui A e o elipsă, descrisă pe $3a/2$ ca axă mare şi cu BC ca distanţă dintre focare.

79. Dreptele lui SIMSON ale punctelor unde trei drepte paralele taie cercul ABC, în raport cu $\triangle$ ABC, se taie în trei puncte colineare.

I. VASILIU.

R. Ortopolurile lor sunt, după o teoremă cunoscută, colineare. Dar ortopolul unei drepte e intersecţia dreptelor lui SIMSON a punctelor unde ea taie cercul circumscris triunghiului considerat.

80. Să se afle

$$\lim_{n=\infty} \log_a A \log_{a^2} A \log_{a^3} A \ldots \log_{a^n} A.$$

L. Weiss.

R. Ţinând seama de formula generală

$\log_a A = \log_b A / \log_b a$ , rezultă $\log_{a^n} A = \log_a A / \log_a a^n = \log_a A / n$.

Aşà dar

$$\log_a A \log_{a^2} A \log_{a^3} A \ldots \log_{a^n} A = \log_a A \frac{\log_a A}{2} \cdot \frac{\log_a A}{3} \cdots \frac{\log_a A}{n} = \frac{(\log_a A)^n}{n!}.$$

Limita acestei expresiuni e *zero*, ori cum ar fi $\log_a A$: pozitiv, negativ, mai mare sau mai mic ca 1, căci ea e termenul general al unei serii absolut convergente. In adevăr

$$\lim_{n=\infty} v_{n+1} / v_n = \lim_{n=\infty} \log_a A / (n+1) = 0.$$

## PROBLEME PROPUSE

3141 *). *Legea Statutului Funcţionarilor* prevede ca sărbători legale, în afară de Duminici, zilele de: 1, 6, 7 şi 24 ianuarie; 2 fevruarie; 25 martie; 23 aprilie; 10 şi 21 Mai; 29 iunie; 15 august; 8 şi 14 septemvrie; 26 octomvrie; 8 noemvrie; 6, 24, 25, 26 şi 27 decemvrie; cinci zile la Paşte, Inălţarea Domnului şi lunea dela St. Treime. (La Paşte nu se fixează dacă în cele cinci zile se coprinde Vinerea sau Miercurea, dar pentru calcule se va presupune că zilele de sărbătoare sunt Sâmbătă-Miercuri). Care este numărul maximum şi minimium de sărbători anuale?

I. Ionescu.

3311. Se cer patratele de trei cifre aşà ca produsul cifrelor să fie un patrat tot de trei cifre. Generalizare.

G. G. Emanoil.

*) In urma schimbării calendarului ortodox, enunţul acestei probleme, dat în Volumul XXIX pagina 238, trebuie modificat în modul arătat aci.

I. I.

3312. Se cer patratele de forma *dmszu*, care sunt patrate scrise şi sub forma *mdsuz*.

GH. VASILIU.

3313. Intr'o progresie aritmetică de $n$ termeni consecutivi, a cărei raţie este 10, sunt 42 de termeni primi cu $n$.

Se cere numărul termenilor progresiei.

CĂP. I. LINTEŞ.

3314. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Cercul BIC taie laturile AC şi AB respectiv în $B_1$ şi $C_1$.

1. Dreapta $B_1C_1$ este tangenta dusă la cercul înscris I prin piciorul bisectoarei unghiului A.

2. Triunghiurile ABC şi $AB_1C_1$ sunt egale şi simetrice în raport cu bisectoara unghiului A.

3. M fiind un punct arbitrar pe cercul BIC, proiecţiile punctului M pe laturile BC, CA, AB şi $B_1C_1$ sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil într'un cerc, al cărui centru este proiecţia punctului M pe bisectoara unghiului A.

M. GRÜNBAUM.

3315. Să se construiască un triunghiu ABC dreptunghic în A, ştiind că vârful A este fix, că celelalte vârfuri se află pe un cerc dat cu centrul în O şi că ipotenuza este paralelă cu OA.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

3316. Se dă o dreaptă, un punct A pe dânsa şi un punct B afară din dreaptă. In A şi B se prinde un fir de lungime dată. Fie B' proecţia lui B pe dreapta dată. După ce curbă trebuie aranjat

firul între A și B, așă ca momentul static al suprafeței ABB' în raport cu AA' să fie cel mai mare posibil?

I. Ionescu.

3317. Să se rezolve în numere raționale ecuația:

$$xy = x^y .$$

E. Ștefănescu.

3318. Să se arate că, oricare ar fi numărul real $a$, expresia

$$e^a (a \sin x - x \cos x) + x$$

este pozitivă, pentru $0 < x \leqslant r$ și negativă pentru $-\pi \leqslant x < 0$.

A. Angelescu.

3319. Să se demonstreze că, între unghiurile unui triunghiu oarecare, avem relația

$$\cos A \cos B \cos C + (\sin A + \cos C)(\sin B + \cos A)(\sin C + \cos B)$$
$$+ \Sigma \cos A (1 + \sin B)(\sin B + \cos A) = (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C).$$

Ion M. Miu.

3320. Să se găsiască o suprafață, știind că centrul de greutate, al unei porțiuni oarecare din această suprafață, presupusă omogenă, se găsește la o distanță de un plan fix proporțională cu aria proecției porțiunei considerate, pe planul de mai sus și invers proporțională cu aria acelei porțiuni. Factorul de proporționalitate este constant și același pentru orice porțiune din suprafața căutată.

Th. Angheluță.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Adam M.* (P); *Blumen Milu* (2895); *Căldăraru Leon* (P); *Călin M. Gh.* (3248); *Constantinescu V. I.* (3263); *Dorneanu V.* (3299); *Drâmbă N. C.* (3173); *Ioachim Gr.* (3248); *Ionescu Bujor A.* (3286); *Ionescu Th. Constantin* (3299); *Kahane Arno* (3287); *Leescu P.* (P); *Marcovici H.* (2922); *Mareș Gr.* (3248); *Massler Eug.* (3295); *Mihăilescu St. N.* (3167, 248); *Miu M. Ion* (3167, 248, 99); *Mladenovici Al.* (3299); *Nicolau Gh.* (3248); *Paszko W.* (P); *Popovici Dan* (2895, 3248); *Segal Leon* (3274, 85); *Sevastre I. Dumitrn* (3285); *Spathy R.* (3227); *Stoicescu Th.* (P); *Teodorescu Nicolae* (3274, 85); *Vasiliu C. Ion* (3144, 275, 95, 97, 306, P); *Vasiliu M.* (P); *Vîrlan V. V.* (3299).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2397, 860, 946, 72, 3104, 13, 62, 218, 22, 33, 37, 45, 53, 66, 68, 69, 71, 72, 82, 83, 86, 89, 91 și 301 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

# Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

## 29 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV şi XXVI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme (Epuizată).

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

## Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

**(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)**

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, Bucureşti).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**

Onor. Asociaţiunea pentru cultura şi literatura poporului Român din Sibiu complet

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ 1924-1925.

ANUL XXX.

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1925.

C III 8028

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Problema Simultaneităţii (urmare) . . . *Gh. Zapan.*
2. Asupra unor cercuri remarcabile din triunghiu (urmare şi sfârşit). . . . . *C. H. Nicolau.*
3. Note Matematice: 72—76.
4. Bibliografii.
5. Cereri: 127.
6. Chestiuni de examen.
7. Probleme rezolvate: 2380, 2391, 2395, 2428, 2902, 3042, 3190, 3243.
8. Exerciţii: 81—87.
9. Probleme propuse: 3321—3330.
10. Tabla de materii.

ABONAMENTUL 60 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE-FILARET
1925

F. T. — 212

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 2 membri, care pentru anul XXX se compune din D-nii: **Gh. Em. Filipescu**, Inginer, Director de studii şi lucrări la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti; Inginer **G. Borneanu**, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Sub-Directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela D-l *Ing. G. Borneanu*, în schimbul sumei de 1 (un) leu trimeasă prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 128, 46, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 729, 33, 35, 53, 64, 876, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 49, 59, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 347, 53, 92, 403, 14, 22, 30, 34, 39, 40, 43, 44 48, 56, 61, 62, 66, 69, 77, 79, 81, 84, 87, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 23, 38, 43, 45, 47, 55, 56, 58, 65, 69, 71, 84, 86, 92, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 45, 58, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 65, 86, 89, 909, 12, 16, 26, 36, 47, 56, 95, 3005, 19, 45, 69, 89. 107, 14, 27, 34, 40, 50, 60, 61, 69, 80, 85, 92, 94, 208, 15, 20, 26, 28, 30, 38, 40, 49, 55, 57, 58, 60, 62, 64, 69, 70, 72, 76, 78, 79, 84, 88, 92, 94, 96, 98, 300, 02, 03, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

# PROBLEMA SIMULTANEITAȚII *).

(Urmare)

*Considerăm că cele două evenimente* A *și* B *sunt clipe fără durată (ceeace de fapt nu corespunde unei realități fizice) avem simultaneitate pentru observatorii* M *și* M′ *și dreptatea cade de partea lui* BERGSON—MARITAINE; *considerăm dimpotrivă că cele două evenimente* A *și* B *au o durată oarecare, oricât de mică ar fi ea, (și acesta este cazul realității), avem relativitatea simultaneității pentru observatorii din* M *și* M′ *și dreptatea cade de partea lui* EINSTEIN—NORDMANN.

**Cazul I.** *Evenimentele* A *și* B *sunt clipe fără durată.* Să considerăm evenimentul AA′ în raport cu cei doi observatori M și M′. Raza de lumină pornind din AA′, spre M, are o iuțeală constantă de 300.000 km. pe secundă. Dacă în tren, între A′ și M′, ar fi instalați o serie de observatori înarmați cu aparate, cu care să poată prinde iuțeala razei de lumină din AA′ spre M′, fiecare dintre ei ar găsi câte 300.000 km. pe secundă, conform principiului invarianței iuțelii luminii. Așà dar raza pornind din AA′ parcurge distanța A′M′ cu iuțeala de 300.000 km. pe secundă. Facem aceleași considerații și pentru evenimentul BB′ și deducem că raza pornind din BB′ parcurge distanța B′M′ cu aceeași iuțeală de 300.000 km. pe secundă, indiferent de iuțeala trenului.

Așa dar, dacă evenimentele AA′ și BB′ sunt simultane pentru observatorul din M, vor fi și pentru cel din M′ și viceversa, căci razele de lumină ale celor două evenimente AA′, BB′ echidistante față de punctele M și M′, se propagă cu iuțeli egale față de cei doi observatori.

*Consecință.* Evenimentul AA′ este simultan pentru observatorii M și M′. Vom înțelege prin aceasta următorul lucru: simultaneitatea evenimentelor AA′ și a simetricului său BB′ în raport cu observatorii M,M′, sau încă: notând cu M″ punctul de pe linia ferată în care se află observatorul M′ în momentul în care are loc simultaneitatea pentru el, fenomenele în M și M′ sunt simultane, adică au loc la o aceeași «oră» pentru doi observatori instalați pe linia ferată, unul în M și celălalt în M″.

*) A se vedeà G. M. Anul XXX, pag. 361.

**Cazul II.** *Evenimentele* A *şi* B *au durată.* In acest caz, evenimentele nu mai pot fi considerate ca aparţinând deodată ambelor sisteme de referenţă, adică şi trenului şi liniei ferate. Să presupunem că evenimentul A, având o durată determinată, se consumă în punctul fix A de pe calea ferată. Aci avem a studiă cazul de simultaneitate a acestui singur eveniment de durată, care poate fi considerat ca format dintr'o succesiune nedefinită de momente singulare $a_0, a_1, a_2, \ldots$ etc. Potrivit celor stabilite mai sus, evenimentul $a_0$ este perceput în acelaş timp de către cei doi observatori M şi M'; trecând însă la momentul final $a_n$ al evenimentului A, avem a observă că pânăla producerea acestui moment de lumină, observatorul M' nu se mai găseşte în poziţia iniţială, adică vecin cu punctul M, căci în timpul $t$ al duratei evenimentului A, punctul M' s'a deplasat în sensul AB cu o distanţă $d = vt$, — $v$ fiind iuţeala trenului — aşà încât observatorul M' va primi evenimentul $a_n$ după ce acelaş eveniment va fi primit de M, adică pentru observatorul în mişcare M', evenimentul total A va aveà o durată mai mare decât pentru un observator fix situat în sistemul de referenţă al evenimentului, şi ca atare, pentru fenomenele de durată avem, în adevăr, principul «relativităţii simultaneităţii».

Einstein ajunge la «relativitatea simultaneităţii» pentru evenimentele fără durată şi aceasta printr'o demonstraţie în care se fac consideraţii care stau în contradicţie cu principiul invarianţei iuţelei de lumină şi ca atare soluţia dată de Einstein este eronată.

Se ştie însă că Einstein, în teoria relativităţii restrânse, dă o nouă demonstraţie ecuaţiilor de transformare Lorentz, fără să se sprijine pe ipoteza contracţiei Lorentz — Fitz Gerald, ci considerând că propagarea luminei, în raport cu două sisteme de referenţă K şi K', este dată de ecuaţiile :

$$x - ct = 0 \quad \text{şi} \quad x' - ct' = 0,$$

în care $(x, y, z, t)$, $(x', y', z', t')$ sunt respectiv coordonatele celor două sisteme, unul în mişcare faţă de cellalt.

Ţinând seamă de acest principiu, în cazul problemei simultaneităţii, ar fi să vedem că lucrurile s'ar petrece caşi cum trenul nu ar fi în mişcare, adică să avem simultaneitatea evenimentelor în raport cu trenul şi cu linia ferată.

Considerând drept valabile ecuaţiile de mai sus, date de Ein-

STEIN, în fundamentul teoriei relativității restrânse, ar urmă să avem simultaneitatea evenimentelor fără durată în raport cu linia și trenul, și de aci, contradicția flagrantă între zisele lui EINSTEIN.

NORDMANN, la atacurile aduse de BERGSON și MARITAINE împotriva lui EINSTEIN, nu luptă cu argumente, ci caută să-și scape magistrul din încurcătură învăluind «relativitatea» într'un întuneric, în care intuiționismul bergsonian să nu mai poată pătrunde, căci va aveà aface cu efectele magice ale undelor herțiene.

Aducem aceeași critică cași soluției dată de EINSTEIN. Oricare ar fi procedeul prin care s'ar produce cele două evenimente, fără durată, AA' și BB', după cele ce am arătat la «cazul I», evenimentul AA' este simultan în raport cu observatorii M, M', asemenea și evenimentul BB'. Și considerând că evenimentele AA', BB' sunt simultane pentru unul dintre observatorii M sau M', necesar vor fi simultane și pentru celălalt.

BERGSON și MARITAINE rezolvă valabil problema, stabilind simultaneitatea pentru «cazul I» tratat de noi, adică considerând că evenimentele A și B sunt lipsite de durată.

Ne oprim deocamdată aci, la afirmarea unui început de eroare, sau posibilitatea unei erori în teoria relativității.

Dar, din studiul de față, desprindem mai de grabă consecințe asupra filozofiei lui BERGSON decât asupra teoriei lui EINSTEIN.

In adevăr, după ce BERGSON rezolvă problema simultaneității, în sensul mai sus indicat, vine să contrazică simultaneitatea, pe latura științei, să dea dreptate lui EINSTEIN (fără să facă în prealabil dovada) și să-și afirme încă odată, și după el definitiv, sistemul său de filozofie intuiționistă, prin care sapă prăpastie între filozofie și știință, între realitate și cunoștința fenomenală.

Iată ce spune el: «In cazul precedent, am renunțat să adoptăm un sistem de referență; ne-am imaginat că am fi de-odată și pe linie și în tren; am renunțat să devenim fizician. Noi nu căutăm o reprezentare matematică a universului: aceasta evident trebuie luată dintr'un punct anumit de vedere și să se conforme legilor de perspectivă matematică. Filozoful se întreabă ce anume este real, adică observat și constatat efectiv.

Dimpotrivă, pentru fizician este ceeace constată el însuși, sau ceeace ar constată un altul, în așà fel că orice reprezentare fizică

a universului să fie raportată la un sistem de referență. Dar notația, pe care va face-o el atunci, nu va corespunde la nimic perceput sau perceptibil; această notație nu va reprezentà o realitate, ci un simbol».

Și mai departe: «Fizicianul așezat în M, pe linie, va constatà simultaneitatea celor două lumini. Fizicianul nostru n'ar puteà să fie în acelaș timp și în punctul M'. Tot ceeace poate să facă este să spuie că el vede ideal în M' constatarea unei non-simultaneități între cele două lumini. Dar, în definitiv, nimic nu este constatat în M', căci pentru aceasta ar trebui ca în M' să fie un fizician, și unicul fizician de pe lume este, prin ipoteză, în M. Nu poate fi în M' decât o anumită notație efectuată de observatorul din M, notație care este, în definitiv, aceea a unei non-simultaneități. Sau încă, dacă dorim, în M' nu poate fi decât un fizician imaginat și care nu există decât în mintea fizicianului din M. Acesta ar spune cași EINSTEIN: ceeace este simultaneitate în raport cu trenul, nu este cu linia, din moment ce fizica se construiește din punctul de vedere al trenului».

Cu alte vorbe, BERGSON susține că, din punctul de vedere al filozofului, există simultaneitate absolută, iar din punctul de vedere al omului de știință, există relativitatea simultaneității. Cum putem concepe acest lucru?

Este drept că știința nu reprezintă realitatea, totuși conceptele științifice sunt transiente, adică se aplică la realitate. Și chiar dacă am admite că știința ar fi condusă deun criteriu de convenabilitate, după cum afirmà cândvà POINCARÉ[1]), inspirat desigur de aceeași doctrină a lui BERGSON[2]), a admite simultaneitatea din punctul de vedere al filozofului și a o negà dinpunctul de vedere al omului de știință, înseamnă să afirmăm o contradicție flagrantă.

Că BERGSON privește greșit problema, prin prisma filozofiei sale intuiționiste, se poate ușor probà.

Să presupunem că cei doi observatori M și M' nu ar fi nici filozofi și nici fizicieni, ci ar fi doi operatori de cinematograf, înarmați fiecare cu câte un aparat cu dublu obiectiv—câte două obiective opuse și în linie dreaptă — cu care să cinematografieze lumi-

1) Science et Méthode.

2) Prima lucrare a lui BERGSON „Essai sur les données immediates de la conscience" a apărut la 1889.

nile din A şi B. Se consideră că peliculele, pe care s'ar imprimà luminile, ar rulà continuu prin faţa obiectivelor. Simultaneitatea celor două lumini A şi B se va imprimà pe o peliculă printr'un singur punct luminos; succesiunea se va imprimà prin două puncte.

Să presupunem că operaţia se execută şi că se obţin cele două fotografii.

După BERGSON, realitatea este simultaneitatea luminilor în cele două puncte M şi M'. Să presupunem că, în timpul operaţiei, cei doi operatori au fost asistaţi fiecare de câte un filosof, care a veghiat asupra «realităţii» fenomenelor.

Peliculele au fost predate unui fizician, care, după ce le-a făcut câte o baie chimică, constată ceeace au constatat şi filozofii, prin intuiţie: simultaneitatea celor două lumini.

Pentru fizician, simultaneitatea de pe cele două clişee este o simultaneitate ştiinţifică. După EINSTEIN însă, şi cu el şi BERGSON, pe calea ştiinţei, ar urmà să avem non-simultaneitatea. Fizicianul va face atunci apel la logică şi va zice: Una din două! Ori simultaneitate, ori non-simultaneitate!

De fapt, după cum am arătat mai sus, soluţia dată de EINSTEIN este greşită. Urmează că, atât din punctul de vedere al filozofului, cât şi din punctul de vedere al omului de ştiinţă, să avem simultaneitatea.

Că fenomenul de simultaneitate ar fi un fapt psihologic, este în afară de îndoială; dar acelaş fenomen este şi un fapt ştiinţific; realitatea trăită a fenomenului, raportată la unul sau mai mulţi observatori, fie ei fizicieni, sau filozofi, este faptul psihologic, iar faptul ştiinţific este corespondentul formal, simbolic, — clişeul fotografic — al realităţii. Intre aceste două, nu încape contradicţie; sau dacă apare contradicţia, ştiinţa trebuie să-şi modifice factura, aşà încât să răspundă valabil întregului experiment.

Aci stă eroarea filozofiei lui BERGSON. Pentru el, ştiinţa nu are nicio priză cu realitatea; poate merge pânàla contradicţie.

GH. ZAPAN.

# ASUPRA
# UNOR CERCURI REMARCABILE DIN TRIUNGHIU*)

(Urmare)

11. *Dacă notăm cu* $L, L_a, L_b, L_c$, *patru elemente omoloage şi lineare, aparţinând respectiv triunghiurilor asemenea* $ABC$, $AB_cC_b$, $BC_aA_c$, $CA_bB_a$, *atunci avem relaţia:*

$$L = L_a + L_b + L_c. \tag{16}$$

In adevăr, se observă că rapoartele de asemănare între cele trei triunghiuri şi $ABC$ sunt respectiv egale cu:

$$(p-a)/p \quad ; \quad (p-b)/p \quad ; \quad (p-c)/p,$$

aşă că avem:

$$L_a = L\,(p-a)/p \text{ etc.} \quad \therefore \quad L_a + L_b + L_c = L.$$

Aşă, în particular, dacă $R_a, R_b, R_c, R$ sunt razele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri, există relaţia:

$$R_a + R_b + R_c = R. \tag{16'}$$

12. *Dacă* $T, T_a, T_b, T_c$ *sunt patru puncte omoloage aparţinând triunghiurilor precedente, avem relaţia:*

$$TT_a/TA + TT_b/TB + TT_c/TC = 2. \tag{17}$$

Punctele $T$ şi $T_a$ fiind omoloage în triunghiurile asemenea $ABC$ şi $AB_cC_b$, urmează că dreapta $TT_a$ trece prin punctul dublu $A$. Ţinând seama de valoarea raportului de asemănare între cele două triunghiuri, avem:

$$TA/T_aA = p/(p-a) \quad \therefore \quad TA/TT_a = p/a, \text{ etc.}$$

Analog se arată că:

$$T_aA/TA + T_bB/TB + T_cC/TC = 1. \tag{18}$$

13. *Să notăm cu* $G, G_a, G_b, G_c$ *respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor* $ABC$, $AB_cC_b$, $BC_aA_c$, $CA_bB_a$. *Centrul de greutate* $G'$ *al triunghiului* $G_aG_bG_c$ *se află pe dreapta* $GI$ *şi o împarte în raportul* $^1/_3$.

---

*) A se vedeà G. M. Anul XXX, pag. 406.

Să considerăm o dreaptă oarecare $\Delta$ din planul triunghiul ABC, situat în exteriorul său şi să notăm simbolic prin $(\Delta, M)$ distanţa unui punct oarecare M la această dreaptă şi cu $r$, $s$, $t$ respectiv distanţele $(\Delta,A)$, $(\Delta,B)$, $(\Delta,C)$.

Vom aminti următoarea teoremă: Dacă într'un trapez ABCD, în care bazele sunt BC şi AD, se duce prin punctul L al lui CD o paralelă LE la BC şi AD şi dacă notăm:

$$AD = a \; ; \; BC = b \; ; \; LE = d \; ; \; LD : LC = m : n,$$

atunci avem (a se vedeà F.G. — M., *Exercices de Géométrie*, VI-e éd., question 1200, p. 512):

$$d = (a.n + b.m)/(m + n).$$

In cazul nostru, ţinând seamă că:

$$B_c A/B_c B = C_b A/C_b C = (p - a)/a \; ; \; A_c B/A_c A = C_a B/C_a C = (p - b)/b \; ; \; B_a C/B_a B = A_b C/A_b A = (p - c)/c,$$

conform convenţiilor de notaţii făcute, avem:

$$(\Delta,B_c) = \frac{r.a + s(p-a)}{p} \; ; \; (\Delta,C_b) = \frac{r.a + t(p-a)}{p}; \text{ etc.}$$

Ţinând seamă apoi că, în orice triunghiu, suma distanţelor celor trei vârfuri la o dreaptă oarecare este egală cu triplul distanţei baricentrului triunghiului la aceeaş dreaptă, precum şi de expresiunile precedente, obţinem:

$$(\Delta,G_a) = \frac{(\Delta,G)(p-a) + r.a}{p}, \quad \text{etc.}$$

Prin adunarea, parte cu parte, a acestei egalităţi cu alte două analoage cu precedenta, obţinem următoarea relaţie finală:

$$3(\Delta,G') = (\Delta,G) + \frac{r.a + s.b + t.c}{p}. \qquad 19)$$

Dacă considerăm acum triunghiurile $AA_b A_c$, $BB_a B_c$, $CC_a C_b$ şi notăm cu $G'_a$, $G'_b$, $G'_c$ centrele de greutate ale lor şi cu $G_1$ centrul de greutate al triunghiului format de aceste trei puncte, observăm că avem:

$$(\Delta, G') = (\Delta, G_1), \qquad (20)$$

deoarece ambele distanţe sunt egale cu 1/9 din suma distanţelor

aceloraşi nouă puncte la aceeaşi dreaptă $\Delta$. Cum relaţiunea (20) este adevărată pentru orice dreaptă $\Delta$, exterioară triunghiului, urmează că punctele $G_1$ şi $G'$ se confundă.

Se observă că triunghiul $AA_b A_c$ şi analoagele sale sunt isoscele şi că $A_b A_c$ trece prin I, care e mijlocul său. De aici, rezultă că $G'_a$ este situat pe IA, pe care o divide în raportul 1/3. Aşă dar, triunghiul $G'_a G'_b G'_c$ este omotetic cu ABC, având ca centru pe I şi ca raport de omotetie pe 1/3. Punctul $G_1$ şi deci şi $G'$, cu care este confundat, se află pe dreapta IG, pe care o împarte tot în raportul $G'I : G'G = 1/3$.

14. *Dacă notăm cu* $\Omega$, $\Omega_a$, $\Omega_b$, $\Omega_c$ *ortopolurile unei aceleiaşi drepte* $\Delta$ *faţă de triunghiurile* ABC, $AB_c C_b$, $BA_c C_a$, $CA_b B_a$ *şi păstrăm convenţiunile dela proprietatea precedentă, există relaţia:*

$$(\Delta, \Omega_a) + (\Delta, \Omega_b) + (\Delta, \Omega_c) = (\Delta, \Omega). \qquad (21)$$

Se cunoaşte următoarea teoremă: dacă $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sunt unghiurile pe care le face o dreaptă $\Delta$ cu laturile unui triunghiu, $\Omega$ ortopolul dreptei $\Delta$ faţă de ABC şi R raza cercului circumscris triunghiului, atunci avem:

$$(\Delta, \Omega) = 2R \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3.$$

Cum dreapta $\Delta$ face cu laturile celor patru triunghiuri aceleaşi unghiuri $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, luate într'o ordine oarecare, urmează că:

$$(\Delta, \Omega_a) = 2R_a \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3, \quad \text{etc.}$$

Adunând aceste trei egalităţi, analoage cu precedenta şi ţinând seama de relaţia (16'), obţinem egalitatea (21) enunţată.

15. *Dacă* S, $S_a$, $S_b$, $S_c$ sunt ariile celor patru triunghiuri considerate, există relaţia:

$$\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b} + \sqrt{S_c} = \sqrt{S}. \qquad (22)$$

In adevăr, după cele ce preced, avem:

$$S_a = \frac{(p-a)^2}{p^2} S \quad \therefore \quad \sqrt{S_a} = \frac{p-a}{p} \sqrt{S} \quad \text{etc.}$$

* * *

Vom trece acum la examinarea câtorvă proprietăţi ale figurei formată prin înlocuirea cercurilor $O_a$, $O_b$, $O_c$ cu cercurile tangente

la câte două din laturile triunghiului inițial ABC și la cercul său circumscris, însă în exterior.

Păstrând aceleași notațiuni ca și la figura primă, însă accentuate (așa că $O'_a$ corespunde lui $O_a$), vom observà că multe din proprietățile precedente se mențin și în cazul de figură nouă, mai ales cele descriptive.

Vom enunțà numai proprietățile, care se mențin și în figura nouă, indicând pe unde va fi cazul, micile modificări de demonstrație.

16. *Dreptele* $AA'_1$, $BB'_1$, $CC'_1$ *sunt concurente în centrul interior de asemănare* K' *al cercurilor* O *și* I.

17. *Centrele cercurilor exînscrise* $I_a$, $I_b$, $I_c$, *sunt respectiv mijloacele dreptelor* $A'_b A'_c$, $B'_a B_c$, $C'_a C'_b$.

18. *Dreptele* $A'_1A'_b$, $C'_1C'_b$ *trec prin punctul* $A'_2$, *diametralul opus în cercul* O *al punctului* $A_2$.

Pentru justificarea acestei proprietăți, se va aveà în vedere teorema *e)*.

19. *Punctele* $B'_1$, $C'_1$, $B'_a$, $C'_a$, *precum și grupele analoage, sunt pe câte un cerc.*

20. *Punctele* $I_b$, $I_c$, $B'_a$, $C'_a$, *precum și grupele analoage, sunt pe câte un cerc.*

Această proprietate, care aparține numai configurației exterioare, se demonstrează observând că:

$$\sphericalangle I_c C'_a B'_a = 90^0 - \tfrac{1}{2}C$$

$$\sphericalangle B'_c I_b A = \sphericalangle I_b I_c I_a = 90^0 - \tfrac{1}{2}C.$$

21. *Triunghiurile* $AB'_c C'_b$, $BC'_a A'_c$, $CA'_b B'_a$ *sunt echivalente fiecare cu triunghiul* ABC.

In adevăr, avem:

$$AA'_b = AA'_c = b.c/(p-a), \text{ etc.} \qquad (23)$$

$$AB'_c = c(p-c)/(p-b); \quad AC'_b = b(p-b)/(p-c), \text{ etc.} \qquad (24)$$

Deci aria $AB'_c C'_b = \tfrac{1}{2}AB'_c . AC'_b \sin A = \tfrac{1}{2}bc \sin A$.

22. *In hexagonul* $A'_c A'_b B'_a B'_c C'_b C'_a$, *triunghiul format de trei vârfuri neconsecutive este echivalent cu triunghiul format de celelalte trei vârfuri.*

Chestiunea revine la a arătà că triunghiurile $A'_b B'_c C'_a$ și $A'_c B'_a C'_b$ sunt echivalente.

Deoarece $A'_b A'_c$ este perpendiculară pe AI, care este înălțime în triunghiul $I_a I_b I_c$ și are mijlocul său în $I_a$, urmează că triunghiul format de prelungirile dreptelor $A'_b A'_c$, $B'_a B'_c$, $C_a C'_b$ va avea pe I ca centru al cercului circumscris și pe $I_a$, $I_b$, $I_c$ respectiv ca mijloace ale laturilor. De aici, urmează că cele două triunghiuri considerate au vârfurile corespunzătoare simetrice față de mijloacele laturilor unui triunghiu circumscris amândurora și deci ele sunt echivalente, conform unei teoreme cunoscute (ROUCHÉ și COMBEROUSSE pag. 504).

23. *Punctul* K' *este isogonalul punctului lui* GERGONNE Γ *al triunghiului* ABC, proprietate care se poate demonstră printr'o metodă analoagă cu cea relativă la cercurile tangente interioare.

24. *In hexagonul* $AB'_1CA'_1BC'_1$ *produsul a trei laturi neconsecutive este egal cu produsul celorlalte trei laturi.*

25. Intre elementele figurei, avem relațiile analoage cu (12):

$$AB'_c \cdot BC'_a \cdot CA'_b = CA'_b \cdot BA'_c \cdot CB'_a = 1/8\, A'_b A'_c \cdot B'_a B'_c \cdot C'_a C'_b = a \cdot b \cdot c. \quad (25)$$

Avem: $$AB'_c + BC'_a + CA'_b = AC'_b + BA'_c + CB'_a, \quad (26)$$

care revine la a arătà că între elementele unui triunghiu ABC există relația ușor de verificat:

$$\frac{a(p-a)}{p-c} + \frac{b(p-b)}{p-a} + \frac{c(p-c)}{p-b} = \frac{a(p-a)}{p-b} + \frac{b(p-b)}{p-c} + \frac{c(p-c)}{p-a}.$$

Relațiile analoage cu (14) nu subsistă în cazul acestei figuri.

C. H. NICOLAU.

## NOTE MATEMATICE

72. *Alte zece aritmetici diverse.* (Vezi Nota 29 pag. 170 Anul XXIX).

91. **Algebrei.** A se vedeà «Bulletin of the American mathematical Society». Vol. XXX pag. 251.

92. **Calculatoare.** *Deschales.* — Arithmetica calculatoria et divinatoria.

93. **Divinatoare.** Vezi No. 92.
94. **Duodecimală.** *A. D. Gautier.*— La Zonnomie ou l'arithmétique duodécimale. Paris.
95. **Generalizată.** A se vedeà *F. Dauge.* Mithodologie mathématique pag. 104.
96. **Geometrică.** A se vedeà *H. G. Zeuthen.* Histoire des mathématique. Paris 1902. pag. 31.
97. **Indiană.** Idem. pag. 219.
98. **Locală.** Titlul ultimului capitol din *Rabdologia* lui NEPER.
99. **Tecnică.** *G. W. Merrified.*— Technical arithmetic and mensuration. Londra 1873.
100. **Virgulară.** *Aritmetica virgulare.* Verona 1623. (Traducerea Rabdologiei lui NEPER).

(Va urmà). I. IONESCU.

73. *Câtevà probleme de divizibilitate.*

1. *In ce caz* $\sum_1^n (10^m . a_i + a'_i)$ *se divide cu* $\sum_1^n (10^m a'_i + a_i)$ ?

Fie $p$ un întreg. Va trebuì să avem:

$$p = \frac{\Sigma(10^m . a_i + a'_i)}{\Sigma(10^m . a'_i + a_i)},$$

$$p - 1 = \frac{(10^m - 1)\,\Sigma(a_i - a'_i)}{\Sigma(10^m . a'_i + a_i)}.$$

Să punem:

$$x = \sum_1^n a_i , \qquad y = \sum_1^n a'_i .$$

Avem, înlocuind:

$$p - 1 = \frac{(10^m - 1)(x - y)}{10^m y + x},$$

$$(p . 10^m - 1)y = (10^m - p)x.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{p . 10^m - 1}{10^m - p} = \frac{\alpha}{\beta},$$

în care $\alpha/\beta$ este ireductibilă. Atunci, vom lua

$$x = \sum_1^n a_i = \alpha t \leqslant 9n; \quad y = \sum_1^n a'_i = \beta t \leqslant 9n,$$

de oarece $a_i$ şi $a'_i$ sunt cifre.

*Exemplu.* Fie $x = 3$, $m = 1$, $p = 2$. Avem:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 . 10 - 1}{10 - 2} = \frac{10}{8}.$$

Aci, nu putem lua decât $t = 1$, căci $19t < 3 . 9$. Deci:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 19, \quad a'_1 + a'_2 + a'_3 = 8.$$

Putem lua, de exemplu, $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$; $a'_1 = 5$; $a'_2 = 2$, $a'_3 = 1$ şi găsim soluţia:

$$\frac{85 + 72 + 41}{58 + 27 + 14} = 2.$$

2. *In ce caz* $\sum_1^n (10^m . a_i + a'_i)$ *se divide cu* $\sum_1^n (a_i + a'_i)$?

Cu aceleaşi notaţiuni şi procedând în acelaş mod, ajungem la

$$x/y = (p - 1)/(10^m - p) = \alpha/\beta = \alpha t/\beta t.$$

*Exemplu.* Fie $n = 4$, $m = 1$, $p = 5$. Avem:

$$\alpha/\beta = (5 - 1)/(10 - 5) = 4/5.$$

Fie $t = 2$. Avem:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8, \quad a'_1 + a'_2 + a'_3 + a'_4 = 10.$$

Putem lua $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$; $a'_1 = 2$, $a'_2 = 1$, $a'_3 = 3$, $a'_4 = 4$. Avem, în adevăr:

$$(12 + 21 + 33 + 24)/(1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 + 3 + 4) = 5.$$

3. *In ce caz* $\sum_1^n (10^m . a_i + a'_i)$ *se divide cu* $\sum_1^n (a_i - a'_i)$?

Se găseşte:

$$x/y = (p + 1)/(p - 10^m) = \alpha t/\beta t.$$

*Exemplu:* Fie $m = 1$, $n = 2$, $p = 14$, $t = 1$. Găsim

$$x = a_1 + a_3 = 15, \quad y = a'_1 + a'_2 = 4.$$

Putem lua $a_1 = 7$, $a_2 = 8$; $a'_1 = 3$, $a'_2 = 1$. Avem în adevăr:

$$(73 + 81)/(7 + 8 - 3 - 1) = 14.$$

4. *In ce caz* $\sum_1^n (10^m a_i + a'_i)$ *se divide cu* $\sum_1^n (10^m a'_i - a_i)$?

Se găseşte:

$$x/y = (10^m p - 1)/(10^m + p) = \alpha t/\beta t.$$

*Exemplu.* Fie $m=1$, $n=3$, $p=1$, $t=1$. Găsim:

$$x = a_1 + a_2 + a_3 = 9, \quad y = a'_1 + a'_2 + a'_3 = 11.$$

Putem lua $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$; $a'_1=2$, $a'_2=4$, $a'_3=5$. Avem în adevăr:

$$(22+34+45)/(20+40+50-2-3-4) = 1.$$

Când $m = 0$, chestiunea se reduce la divizibilitatea lui $\Sigma(a_i + a'_i)$ prin $\Sigma(a'_i - b'_i)$, care generalizează multe probleme şi exerciţii.

5. *Când* $\sum_1^n (10^m a_i + a'_i)$ *se divide prin* $\sum_1^n (10^m a_i - a'_i)$.

Se găseşte:

$$x/y = (p+1)/(p-1)10^m = \alpha t/\beta t.$$

*Exemplu.* Fie $n=2$, $m=1$, $p=3$, $t=2$. Găsim:

$$x = a_1 + a_2 = 2, \quad y = a'_1 + a'_2 = 10.$$

Putem lua $a_1 = 1$, $a_2 = 1$; $a'_1 = 4$, $a'_2 = 6$. Avem în adevăr:

$$(14+16)/(10+10-4-6) = 3.$$

6. *In ce caz* $\sum_1^n (10^m a_i + a'_i)$ *se divide cu* $\sum_1^n (ua_i + u'a'_i)$?

Se găseşte:

$$x/y = (pu' - 1)/(10^m - pu) = \alpha t/\beta t.$$

7. *In ce caz* $\sum_1^n (10^m a_i + a'_i)$ *se divide cu* $\sum_1^n (ua_i - u'a'_i)$?

Se găseşte:

$$x/y = (pu' + 1)/(pu - 10^m) = \alpha t/\beta t.$$

8. *In ce caz* $\sum_1^n (10^m a_i + a'_i)$ *se divide cu* $\sum_1^n (ua'_i - u'a_i)$?

Se găseşte:

$$x/y = (pu - 1)/(10^m + pu') = \alpha t/\beta t.$$

G. Tailer.

74. *Asupra problemei 1678.* In această problemă, ni se cere să demonstrăm relația

$$\sum_{i=n}^{n+k} u_i = u_n\, u_{k+1} + u_{n+1}\,(u_{k+2} - 1)$$

unde $u_1$, $u_2$, ... sunt termenii şirului lui FIBONACCI.

Iată o soluție mai simplă decât cea publicată în *G. M.* vol. XVIII, pag. 141. In adevăr, putem scrie

$$(1) \qquad \sum_{i=n}^{i=n+k} u_i = \sum_{i=1}^{n+k} u_i - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \,.$$

Dar se ştie din Culegere de probleme (Aritm. II, 10), că avem

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$$

şi, înlocuind în (1), avem

$$\sum_{i=n}^{n+k} u_i = (u_{n+k+2} - 1) - (u_{n+1} - 1) = u_{n+k+2} - u_{n+1}.$$

Ţinând seama de relaţia (G. M. vol. XVIII, p. 142)

$$u_{n+p} = u_n \,.\, u_{p-1} + u_{n+1} \,.\, u_p,$$

avem

$$u_{n+k+2} = u_n \,.\, u_{k+1} + u_{n+1} \,.\, u_{n+k+2}$$

şi relaţia propusă devine

$$\sum_{i=n}^{n+k} u_i = u_n \,.\, u_{k+1} + u_{n+1} \,.\, u_{k+2} - u_{n+1} = u_n \,.\, u_{k+1} + u_{n+1} + (u_{k+2} - 1).$$

c. c. t. d.

MARIN ŞTEFAN.
Constanţa.

75. *O extindere asupra factorialelor.*

Se ştie că :

$$n\,! < n^n \,.$$

In cele ce urmează, voesc să arăt că :

$$\underbrace{n\,!\,!\ldots!}_{i} < \underbrace{n^{(n,\, n,\ldots\, n)}}_{i},$$

unde am notat simbolic :

$$n\,(n) = n^n \,;\; n\,(n,\, n) = n^{n^{n}} \,,\ \text{etc.....}$$

In adevăr, să vedem mai întâi dacă:

$$n!! < n\ (n, n).$$

Mai știm că:

$$a! < \left(\frac{a+1}{2}\right)^a.$$

Fie $a = n!$, atunci avem:

$$n!! < \left(\frac{n!+1}{2}\right)^{n!}.$$

Dar să înlocuim în partea II pe $n!$ cu $n^n$, adică:

$$\left(\frac{n!+1}{2}\right)^{n!} < \left(\frac{n^n}{2}\right)^n$$

ceeace este evident, și să vedem dacă:

$$\left(\frac{n^n}{2}\right)^n < n^{n^n}.$$

In adevăr, deducem ușor că:

$$n^n < 2^{n^n}$$

ceeace este evident, deci vom aveà:

$$n!! < n\ (n, n).$$

Deasemenea, să vedem dacă:

$$n!!! < n\ (n, n, n).$$

Avem:

$$n!!! < \left(\frac{n!!+1}{2}\right)^{n!}.$$

Insă:

$$\left(\frac{n!!+1}{2}\right)^{n!!} < \left(\frac{n^{n^n}}{2}\right)^n.$$

Și:

$$\left(\frac{n^{n^n}}{2}\right)^{n^n} < n^{n^n},$$

căci:

$$n^{n^n} < 2^{n^n}.$$

Urmând dar analog, vom conchide că:

$$\underbrace{n!!!\ldots!}_{i} < n\,\underbrace{(n, n, \ldots n)}_{n}.$$

CĂPIT. I. LINTEȘ.

76. *Flambajul barelor tronconice.*

Să considerăm o bară tronconică, articulată la ambele extremități și supusă unei forțe axiale de compresiune P.

Ne propunem să găsim valoarea minimă a lui P, pentru care avem mai mult de o poziție de echilibru, adică sarcina de flambaj a barei.

Ecuația fibrei medii deformate este:

$$d^2\eta/dx^2 = -M/EI_x$$

sau:

$$d^2\eta/dx^2 = -P\eta/EI_x. \qquad (1)$$

Fie $r_x$ raza secțiunei la distanța $x$ de origine; avem:

$$I_x = \tfrac{1}{4}\pi r_x \qquad r_x = \frac{R-r}{l}x + r$$

$$\therefore \qquad I_x = \tfrac{1}{4}\pi\left(\frac{R-r}{l}x + r\right)^4.$$

Ecuațiunea (1) devine:

$$d^2\eta/dx^2 = -\frac{P}{E\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\eta}{\left(\frac{R-r}{l}x + r\right)^4}. \qquad (2)$$

Făcând schimbarea de variabilă:

$$\frac{R-r}{l}x + r = t,$$

ecuația de mai sus devine:

$$d^2\eta/dt^2 = -\frac{4P}{E\pi\left(\frac{R-r}{l}\right)^2} \cdot \frac{\eta}{t^4};$$

notând:

$$\frac{4P}{E\pi\left(\frac{R-r}{l}\right)^2}=\alpha^2 \qquad (3)$$

avem, în fine:

$$t^4\frac{d^2\eta}{dt^2}+\alpha^2\eta=0.$$

Pentru a integrà această ecuație diferențială, să schimbăm funcțiunea $\eta$ și variabilă $t$ respectiv cu $\eta/t$, $1/t$. Avem:

$$\frac{d^2(\eta/t)}{d(1/t)^2}+\alpha^2(\eta/t)=0$$

și deci:

$$\eta/t=A\cos(\alpha/t)+B\sin(\alpha/t),$$

sau:

$$\eta=t\,[A\cos(\alpha/t)+B\sin(\alpha/t)].$$

Integrala generală e ecuației (2) este, deci:

$$\eta=\left(\frac{R-r}{l}x+r\right)\left(A\cos\frac{\alpha}{\frac{R-r}{l}x+r}+B\sin\frac{\alpha}{\frac{R-r}{l}x+r}\right)$$

unde $\alpha$ este dat de relația (3), iar A și B sunt constante arbitrare.

Punând condițiile inițiale:

$$\begin{cases} x=0 \\ \eta=0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x=l \\ \eta=0 \end{cases}$$

obținem sistemul omogen:

$$\begin{cases} A\cos(\alpha/r)+B\sin(\alpha/r)=0 \\ A\cos(\alpha/R)+B\sin(\alpha/R)=0 \end{cases}$$

Când determinantul sistemului e diferit de zero, avem:

$$A=B=0$$

adică poziția rectilinie de echilibru, iar când:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha/r) & \sin(\alpha/r) \\ \cos(\alpha/R) & \sin(\alpha/R) \end{vmatrix}=0.$$

A și B sunt nedeterminați.

Deducem :

$$\sin(\alpha/r - \alpha/R) = 0.$$

$$\therefore \quad \alpha/r - \alpha/R = \pi,$$

conform definiției sarcinei de flambaj.

Ținând seamă de valoarea lui $\alpha$, dată de relația (3) găsim, în fine :

$$P = \pi^3 E^2 R^2 r^2/4\, l^2.$$

Ca verificare, dacă facem $R = r$, găsim

$P = \pi^3 E r^4/4\, l^2 = \pi^2 E I/l^2$ adică formula lui EULER.

*a)* Să considerăm cazul, când bara este articulată la un capăt și încastrată la celălalt, și anume la capătul de secțiune $\pi R^2$.

Condițiile inițiale sunt :

$$\begin{cases} x = 0 \\ \eta = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = l \\ d\eta/dx = 0 \end{cases}$$

astfel că, analog ca mai sus, obținem determinantul :

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha/r) & \sin(\alpha/r) \\ \cos(\alpha/R) + (\alpha/R)\sin(\alpha/R) & \sin(\alpha/R) - (\alpha/R)\cos(\alpha/R) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}(\alpha/r - \alpha/R) = -(\alpha/R).$$

Separând grafic rădăcinile acestei ecuații în $\alpha$, se constată că cea mai mică rădăcină pozitivă este mai mare decât :

$$\tfrac{1}{2}\pi : (1/r - 1/R).$$

Deci, putem lua :

$$\alpha = \pi R r/2\,(R - r)$$

$$\therefore \quad P = \pi^3 E R^2 r^2/4\,(2l)^2 = \pi^3 E R^2 r^2/4\lambda^2 \qquad (\lambda = 2l)$$

$\lambda$ fiind lungimea de flambaj.

Când secțiunea de rază $r$ este cea încastrată, obținem ecuația :

$$\operatorname{tg}(\alpha/r - \alpha/R) = (\alpha/r,)$$

ecuația are o rădăcină mai mică decât $\frac{1}{2}\pi : (1/r - 1/R)$ ; sarcina de flambaj scade sensibil cu cât diferența $R - r$ este mai mure.

*b)* Dacă bara este încastrată la ambele extremități, condițiile inițiale sunt :

$$\begin{cases} x = 0 \\ d\eta/dx = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}l \\ d\eta/dx = 0 \end{cases}$$

Obţinem determinantul:

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r}\sin\frac{\alpha}{r} & \sin\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r}\cos\frac{\alpha}{r} \\ \cos\frac{2\alpha}{R+r} + \frac{2\alpha}{R+r}\sin\frac{2\alpha}{R+r} & \sin\frac{2\alpha}{R+r} - \frac{2\alpha}{R+r}\cos\frac{2\alpha}{R+r} \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{2\alpha}{R+r}\right) = \frac{\frac{\alpha}{r} - \frac{2\alpha}{R+r}}{1 + \frac{2\alpha^2}{(R+r)r}},$$

sau încă:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{R-r}{R+r} = \frac{\alpha(R-r)}{2\alpha^2 + (R+r)r}.$$

Rădăcina cea mai mică, pozitivă, a acestei ecuaţiuni, este superioară lui:

$$\pi : \frac{1}{r} \cdot \frac{R-r}{R+r}.$$

Ca atare, putem lua:

$$\alpha = \pi r(R+r)/(R-r)$$

$$\therefore \quad P = \pi^3 E r^2 (R+r)^2/4 l^2.$$

Făcând şi aci $R = r$, găsim

$$P = \pi^2 E I/(\tfrac{1}{2}/l)^2 = \pi^2 E I/\lambda^2.$$

Gh. D. Popescu-Botoşani.
Şcoala Politechnică, Bucureşti.

# BIBLIOGRAFIE.

**Annales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Tomul XCVIII No. 5—6 Noemvrie-Decemvrie 1924. Buenos Aires.

**Curierul Matematic.** Vol. I No. 5. Iulie 1925. Asupra unui sistem de ecuaţii transcendente, de C. E. GEORGESCU. Câtevă propietăţi ale triunghiului de N. G. BOTEA.

**Journal de Mathématiques élémentaires** publié par H. VUIBERT. Anul 49. No. 19 Iulie 1925. Paris.

**Idem.** No. 20. Asupra elipsei ca proiecţiune a cercului, de J. JUHEL RÉNOY.

**Foaia matematică.** Anul 2 No. 7. Iulie 1925. Chişinău. Generalizarea triunghiurilor ortologice, de L. WEISS. Asupra unor puncte colineare de N. G. BOTEA.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul V. No. 5. Iulie 1925. Timişoara. Indentităţi algebrice deduse cu ajutorul calculelor de algebră elementară, de E. ŞTEFĂNESCU.

**Mathesis.** Tomul XXXIX. No. 9. Iulie 1925. Bruxelles. Asupra isotopicului mixt al două cercuri sau parabole, de R. DEAUX. Asupra unei generalizări a punctelor lui BROCARD, de R. GOORMAGHTIGH. Note de algebră elementară de AD. M. Asupra unor triunghiuri speciale, de A. de HUISSER.

N. ABRAMESCU. *Sur les courbes de convergence des séries procédant suivant les inverses des polynomes donnés.* Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris, 23 Fevruarie 1925. Paris.

V. THÉBAULT. *Contributions à la géométrie du triangle et du tétraèdre.* Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 29 Mai 1925.

AD. MINUER. *Géométrie analytique dans l'espace.* (Litografiat). J. VAN DIJL, Rue des étudiants 38. Bruxelles.

In acest volum de 288 pagini în folio, este cuprins cursul pe care autorul îl face la Universitatea liberă din Bruxelles, şi coprinde în afară de geometria analitică în spaţiu şi noţiuni de geometrie şi analiză vectorială. Expunerea este clară şi lămurită prin exemple, procedându-se dela simplu la complex. Nu se vede nicio figură în tot cursul, totul este tratat analiticeşte. Litografierea este îngrijită. Manualul poate folosi mult studenţilor în ştiinţe şi elevilor şcolilor tecnice superioare. Din alăturatul rezumat al tabelei de materii se poate vedeà întinderea conţinutului acestui curs de geometrie analitică:

Cap. I. *Punct, plan, linie dreaptă.* Sumă şi diferenţă de vectori, proecţiuni, produse scalare, coordonate carteziane. polare, omogene de drepte, punctuale, tangenţiale, unghiuri, distanţe, locuri geometrice, elemente imaginare.

Cap. II. *Generalităţi despre suprafeţe.* Con isotrop, sferă, suprafeţe de rotaţie, cilindrice, conice, riglate, conoide, algebrice.

Cap. III. *Conuri de gradul II.* Invarianţi, clasificarea conurilor, plane şi conuri principale, plane şi axe ciclice, axe şi plane focale.

Cap. IV. *Cuadrice.* Invarianţi. Conuri asimptotice, puncte duble, proprietăţi polare, chestiuni diverse.

I. I.

## CERERI.

127. Pierzând vol. XXV (anul 1919—1920) din colecţia „*Gazetei Matematice*“ rog pe cei ce vor şi pot, să-mi procure acest volum, contra cost.

Căpitan-aviator Gr. Zapan.
Tecuci.

## CHESTIUNI DE EXAMEN

### ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN BUCUREŞTI.

*(Anul I).*

### GEOMETRIA ANALITICĂ.

**Intâiul examen parţial (2 ore) dela 23 Ianuarie 1925.**

Se dă triunghiul definit de vârfurile A (1, 3), B (4, 3), C (2, 5).

1°. Să se calculeze aria acestui triunghiu.

2°. Să se scrie ecuaţia transversalei care tae pe AB în C' şi pe CB în A' aşà încât:

$$C'A/C'B = -1, \qquad A'B/A'C = -\tfrac{1}{2}.$$

3°. Să se afle coordonatele punctului de intersecţie B' al transversalei cu latura AC.

4°. Pe fiecare din laturile triunghiului se iau respectiv punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$, conjugate armonic ale lui A', B', C', în raport cu laturile BC, CA şi AB. Ce legătură există între dreptele $AA_1$, $BB_1$ şi $CC_1$?

**Al doilea examen parţial (2 ore) ţinut la 25 Martie 1925.**

Se consideră conica:

$$x^2 + xy - y^2 + 6x - 6y - 1 = 0.$$

1°. Să se scrie ecuaţia tangentei la conică în punctul (1, 1) şi ecuaţia polarei punctului (2, 1).

2°. Să se găsiască genul conicei, să se afle poziţia axelor, precum şi ecuaţia redusă.

3°. Să se găsiască direct, considerând ecuaţia $f(x, y)=0$, asimptotele conicei.

4°. Să se afle raza de curbură a conicei în punctul (1, 1).

## EXAMENUL GENERAL.

(19 Iunie 1925, 8 — 11)

Se consideră octaedrul SABCDS' format din alipirea prin bazele lor a două piramide egale cu baza patrată ABCD. Fie O centrul octaedrului; se iau ca axe $Ox$, $Oy$, $Oz$ respectiv direcţiile OA, OB, OS. Toate triunghiurile SAB, SBC, SCD şi SDA sunt isoscele şi egale între ele. Se dă OS=4, SA=5.

1. Să se scrie ecuaţia elipsoidului circumscris octaedruiui şi având ca semiaxă OA, OB, OS.

2. Se consideră, faţă de acest elipsoid, planul polar al punctului (0, 0, 8). El taie octaedrul după un patrat $p$ şi elipsoidul după un cerc $c$. Se cere aria patratului $p$ şi aceea a cercului $c$.

3. Să se scrie ecuaţia conului care are ca vârf punctul O şi ca directoare cercul $c$.

4. Să se scrie ecuaţia planului tangent la con în lungul generatoarei situate în unghiul $xOz$.

# PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2380. *Să se găsiască numerele de patru cifre, care împărţite prin suma cifrelor lor, să ne dea un cub perfect.*

O. Orănescu.

Soluţie dată de D-l Tiberiu Popoviciu.

Câtul dintre un număr de patru cifre şi suma cifrelor sale nu poate fi mai mare ca 1000; deci cuburile obţinute trebuie să fie

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 sau 1000.

Vom încercà să înmulţim fiecare dintre aceste cuburi cu un număr, aşà fel ca numărul de patru cifre obţinut să aibă suma cifrelor egală cu acel număr. Observăm că un număr de patru cifre

are ca sumă a cifrelor sale cel mult 36, deci vom înmulți cuburile luate numai cu numerele dela 1 până la 36.

Pentru cubul 1, nu avem nicio soluție pentrucă chiar $1 \times 36$ are numai două cifre. Asemenea, nu avem soluții pentru cuburile 8 și 27, căci $27 \times 36$ are numai 3 cifre. Să considerăm acum pe rând celelalte cazuri:

1) Să luăm cubul 64, pe care trebuie să-l înmulțim cu toate numerele dela 1 până la 36. Vom căutà însă, să reducem cât se poate numărul cazurilor. Vedem că $64 \times 15$ are numai 3 cifre, deci suprimăm toate numerele dela 1 până la 15 inclusiv.

Observăm apoi că $29 \times 64 = 1856$ și $36 \times 64 = 2304$, deci ele au respectiv mai mult de 29 cifre, așà că suprimăm și numerele dela 29 până la 36, ne rămâne să înmulțim pe 64 cu numerele dela 16 până la 28 inclusiv. Vom aveà, adică:

$64 \times 16 = 1024$ $64 \times 19 = 1216$ $64 \times 22 = 1408$ $64 \times 25 = 1600$
$64 \times 17 = \mathbf{1088}$ $64 \times 20 = 1280$ $64 \times 23 = 1472$ $64 \times 26 = 1664$
$64 \times 18 = 1152$ $64 \times 21 = 1344$ $64 \times 24 = 1536$ $64 \times 27 = 1728$
$64 \times 28 = 1792.$

Se vede, din acest tablou, că avem ca soluție pe **1088.** (1)

2) Pentru cubul 125, făcând aceleași considerațiuni, găsim că trebue să-l înmulțim cu numerele dela 9 până la 30, deci să formăm tabloul:

$125 \times 9 = \mathbf{1125}$ $125 \times 11 = 1375$ $125 \times 13 = 1625$ $125 \times 15 = 1875$
$125 \times 10 = 1250$ $125 \times 12 = 1500$ $125 \times 14 = 1750$ $125 \times 16 = 2000.$

Se vede, după aceasta, că numerele se succed periodic schimbându-se numai cifra primă, deci vom aveà ca sumă a cifrelor 10, 9, 17, 7, etc.

Avem, prin urmare, ca soluție pe **1125.** (2)

3) Luând cuburile 216 și 729, ele se divid cu 9, deci e destul să cercetăm produsele:

$216 \times 9 = 1944$ $216 \times 27 = 5832$ $729 \times 18 = 13122.$
$216 \times 18 = 3888$ $729 \times 9 = 6561$

Aci, nu avem nicio soluție.

4) Să luăm cubul 343; făcând considerațiunile arătate și pentru 64, avem să înmulțim pe 343 cu numerele dela 3 până la 29.

Adică :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 343×3=1029 | 343× 9=3087 | 343×16=5488 | 343×23=7889 |
| 343×4=1372 | 343×10=**3430** | 343×17=**5831** | 343×24=8232 |
| 343×5=1715 | 343×11=3773 | 343×18=**6174** | 343×25=**8575** |
| 343×6=2058 | 343×12=**4116** | 343×19=**6517** | 343×26=**8918** |
| 343×7=**2401** | 343×13=4459 | 343×20=**6860** | 343×27=9261 |
| 343×8=2744 | 343×14=**4802** | 342×21=7203 | 343×28=9604 |
| | 543×15=**5145** | 343×22=**7546** | 343×29=**9947**. |

Avem, prin urmare, sóluţiunile :

2401, 3430, 4116, 4802, 5145, 5831, 6174, 6517, 6860, 7546, 8575, 8918, 9947. (3)

5. Cubul 512 se vede că trebuie îmulţit cu numerele dela 2 pânăla 19, adică avem tabloul :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 512×2=1024 | 512×6=3072 | 512×10=5120 | 512×15=7680 |
| 512×3=1536 | 512×7=3584 | 512×11=5632 | 512×16=8192 |
| 512×4=2048 | 512×8=4096 | 512×12=6144 | 512×17=8704 |
| 512×5=2560 | 512×9=4608 | 512×13=6656 | 512×18=**9216** |
| | | 512×14=7268 | 512×19=9728. |

Avem soluţia 9216. (4)

6) Pentru cubul 1000, corespund soluţiunile :

1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000. (5)

Din (1), (2), (3), (4) şi (5) se vede că problema admite următoarele 25 soluţiuni :

1000, 1088, 1125, 2000, 2401, 3000, 3430, 4000, 4116, 4802, 5000, 5145, 5831, 6000, 6174, 6517, 6860, 7000, 7546, 8000, 8575, 8918, 9000, 9216, 9947.

*Notă.* Au dat câte o soluţie, D-nii : St. Codreanu, I. Coşereanu şi D. Vogel ; câte 4 soluţiuni, D-nii : C. H. Nicolau şi V. Pintilescu ; a dat 14 soluţiuni, D-l N. I. Ciorănescu ; câte 22 soluţiuni, D-nii : I. M. Lăzărescu, C. Ştefănescu şi M. Reinhorn ; au dat 23 de soluţiuni şi 24 soluţiuni respectiv, D-nii : Cezar Partenie Antoni şi P. Katz.

PROBLEMA 2391. (Enunț completat). *Mai multe funcțiuni omogene de* x, y,...z *fiind nule, o altă funcțiune omogenă de* x, y,...z *de grad diferit de zero, nu poate fi maximă sau minimă fără a fi identic nulă.*

St. N. Mirea.

Soluțiune dată de D-l M. Ghermănescu. Fie $F(x, y....z)$ o funcțiune omogenă de gradul $m \neq o$ și

$$(1) \qquad \varphi_1(x, y,...z) = 0, \quad \varphi_2(x, y,...z) = 0 ...... \quad \varphi_k(x, y,...z) = 0,$$

$k$ funcțiuni omogene identic nule, respectiv de gradul $m_1, m_2....m_k$, fiind $k$ mai mic decât numărul variabilelor $x, y....z$.

Se știe că valorile, care fac maximum sau minimum o funcțiune oarecare $F(x, y,....z)$ de variabilele $x, y,....z$ legate prin $k$ relațiuni distincte (1), se obțin rezolvând sistemul lui Bézout :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + ...... + \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + ...... + \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte, funcțiunile $F, \varphi_1, \varphi_2,....\varphi_k$ fiind omogene, ele satisfac identității lui Euler. Avem deci :

$$(3) \qquad \begin{cases} m\,F(x, y,....z) = x \dfrac{\partial F}{\partial x} + y \dfrac{\partial F}{\partial y} + ...... + z \dfrac{\partial F}{\partial z}, \\ m_1 \varphi_1(x, y,...z) = z \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + y \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + ...... + z \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ m_k \varphi_k(x, y,...z) = z \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x} + y \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial y} + ...... + z \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Multiplicând ecuațiile sistemului (1), respectiv cu $x, y,....z$ și adunând, obținem, ținând seama de (3):

$$m\,F(x, y,....z) = 0,$$

relațiune care demonstrează teorema când $m \neq 0$.

*Notă.* Angajăm pe cititorii noștri să studieze în ce caz teorema e adevărată pentru $m = 0$.

Prezenta problemă a fost inspirată de următoarea teoremă a lui CAUCHY: *Mai multe funcțiuni simetrice de $x, y, \ldots z$ rămânând constante, o altă funcțiune simetrică de $x, y, \ldots z$ e maximă sau minimă, când variabilele $x, y, \ldots z$ sunt egale.*

ST. N. M.

PROBLEMA 2395. *Să se găsiască numerele triunghiulare patrate perfecte mai mici ca 10.000.*

I. LĂZĂRESCU.

I. *Soluțiune* dată de D-ra DUTZA KASSVAN și de D-nii: N. G. BOTEA, N. I. CIORĂNESCU, C. H. NICOLAU, O. ORĂNESCU, N. PINTILIESCU, E. V. PROTOPOPESCU, M. REINHORN, G. ROSENBERG și GR. TRIFESCU.

Numerele triunghiulare fiind de forma:

$$x(x+1)/2,$$

se cere să se rezolve în numere întregi, ecuațiunea:

$$(1) \qquad x(x+1)/2 = y^2 \quad , \quad y \leqslant 100.$$

*Cazul I.* $x$ par, adică $x = 2m$. Ecuațiunea (1), devine:

$$m(2m+1) = y^2 \quad , \quad m < 71.$$

Numerele $m$ și $2m+1$ fiind prime între ele, trebuiesc să fie ele însăși patrate perfecte. Aceasta ne conduce să căutăm pe $m$ printre patratele perfecte:

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49 \text{ și } 64,$$

ceeace dă, pentru $2m+1$, numerele:

$$3 \quad 9 \quad 19 \quad 33 \quad 51 \quad 73 \quad 99 \text{ și } 129.$$

Valorile simultane ale acestor 2 factori, compatibile problemei, sunt: $m = 4, \quad 2m+1 = 9, \quad y^2 = \frac{8 \times 9}{2} = 36 = 6^2.$

*Cazul II.* $x$ impar, adică $x = 2m+1$. Ecuațiunea (1), devine:

$$(2m+1)(m+1) = y^2, \qquad m \leqslant 70.$$

Aceasta ne conduce să căutăm pe $m+1$ printre patratele perfecte:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49 \text{ şi } 64,$$

ceeace dă, pentru $2m+1$, numerele:

$$1,\ 7,\ 17,\ 31,\ 49,\ 71,\ 97 \text{ şi } 127.$$

Valorile simultane ale acestor 2 factori, compatibile problemei, sunt:

$$m+1=1,\quad 2m+1=1,\quad y^2=1.2/2=1^2$$

$$m+1=25,\quad 2m+1=49,\quad y^2=50\times 49/2=35^2.$$

Problema admite deci, 3 soluţiuni:

*1, 36* şi *1225.*

II. *Soluţiune şi generalizare* dată de D-l: W. SOLOMON.

Realizantul ecuaţiunei (1), fiind:

$$1+8y^2,$$

este necesar şi suficient ca acel realizant să fie un pătrat perfect $z^2$ impar, căci $x$ trebue căutat printre valorile:

$$x=\frac{-1+\sqrt{1+8y^2}}{2}.$$

Această observaţiune ne conduce, mai întâi, să rezolvim în numere întregi ecuaţiunea:

$$z^2-8y^2=1, \tag{2}$$

ecuaţiune de tipul EULER-LAGRANGE:

$$z^2-Ay^2=B.$$

Ecuaţiunea (2) admiţând soluţiunea $z=3,\ y=1$, admite o infinitate de soluţiuni.

Se observă că cea mai mică valoare absolută posibilă a expresiunei $z^2-8y^2$ este 1, $(z^2\neq 8y^2)$, deci se poate aplică metoda indicată de D-l P. SERGESCU, («G. M.» XXVIII, pag. 353), ceeace ne conduce la următoarele valori, având în vedere dezvoltarea în fracţie continuă a lui $\sqrt{8}$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1, | 3, | 17, | 99, | 577, | 3363, | 19601, | 114243, | 665857 |
| $y$ | 0, | 1, | 6, | 35, | 204, | 1189, | 6930, | 40391, | 235416 |
| $x$ | 1, | 1, | 8, | 49, | 288, | 1681, | 9800, | 57121, | 332928 |

etc.

Primele soluțiuni ale problemei sunt deci numerele:

1, 363, 1225, 41616, 1413721, ..... etc.,

care se mai pot scrie respectiv sub forma:

$$\frac{1.2}{2}, \frac{8.9}{2}, \frac{49.50}{2}, \frac{288.289}{2}, \frac{1681.1682}{2}, \ldots\ldots \text{ etc.}$$

PROBLEMA 2428. *Să se găsiască patratele perfecte de 4 cifre, așà fel ca numărul format de primele două cifre, adunat cu numărul format de ultimele două cifre și scăzut a treia cifră a patratelor, să ne dea rădăcina lor patrată.*

G. GOROVEI.

Soluțiune dată de D-l N. P. ARCADIAN. Numerele căutate fiind de forma $a\,b\,c\,d$, trebue să avem:

$$1000\,a + 100\,b + 10\,c + d = (10\,a + b + 10\,c + d - b)^2.$$

Numerele căutate au deci rădăcina lor patrată de forma:

$10\,(a + c) + d$, care satisface dublei inegalități:

$$32 \leqslant 10\,(a + c) + d \leqslant 99.$$

Observând rădăcina patrată $10\,(a + c) + d$, vedem că ea se termină cu cifra $d$ ca și patratele $a\,b\,c\,d$. Aceasta însemnează că patratele perfecte căutate se vor termină neapărat cu 1, 5 sau 6. Deci $d = 1, 5, 6$. Rădăcinile patrate ce interesează chestiunea, trebuesc deci alese din următoarele 20 de numere: 41, 51, 61, 71, 81, 91, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 36. 46, 56, 66, 76, 86 și 96.

O analiză amănunțită ne dă soluțiunile problemei: 1225, 2025, 3025, 4225 și 5625.

*Notă.* D-nii: P. KATZ, ST. CODREANU, AL. și N. ZAHAREANU și V. PINTILESCU au rezolvat problema interpretând că a treia cifră a patratelor căutate este *c* și au dat soluțiunile: 1024, 1225, 4225, 4624 și 9801.

PROBLEMA 2902. *Să se studieze natura seriei, al cărui termen general e:*

$$u_n = \mathrm{L}\left[1 + \frac{n^x \operatorname{arctg} \frac{1}{n^p}}{\sqrt[q]{n+1}}\right],$$

p *și* q *fiind două numere oarecare.*

C. N. CAZACU.

Să calculăm limita expresiunii

$$\mathrm{E} = \varphi(n) = \frac{n^x \operatorname{arctg} \frac{1}{n^p}}{\sqrt[q]{n+1}}, \quad \text{pentru } n = \infty,$$

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{E} = \lim_{n=\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n^p}}{1/n^p} \cdot \frac{n^x}{\sqrt[q]{n+1}} \cdot \frac{1}{n^p} = \lim_{n=\infty} \frac{n^{x-p}}{\sqrt[q]{n+1}}.$$

Deosebim cazurile:

1) $x - p - 1/q < 0, \quad \lim \mathrm{E} = 0,$

2) $x - p - 1/q = 0, \quad \lim \mathrm{E} = 1,$

3) $x - p - 1/q > 0, \quad \lim \mathrm{E} = \infty.$

In cazurile 2) și 3), limita lui $u_n$ pentru $n = \infty$, fiind diferită de zero, seria e divergentă.

In cazul 1), $\varphi(n)$ având limita 0 pentru $n = \infty$, seria dată e de aceeași natură ca seria

$$\mathrm{V}_n = \varphi(n) = n^x \operatorname{arctg} n^{-p} / \sqrt[q]{n+1}.$$

(A se vedeà «Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie» par P. AUBERT & G. PAPELIER. Séries pag. 59).

Presupunem:

1) $p \leqslant 0$. Seria $V_n$ este de aceeaşi natură cu seria al cărui termen general e

$$V'_n = 1/(n^{\frac{1}{q}-x}),$$

căci $$\lim V_n / V'_n = \text{Const.},$$

deci seria este convergentă dacă

$$1/q - x > 1 \qquad \text{şi divergentă dacă} \qquad 1/q - x \leqslant 1.$$

2) $p > 0$ seria $V_n$ este de aceeaşi natură cu seria al cărui termen general este

$$V''_n = 1/(n^{\frac{1}{q}-x+p}),$$

deci seria este convergentă dacă

$$1/q - x + p > 1$$

şi divergenta dacă

$$1/q - x + p \leqslant 1.$$

Au rezolvat problema D-nii: GH. D. POPESCU şi LEON WEISS.

PROBLEMA 3042. *Insemnându-se simbolic:*

$$a = (n/3)^n \quad \text{şi} \quad b = (n/2)^n,$$

*să se arate că pentru* $n > 5$, *avem:*

$$(a/3)^a < n!! < (b/3)^b.$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Soluţie şi generalizare dată de D-l TIBERIU POPOVICI (absolvent de liceu — Arad).

Incercând, pentru $n < 5$, găsim:

$$n! > (n/2)^n,$$

iar pentru $n > 5$, ($n = 6, 7, 8$, etc.) găsim că:

1) $$n! < (n/2)^n.$$

Admitem însă că 1) este adevărată, atunci vom avea şi:

$$(n+1)! < ((n+1)/2)^{n+1}.$$

sau

$$n! < (n+1)/2^{n+1}.$$

Dacă însă avem:

$$(n/2)^n \leqslant (n+1)^n / 2^{n+1}$$

atunci 1) este demonstrat; ori, se vede uşor că:

$$2 \leqslant (1 + 1/n)^n$$

de oarece:

$$\lim_{n=\infty} (1 + 1/n)^n = e > 2.$$

Prin urmare, pentru $n > 5$ neegalitatea 1) este adevărată.
Deasemenea, prin încercări numerice, găsim că:

2) $$(n/3)^n < n!$$

Presupunem că această neegalitate este adevărată, atunci ar trebui să avem şi:

$$((n + 1)/3)^{n+1} < (n+1)!$$

sau:

$$(n+1)^n / 3^{n+1} < n!$$

Dacă însă vom avea:

$$(n+1)^n / 3^{n+1} \leqslant (n/3)^n$$

*a fortiori*, neegalitatea 2) va fi demonstrată. Vedem că ultima neegalitate se mai poate scrie:

$$(1 + 1/n)^n \leqslant 3.$$

Cum:

$$\lim_{n=\infty} (1 + 1/n)^n = e < 3$$

înseamnă că neegalitatea 2) este adevărată.

In rezumat dar, pentru $n > 5$, avem:

3) $$(n/3)^n < n! < (n/2)^n .$$

Dar, de oarece $n > 5$ deci $\frac{1}{3} n > 1$, atunci avem şi:

$$[(n/3)^n / 3]^{\binom{n}{3}^n} < (n!/3)^{n!}$$

şi:

$$[(n/2)^n / 2]^{\binom{n}{2}^n} > (n!/2)^{n!}$$

Ori, după 3), cu atât mai mult vom avea:

$$(a/3)^a < n!! < (b/2)^b ,$$

unde am notat:

$$a = (n/3)^n \text{ şi } b = (n/2)^n .$$

Dacă punem:

$$a_1 = (n/3)^n \text{ şi } b_1 = (n/2)^n$$

$$a_2 = (a_1/3)^{a_1} \text{ şi } b_2 = (b_1/2)^{b_1}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$a_{i+1} = (a_i/3)^{a_i} \text{ şi } b_{i+1} = (b_i/2)^{b_i} .$$

atunci avem în general:

$$(a_i/3)^{a_i} < \underbrace{n!!....!}_{i+1} < (b_i/2)^{b_i} .$$

*Notă.* Se ştie că, în Culegerea de Probleme de Aritmetică, avem:

$$n^n < n < ! ((n+1)/2)^n .$$

Am dat problema No. 3042, spre a restrânge intervalul acestei neegalităţi şi spre a permite chiar o generalizare uşoară, aşa cum ne-a trimis-o D-l Popovici.

In adevăr, pentru $n > 9$ avem:

$$n^n < (n/3)^n.$$

Iar pentru $n$ întreg şi pozitiv, avem:

$$(n/2)^n < ((n+1)/2)^n.$$

Deci, pentru $n < 9$, intervalul în care variază valoarea produsului $n!$ se restrânge mult, permiţându-ne astfel calculul valorilor numerice ale factorilor, atunci când numărul de sub factorială îmi este suficient de mare, spre a aplică formula lui STIRLING.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

PROBLEMA 3190. *Cum se poate mări sau micşorà săgeata traectoriei unui proectil tras de un tun, fără să-i schimbăm bătaia?*

Căpitan I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-l O. POPEA (cl. VIII, Ploeşti).

In vid, bătaia şi săgeata unui proectil tras de un tun cu viteza iniţială $v_1$ şi cu unghiul de tragere $\alpha_1$, sunt date de relaţiunile

$$X_1 = v_1^2 \sin 2\alpha_1/g \text{ şi } S_1 = v_1^2 \sin^2\alpha_1/2g.$$

Deci şi bătaia şi săgeata depind de două variabile: viteza iniţială şi unghiul de tragere.

Dacă schimbăm aceste variabile va trebui să avem:

$$X_2 = v_2^2 \sin 2\alpha_2/g \quad \text{şi} \quad S_2 = v_2^2 \sin^2\alpha_2/2g.$$

Dar $X_1 = X_2$, adică:

1) $$v_1^2 \sin 2\alpha_1 = v_2^2 \sin 2\alpha_2.$$

Prin urmare: pentru ca să mărim pe S, fără să shimbăm pe X, relaţia 1) ne arată că trebue să micşorăm *viteza iniţială* şi să mărim *unghiul de tragere* şi invers, aceste modificări făcute conform relaţiei 1).

*Notă.* In aer, relaţiunea 1) nu se mai menţine în mod exact, totuşi, concluziunile, adică „modificarea vitezei într'un sens şi unghiului de tragere în alt sens, aduce o modificare a săgeţei fără a schimbà bătaia", se menţine. In

plus însă, în aer mai intervine *rezistența aerului*, care în cazul proectilelor se judecă după *coeficientul balistic*.

Ori, din *Balistica exterioară*, se știe că dacă $c$ se mărește, traectoria se curbează micșorându-se bătaia și invers, dacă $c$ se micșorează. Așă dar, dacă vom mări pe $c$, spre a nu schimbă bătaia, atunci mărim pe $v_0$ sau pe $\alpha$ și se va mări săgeata. Invers, când micșorăm pe $c$.

In rezumat, în aer, săgeata se va mări când:

| $v_0$ | $\alpha$ | $c$ |
|---|---|---|
| mări | — | mări |
| — | mări | mări |
| micșorà | mări | — |

Relațiunile analitice, care ne dau exact legăturile dintre $v_0$, $\alpha$ și $c$, sunt date de către *Balistica Exterioară*.

Căpitan I. L.

---

PROBLEMA 3243. *Să se demonstreze că, dacă* p *este un număr nepereche, iar* $n \neq 0$, *atunci numărul*

$$p^{m2^n} - 1$$

*se divide prin* $2^{n+2}$.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: N. BOTEA, M. O. SCHÄCHTER, A. TAUBER, I. POPA, C. CIORĂNESCU, R. SPATHY, I. A. SCHÄCHTER, C. GIURUMESCU, V. GEORGESCU, S. WEISS, I. C. VASILIU, C. C. POPESCU, A. NOVAC, M. POPOVICI, GH. CĂLIN, V. DORNEANU, V. VÂRLAN, A. FLOREA, P. I. IONESCU, L. BRÜLL, V. LEPĂDATU și E. GEORGESCU.

Avem succesiv

$$p^{m2^n} - 1 = (p^{m2^{n-1}} + 1)(p^{m2^{n-1}} - 1) = (p^{m2^{n-1}} + 1)(p^{m2^{n-2}} + 1) \times (p^{m2^{n-2}} - 1),$$

de unde se deduce, din aproape în aproape

$$p^{m2^n}-1=(p^{m2^{n-1}}+1)(p^{m2^{n-2}}+1)\ldots(p^{m2}+1)(p^m+1)(p^m-1).$$

Primii $(n-1)$ factori fiind perechi, produsul lor se divide prin $2^{n-1}$. Ultimii 2 factori fiind numere perechi consecutive, au produsul divizibil prin $2^3$. Deci numărul dat se divide prin

$$2^{n-1}.2^3=2^{n+2}.$$

*Observaţiuni.* 1°. D-l C. Ciorănescu anunţă că chestiunea ar fi cunoscută şi s'ar găsi în *Revista de matematicas y fisicas elementales*, Vol. III, pag. 166.

2°. D-l M. O. Schächter arată că dacă $m+1$ este prim, atunci numărul dat se divide cu $(m+1)\,2^{n+2}$.

3°. D-l M. O. Schächter arată că expresiunea dată se divide şi prin $(p-1)/2$.

4°. D-l I. Popa arată că, în *Foaia Matematică* No. 11, dela 1 noemvrie 1924, D-l L. Weiss a propus problema 129 cu enunţ analog problemei 3243 şi anume

*Dacă* a *şi* b *sunt de aceeaşi paritate, atunci*

$$a^{2^{n+1}}-b^{2^{n+1}}=M2^{n+1}.$$

Problema 3243 s'a propus în decemvrie 1924, deci este ulterioară problemei D-lui L. Weiss.

5°. In cursul demonstraţiei, s'a arătat că primii $n-1$ factori în care se descompune numărul dat sunt perechi şi deci acel număr se divide cu $2^{n-1}$. Se poate însă spune că produsul acelor $n-1$ factori se divide cel puţin cu $2^{n-1}$ şi atunci enunţul problemei 3243 poate fi formulat şi astfel: *Numărul*

$$p^{m2^n}-1,$$

*conţine factorul 2 la o putere egală sau mai mare cu* $n+2$, *când* $n\neq 0$, *iar* p *este nepereche.*

Gh. B.

---

# EXERCIŢII

81. Care sunt patratele mai mici ca 10000, care se scriu cu cifre de numere prime?

A. Stoica.

R. Printre numerele de o cifră avem pe 1. Ultimele două cifre ale patratelor alcătuite numai cu cifre prime sunt 21 şi $25=5^2$, care este deci o soluţie. Inaintea acestora scriem, una din cifrele 1, 2, 3, 5, 7 aşà ca numărul

să nu iasă $\mathcal{M}.3+2$ sau $\mathcal{M}.3$ si un $\mathcal{M}.9$, sau să iasă $\mathcal{M}.11+2, 6, 7, 8, 10$. Găsim numai $121 = 11^2$ şi $225 = 15^2$. Analog, găsim pentru cele de patru cifre $3721 = 61^2$ şi $1521 = 39^2$.

82. Ce numere, împărţite cu 2, 4, 4, 5, 6, 7, dau resturile 1, 2, 3, 4, 5, 0 ?

G. David.

R. Fie $7n$ numărul cerut. Numărul $(7n+1)$ se divide cu 2, 3, 4, 5, 6 deci cu cel mai mic comun multiplu al lor, care este 60. Deci:

$$7n+1 = 60m \quad ; \quad n = 8m + (4m+1)/7 = 8m + p,$$
$$m = (7p+1)/4 = 2p - (p-1)/4 \quad , \quad p = 49 + 1$$
$$m = 2p - q = 7q + 2 \quad , \quad n = 60q + 17$$
$$7n = 420q + 119.$$

Cel mai mic este 119.

83. Se cere numărul de două cifre, la care produsul sporit cu suma şi cu diferenţa cifrelor, dă patratul ultimei cifre.

I. Foca.

R. Fie $zu$ numărul căutat. Avem:

$$z \geqslant u \qquad u^2 = z.u + z + u + z - u = z(u+2),$$

care cere $z < u$, contrar ipotezei, şi

$$z < u \qquad u^2 = z.u + z + u + u - z = u(z+2),$$

care dă $u = 0$ şi $u = z + 2$. Deci avem toate numerele de două cifre terminate cu 0 şi apoi numerele 13; 24; 35; 46; 57; 68; 79.

84. Să se demonstreze că în patrulaterele inscriptibile în care produsul a două laturi opuse este egal cu produsul celorlalte două, diagonalele lui sunt simedianele triunghiurilor formate din câte o diagonală şi două laturi ale patrulaterului considerat.

I. Ionescu-Brezuica.

R. Presupunem că patrulaterul inscriptibil ABCD se bucură de proprietatea AD.BC = AB.DC.

Fie E punctul de intersecţie al diagonalelor.

După o prea cunoscută teoremă, avem:

$$EB/ED = AB.BC/AD.DC$$

$$EA/EC = AB.AD/BC.CD.$$

Inmulţind şi împărţind pe fiecare din aceste egalităţi, cu AD.BC/AB.CD = 1 obţinem:

$$\overline{EB}/\overline{ED} = \overline{AB^2}/\overline{AD^2} = \overline{BC^2}/\overline{CD^2}$$
$$\overline{EA}/\overline{EC} = \overline{AB^2}/\overline{BC^2} = \overline{AC^2}/\overline{DC^2}.$$

85. In ce caz fracţia

$$\frac{7x+9y}{(z+2)x+zy}$$

se reduce la un intreg.

E. Ştefănescu.

R. Se vede că $z < 10$, căci altfel fracţia este sub 1.
Punând fracţia egală cu $t$, scoatem:

$$\frac{x}{y} = \frac{9-tz}{(z+2)t-7}.$$

Dăm lui $z$ valorile 1, 2, .... 9 şi alegem $t$ aşà ca termenii fracţiei să fie pozitivi. Găsim:

$$\begin{cases} z = 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 2, & 2, & 2, & 3, & 4, \\ x = 3n, & n, & n, & 3n, & n, & n, & 5n, & 3n, & n, & n, & n, \\ y = n, & n, & 2n, & 11n, & 7n, & 17n, & n, & 5n, & 9n, & n, & 5n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 6, & 7, & 8, \\ x = 3n, & n, & n, \\ y = n, & n, & 3n. \end{cases}$$

Se mai pot găsi $z = 3$, $x = 0$, $y = n$; $z = 5$, $x = n$, $y = 0$, $z = 9$, $x = 0$, $y = n$.

86. Pentru ce valoare a lui $p$, vom avea:

$$\lim_{x=0} \sqrt{\frac{\sin^3 x - \cos x + 1}{x^p}} = \cos \tfrac{1}{4}\pi.$$

Gh. P. Bogdan.

R. Dezvoltând în serie $\sin^3 x$ şi $\cos x$, vom avea:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}x^2\left[\frac{x}{3!}(3^2-1) - \frac{x^3}{5!}(3^4-1)....\right]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + .....$$

Înlocuind în expresia dată, ea devine:

$$\lim_{x=0} \sqrt{\frac{\frac{3}{5}\left[\frac{x}{3!}(3^2-1)...\right] + \frac{1}{2} - \frac{x^3}{4!} + ...}{x^{p-2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \tfrac{1}{4}\pi,$$

în cazul când $p = 2$.

Cu ajutorul regulei lui HÔPITAL, obţinem un rezultat identic.

87. Să se arate că asimptotele curbei

$$y^3 - x^2 y - 2xy + x = 0$$

sunt concurente.

LT. COLONEL GH. LITEANU.

R. Grupul de termeni de gradul cel mai înalt dă direcţiile asimptotice

$$0 \ , \ 1 \ , \ -1;$$

şi căutând, după metoda generală, asimptotele corespunzătoare, se obţin dreptele

$$y = 0 \quad , \quad y - x - 1 = 0 \quad \text{şi} \quad y + x + 1 = 0,$$

care se întâlnesc în punctul de coordonate —1 şi 0.

## PROBLEME PROPUSE

3321. Se cer cuburile mai mici ca un milion care să fie produsul a două numere diferind cu 2.

I. I. GEORGESCU RACOVIŢĂ.

3322. Dacă $u_m$ şi $u_n$ sunt termeni ai şirului lui FIBONACCI, în ce caz avem:

$$u_{m+n} = u_m + u_n \ ?$$

3323. La un ceasornic secundarul are dela centrul lui la vârf 5 mm.; minutarul 20 mm. şi orarul 15 mm. In cât timp vârfurile lor parcurg 1 km.?

Rezultatele se vor da cu o aproximaţiune de 1 secundă.

I. IONESCU.

3324. Să se arate că dacă: $A_1$, $A_2$, $A_3$..... $A_{p-1}$ sunt coeficienții dezvoltării produsului:

$$(x+1)\ (x+2).....(x+p-1)$$

atunci avem:

$$1 + A_1 + A_2 + ..... + A_{p-1} = \mathcal{M}_p .$$

Să se generalizeze.

CĂP. I. LINTEȘ.

3325. Fie (A', A''), (B', B''), (C', C'') proiecțiile vârfurilor A, B, C respectiv pe perechile de laturi ($A_1B_1$, $A_1C_1$), ($B_1C_1$, $B_1A_1$), ($C_1A_1$, $C_1B_1$) ale triunghiului complimentar $A_1B_1C_1$. Perpendicularele duse în A,B,C pe medianele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ taie aceleași perechi de laturi respectiv în punctele ($A_2$, $A_3$), ($B_2$, $B_3$), ($C_2$, $C_3$). Fie punctele $M \equiv (AA', A''A_2)$, $N \equiv (AA'', A'A_3)$, $P \equiv (BB', B''B_2)$, $Q \equiv (BB'', B'B_3)$, $R \equiv (CC', C''C_2)$, $S \equiv (CC'', C'C_3)$. Dreptele MN, PQ, RS formează prin intersecția lor un triunghiu $A_4B_4C_4$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $A_4B_4C_4$ sunt ortologice.

M. I. FOCȘENEANU.

3326. Să se demonstreze că funcțiunea

$$y = \log_x a$$

este continuă pentru toate valorile lui $x$, afară de una.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU.

3327. In orice triunghiu avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cotg}A + \operatorname{tg}2A & \operatorname{cotg}A \operatorname{tg}2A \\ 1 & \operatorname{cotg}B + \operatorname{tg}2B & \operatorname{cotg}B \operatorname{tg}2B \\ 1 & \operatorname{cotg}C + \operatorname{tg}2C & \operatorname{cotg}C \operatorname{tg}2C \end{vmatrix} = 0.$$

M. GRÜNBAUM.

3328. Care e înfășurătoarea dreptei ce unește polurile unei drepte, ce trece printr'un punct fix, în raport cu două conice fixe din plan.

VALERIU MANAFU.

3329. Fiind dată lemniscata lui BERNOULLI :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

să se găsiască o curbă C de ordinul al patrulea, astfel ca un punct depe iperbola echilateră

$$x^2 - y^2 = a^2$$

să aibă puteri egale față de cele două curbe.

M. GHERMĂNESCU.

3330. Să se găsiască integrala generală a ecuației diferențiale

$$xy'' - 2y' - xy = 0,$$

exprimată cu ajutorul funcției exponențiale.

A. ANGELESCU.

# TABLA DE MATERII

## A. ARTICOLE.

### Aritmetica.


| | | Pag. |
|---|---|---|
| *Emil Ştefănescu.* | Patrate decapitate . . . . . | 205, 245, 365 |


### Geometria.


| | | |
|---|---|---|
| *G. I. Dumitrescu.* | Asupra triomologiei şi triortologiei . . . . . | 46 |
| *G. I. Dumitrescu.* | Asupra unei teoreme a lui Pappus . . . . . | 128 |
| *M. Grünbaum.* | Două triunghiuri importante . . . . . | 166 |
| *N. Blaha.* | Proprietăţi importante ale triunghiului . . . . | 241 |
| *C. H. Nicolau.* | Asupra unor cercuri remarcabile din triunghiu | 406, 446 |


### Algebra.


| | | |
|---|---|---|
| *Leonida A. Penenjchevici.* | Asupra ecuaţiei pitagorice $Z^2=X^2+Y^2$ . . . . | 14, 89 |
| *Th. Angheluţă.* | Aşezarea în ordine naturală a rădăcinilor a două ecuaţii, una de gradul al treilea şi una de gradul al doilea . . . . . | 82 |
| *A. Angelescu.* | Asupra relaţiilor de recurenţă lineare omogene şi coeficienţi constanţi . . . . . | 161 |


### Mecanica.


| | | |
|---|---|---|
| *G. Zapan.* | Problema simultaneităţii . . . . . | 361, 441 |


### Analiza.


| | | |
|---|---|---|
| *Th. Angheluţă.* | Calculul unei clase de integrale definite . . . . | 41 |
| *Victor Vâlcovici.* | Asupra unei inegalităţi . . . . . | 281 |


### Diverse.


| | | |
|---|---|---|
| *Ion A. Beleş.* / *Ioan Buşilă.* | Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice“ . . . . . | 12 |
| *Delegaţia Societăţii.* | Concursul „Gazetei Matematice“ . . . . . | 91 |
| *Delegaţia Societăţii.* | Premiul „Vasile Conta“ . . . . . | 92 |
| *P. Sergescu.* | Cursuri de matematică în Paris, în anul şcolar 1923—1924 . . . . . | 121 |

| | | Pag. |
|---|---|---|
| *Ing. Şef C. D. Orăşanu.* | Chestiunea calendarului | 201, 324 |
| *Tr. Lalescu, Maior Gh. I. Liteanu, M. Ghermănescu.* | Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 Septembrie 1923 — 1 Septembrie 1924 | 252 |
| *Maximilian Marcus.* | Asupra sărbătorii Paştelui | 288 |
| *G. Ţiţeica.* | Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice“ din anul 1925 | 322 |
| *N. Abramescu, A. Angelescu şi G. Bratu* | Premiul „Inginer H. Capriel“. (Subiectul propus) | 328 |
| *Delegaţia Societăţii.* | Premiile „Gazetei Matematice“ pentru concursul ţinut în anul 1924 | 373 |
| * * * | † Anghel Saligny | 401 |


## B. NOTE MATEMATICE.


| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | *I. Ionescu.* | Zece Matematici diverse | 18 |
| 2. | *G. I. Grofşoreanu.* | Asupra calculării sumei puterilor asemenea a primelor $n$ numere | 19 |
| 3. | *M. Adam.* | Asupra problemei 684 | 19 |
| 4. | *M. Adam.* | Asupra unor identităţi | 20 |
| 5. | *I. Ionescu.* | Alte zece Matematici diverse | 50 |
| 6. | *E. Ştefănescu.* | Asupra problemei 3051 | 50 |
| 7. | *Căpitan I. Linteş.* | O rectificare | 50 |
| 8. | *V. Cristescu, Const. I. Georgescu* | Asupra problemei 2411 | 51 |
| 9. | *I. Ionescu.* | Alte zece Matematici diverse | 93 |
| 10. | *Popa Ilie, I. Ionescu.* | Asupra notei 72 din Anul XXIX | 93 |
| 11. | *Tiberiu Popovicu.* | Asupra problemei 3124 | 94 |
| 12. | *Marin Ştefan.* | Asupra unor chestiuni de limită | 94 |
| 13. | *Traian N. Angelescu.* | Generalizarea unei identităţi | 96 |
| 14. | *David Gheorghe.* | Asupra patratelor numerelor de forma 111....11 | 97 |
| 15. | *Gh. D. Popescu-Botoşani.* | Asupra unei integrale definite | 97 |
| 16. | *I. Ionescu.* | Alte zece Geometrii diverse | 131 |
| 17. | *C. T. Ionescu-Bujor.* | Asupra unor patrate | 131 |
| 18. | *Emil Ştefănescu.* | O proprietate a şirului lui Fibonacci | 132 |
| 19. | *Armand Lerner.* | Demonstrarea unei proprietăţi a parabolei | 132 |
| 20. | *Solomon Weiss.* | Asupra problemei 1889 | 133 |
| 21. | *Focşeneanu I. Mihail.* | Asupra unui exerciţiu | 133 |
| 22. | *Lt.-Col. Gh. Buicliu.* | Problema schimbării axelor de coördonate | 134 |
| 23. | *Căpitan I. Linteş.* | Asupra unei teoreme de analiză | 135 |
| 24. | *Leon Weiss.* | Asupra formulei lui Leibnitz | 136 |
| 25. | *I. Ionescu.* | Alte zece algebre | 170 |
| 26. | *Marin Ştefan.* | Asupra unor sume | 171 |
| 27. | *Lt.-Col. Gh. Buicliu.* | Asupra problemelor 682 şi 2753 | 171 |
| 28. | *Marin Ştefan.* | Asupra unei proprietăţi a dreptei lui Simson | 174 |
| 29. | *M. G.* | Asupra unei identităţi trigonometrice | 174 |
| 30. | *Ion C. Vasiliu, V. Cristescu.* | Generalizarea notei 53 din G. M., Vol. XXVIII, pag. 288 | 175 |
| 31. | *P. Sergescu.* | Asupra notei 23 | 176 |
| 32. | *I. Ionescu.* | Zece analize diverse | 210 |
| 33. | *Căpitan I. Linteş.* | O generalizare elementară a teoremei lui Fermat | 210 |
| 34. | *Lt.-Col. Gh. Buicliu.* | Asupra exerciţiului 20 | 211 |

| | | Pag. |
|---|---|---|
| 35. *Lt.-Col. Gh. Buicliu.* | Impărţirea unui unghiu in 3 părţi egale | 212 |
| 36. *F. Dobrescu-Băbici.* | Asupra distanţei dintre ortocentrul şi centrul circumscris | 213 |
| 37. *Ion Coşereanu.* | Asupra problemei 2642 | 213 |
| 38. *V. Cristescu.* | Asupra notei 19, dela pag. 132 | 214 |
| 39. *I. Ionescu,* | Zece feluri de calcul | 254 |
| 40. *I. Ionescu.* | Origina cifrelor romane V şi X | 254 |
| 41. *A. C. Mladenovici.* | Un tablou numeric | 255 |
| 42. *A. Tauber.* | Generalizarea problemei 3094 | 255 |
| 43. *Lt.-Col. Gh. Buicliu.* | Reciproca problemei 3204 | 256 |
| 44. *M. Adam.* | Generalizarea problemei 2538 | 256 |
| 45. *A. Angelescu, M. Gh.* | Asupra notei 85 din G. M. Vol. XXIX pag. 453 | 258 |
| 46. *I. Ionescu.* | Alte zece analize diverse | 294 |
| 47. *I. I. Georgescu-Racoviţă.* | Asupra unor patrate | 294 |
| 48. *S. Weiss.* | Suma puterilor asemenea ai termenilor şirului lui Fibonacci | 294 |
| 49. *Căpitan I. Linteş.* | Asupra indicatorilor de ordin superior | 295 |
| 50. *Ion C. Vasiliu.* | Asupra triunghiului automedian | 297 |
| 51. *Micu Grünbaum.* | Asupra teoremei lui Aubert | 298 |
| 52. *Dan Popoviciu-Puiu, Valeriu Manafu.* | Asupra problemei 3217 | 299 |
| 53. *A. Angelescu,* | Definirea funcţiunilor de variabilă complexă | 300 |
| 54. *I. Ionescu.* | Alte zece feluri de Calcul | 329 |
| 55. *W. I. Solomon.* | Generalizarea problemei 2964 | 329 |
| 56. *A. B. Reinhorn.* | Asupra şirului lui Fibonacci | 329 |
| 57. *I. I. Georgescu-Racoviţă.* | Asupra exerciţiului 27 | 330 |
| 58. *S. Katz.* | Asupra şirului lui Lamé | 330 |
| 59. *Mircea I. Adam.* | Asupra unor relaţiuni trigonometrice | 330 |
| 60. *N. Abramescu.* | Asupra distanţei dintre două tangente infinit vecine ale unei curbe strâmbe | 332 |
| 61. *Nicolae Ciorănescu.* | Asupra inegalităţei lui Schwartz | 334 |
| 62. *I. Ionescu.* | Alte zece feluri de Calcul | 375 |
| 63. *Colonel C. Felix.* | Asupra numerelor pitagorice | 376 |
| 64. *Căpitan I. Linteş.* | Asupra indicatorilor | 377 |
| 65. *O. Popea.* | Asupra notei 87, din G. M. Vol. XXVIII | 379 |
| 66. *B. M. Barbălatt.* | Asupra unor inegalităţi trigonometrice | 380 |
| 67. *I. Ionescu.* | Alte zece trigonometrii diverse | 415 |
| 68. *Tailer George.* | Asupra unor probleme cu enunţul supra abundent | 416 |
| 69. *O. Popea.* | Asupra notei 42, Vol. XXIX pag. 213 | 417 |
| 70. *Th. Angheluţă.* | Transformarea expresiei $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. | 417 |
| 71. *M. Adam.* | Generalizarea problemei 3156 | 418 |
| 72. *I. Ionescu.* | Alte zece aritmetici diverse | 450 |
| 73. *G. Tailer.* | Câtevă probleme de divizibilitate | 451 |
| 74. *Marin Ştefan.* | Asupra problemei 1678 | 454 |
| 75. *Căpitan I. Linteş.* | O extindere asupra factorialelor | 454 |
| 76. *Gh. D. Popescu-Botoşani.* | Flambajul barelor tronconice | 456 |


## C. CHESTIUNI DE EXAMEN.


| | | |
|---|---|---|
| *Facultatea de Ştiinţe din Cluj* | Examenele din Iunie 1924 | 136,176 |
| *Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti* | Examenul de Algebră din Octomvrie 1924 | 215 |

| | | Pag. |
|---|---|---|
| *Facultatea de Ştiinţe din Cluj* | Examenele din Octomvrie 1924 | 215,258,301 |
| *Gazeta Matematică* | Concursul din 1925 | 337 |
| *Facultatea de ştiinţe din Cluj* | Concurs de bursă pentru trimiterea în străinătate al unui licenţiat pentru studiul fizicei matematice | 383 |
| *Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti* | Examenul parţial şi general de Algebra superioară | 423 |
| *Şcoala Politechnică din Bucureşti* | Examen parţial şi general de Geometrie analitică (1925) | 461 |


## D. BIBLIOGRAFII.


Foaia matematică . . 22, 53, 102, 139, 181 217, 261, 306, 335, 381, 421, 460
Revista matematică din Timişoara . . 22, 53, 102, 140, 218, 306, 381, 421, 460
*Ioan Dumitriu.*— Exerciţii şi probleme de algebră elementară . . . . . 22
Journal de Mathématiques Elémentaires53, 139, 181, 261, 306, 335, 381, 421, 460
Revista artileriei . . . . . 53, 102, 261
*P. Sergescu.*—Sur quelques inégalités de M. M. LANDAU et LINDELÖF concernant les fonctions monogènes . . . . . 53
*Societatea ştiinţifică Argentina.*—Catalogul publicaţiilor ce se primesc în schimbul Analelor date . . . . . 53
Almanahul Ştiinţei 1924 . . . . . 53
Buletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine . . . 101, 305, 420
*Societatea română de Ştiinţe.*—Buletinul de ştiinţe matematice pure şi aplicate . . . . . 101, 306
Bulletin of the American mathematical Society . . . . . 101, 260, 421
Anales de la Sociedad cientifica Argentina . . . . . 102, 335, 460
*I. Ionescu.*—Reforma calendarului . . . . . 102
*Ernest Abason*—Exerciţii de mecanică . . . . . 102
Viaţa Şcolară . . . . . 140, 261
*G. Dumitrescu.*—Distanţele cereşti şi structura universului . . . . . 140
*Traian Lalescu.*—Calulul algebric. Polinoame. Fracţiuni raţionale . . . 140
*E. Bally.*—Géometrie synthetique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre . . . . . 179
Oeuvres de G. H. Halphen . . . . . 179
*S. Lefschetz.*—L'Analysis situs et la géometrie algèbrique . . . . . 180
*L. Rougier.*—La matière et l'énergie . . . . . 180
*Societatea română de ştiinţe.*—Buletinul de ştiinţe fizice . . . . . 181
*G. Naneş.*—Projèt de calendrier théorique et pratique . . . . . 181
*Dr. E. Cech.*—Sur les surfaces qui admettent $\infty^1$ déformations projectives en elles mêmes . . . . . 218
*B. Hostinsky.*—Les fonctions fondamentales du problème de Dirichlet . 218
*Dr. E. Cech.*—Courbes tracées sur une surface dans l'espace projectiv l. 218
*T. Kauchy.*—Teoria ecuaţiilor anexe cu diferenţe finite . . . . . 218
*Dr. T. Sahanek.*— Asupra undelor herţiene emise de un arc electric 218
*O. Borusska.*—Asupra unor tipuri de suprafeţe, care sunt proectiv aplicabile pe ele însăşi . . . . . 218
American Mathematical Society . . . . . 261
Mathesis . . . . . 261, 306, 335, 421, 460
Jurnal Matematic . . . . . 261, 336, 381
Curierul Matematic . . . . . 306, 336, 381, 421, 460
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" . . . . . 306
*P. Sergescu.*—Un problème sur les compositions des noyaux symetriques 306
*J. Neuberg.*—Sur les cubiques de Darboux, de Lemoine et de Thomsohn 306

Pag.

*Stanislas Millot.*—Théorie nouvelle de la probabilité des causes . . . 336
*G. Verriest.*—Cours de mathématiques générales . . . . . 336
*V. Vâlcovici*—Sur une note de M. O. Onicescu concernant les zéros de $\xi(s)$ 336
*A. Angelescu.*—Determination de certaines courbes par des ensemble discrets de points . . . . . 382
*A. Angelescu.*—Sur les polynomes hypergéométriques . . . . . 382
*A. Lafay.*—Notations et formules vectorielles . . . . . 382
Memorial des Sciences mathématiques . . . . . 382
*General Scarlat Panaitescu.*—Astronomie populară . . . . . 382
*J. Bosmans.*—Le géomètre Jérome Saccheri, S. J. (1667—1773) . . . . 421
*E. Borel.*—Calcul de probabilités . . . . . 422
*E. Borel.*—Mécanique statistique classique . . . . . 422
*N. Abramescu.*—Sur les courbes de convergence des séries procédant suivant les inverses des polynomes donnés . . . . . 460
*V. Thébault.*—Contributions à la géométrie du triangle et du tétraèdre 460
*Ad. Mineur.*—Géomètrie analytique dans l'ecpace . . . . . 460

## E. CERERI.

| *No. cererii* | *Pagina la care a fost:* | |
|---|---|---|
| | Propusă | Dat răspuns |
| 90 . . . . | 397 (XXVII) | 54 |
| 110 . . . . | 339 (XXIX) | 181 |
| 115 . . . . | 22 | |
| 116 . . . . | 102 | |
| 117 . . . . | 102 | |
| 118 . . . . | 140 | |
| 119 . . . . | 218 | |
| 120 . . . . | 261 | |

| *No. cererii* | *Pagina la care a fost:* | |
|---|---|---|
| | Propusă | Dat răspuns |
| 121 . . . . | 306 | |
| 122 . . . . | 306 | |
| 123 . . . . | 337 | |
| 124 . . . . | 383 | |
| 125 . . . . | 423 | |
| 126 . . . . | 423 | |
| 127 . . . . | 461 | |

## G. PROBLEME PROPUSE.

### *a)* Repartizarea problemelor propuse după materii.

| | |
|---|---|
| *Aritmetica.* | 3211, 3212, 3213, 3221, 3222, 3231, 3232, 3233, 3241, 3242, 3243, 3251, 3252, 3253, 3261, 3262, 3263, 3271, 3272, 3273, 3281, 3282, 3283, 3291, 3292, 3293, 3301, 3311, 3312, 3321, 3322, 3323, 3324. |
| *Geometria.* | 3214, 3215, 3223, 3224, 3225, 3234, 3235, 3236, 3244, 3245, 3246, 3254, 3255, 3256, 3264, 3270, 3274, 3275, 3276, 3284, 3285, 3286, 3294, 3295, 3296, 3297, 3305, 3306, 3307, 3314, 3315, 3316, 3320, 3325. |
| *Algebra.* | 3216, 3226, 3227, 3228, 3237, 3238, 3248, 3249, 3250, 3257, 3258, 3259, 3260, 3267, 3268, 3269, 3277, 3278, 3279, 3287, 3288, 3298, 3302, 3303, 3308, 3313, 3317, 3326, 3327. |
| *Trigonometria.* | 3217, 3218, 3247, 3265, 3266, 3280, 3289, 3299, 3304, 3309, 3318, 3319. |
| *Geometria analitică.* | 3219, 3229, 3239, 3328, 3329. |
| *Mecanica.* | 3220, 3230, 3240, 3290, 3300, 3310. |
| *Analiza.* | 3330. |

*b)* **Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată.**

| No. problemei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 171 | 76 (II), 198 (XVI) | NR |
| 485 | 104 (V), 198 (XVI) | NR |
| 581 | 148 (VI), 51 (XI), 238 (XVI) | NR |
| 585 | 172 (VI), 238 (XVI) | |
| 676 | 148 (VII) | |
| 691 | 196 (VII), 278 (XVI) | NR |
| 766 | 124 (VIII), 319 (XVI) | |
| 825 | 288 (VIII), 358 (XVI) | |
| 886 | 172 (IX) | NR |
| 887 | 172 „, 358 (XVI) | NR |
| 914 | 267 (IX) | NR |
| 944 | 52 (X) | NR |
| 1000 | 220 (X), 438 (XVI) | NR |
| 1008 | 244 (X), 462 (XVI) | NR |
| 1056 | 100 (XI) | NR |
| 1058 | 100 „ | NR |
| 1083 | 172 „ | NR |
| 1092 | 196 „ | NR |
| 1146 | 76 (XII) | NR |
| 1156 | 100 „ | |
| 1162 | 124 „ | NR |
| 1178 | 172 „ | NR |
| 1180 | 172 „ | NR |
| 1188 | 228 „ | |
| 1214 | 296 „ | NR |
| 1236 | 64 (XIII) | NR |
| 1270 | 192 „ | NR |
| 1271 | 192 „ | NR |
| 1287 | 256 „ | NR |
| 1297 | 288 „ | NR |
| 1299 | 319 „ | NR |
| 1307 | 320 „ | |
| 1310 | 352 „ | |

| No. problemei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 1333 | 32 (XIV), 198 (XVIII) | |
| 1342 | 64 (XIV) | |
| 1343 | 64 „ | |
| 1355 | 96 „ | NR |
| 1364 | 128 „ | NR |
| 1367 | 128 „ | NR |
| 1377 | 160 „ | NR |
| 1379 | 160 „ | NR |
| 1384 | 191 „ | NR |
| 1386 | 192 „ | NR |
| 1398 | 224 „ | NR |
| 1399 | 224 „, 200 (XVI) | NR |
| 1412 | 256 (XIV) | NR |
| 1424 | 228 „ | |
| 1434 | 320 „ | NR |
| 1450 | 352 „ | NR |
| 1482 | 64 (XV) | NR |
| 1489 | 96 „ | |
| 1497 | 128 „ | |
| 1500 | 128 „ | |
| 1511 | 160 „ | |
| 1533 | 224 „ | |
| 1534 | 224 „ | |
| 1553 | 288 „ | NR |
| 1563 | 320 „ | |
| 1564 | 320 „ | |
| 1576 | 352 „ | |
| 1577 | 352 „ | |
| 1584 | 372 „, 158 (XX) | NR |
| 1587 | 372 (XV) | NR |
| 1591 | 39 (XVI) | |
| 1608 | 80 „ | 181 |
| 1626 | 159 „ | NR |
| 1632 | 159 „ | |
| 1637 | 160 „ | NR |
| 1650 | 200 „ | NR |
| 1656 | 239 „ | |
| 1676 | 279 „ | NR |
| 1679 | 280 „ | NR |
| 1690 | 320 „ | |
| 1702 | 360 „ | |
| 1711 | 399 „ | |

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecției, s. ex. 172 (VI), înseamnă că problema 585 a fost propusă la pag. 172 din volumul VI; problemelor mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunțul, s. ex: problema 585 s'a mai publicat la pag. 238 vol XVI.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu e trecut niciun număr, redacția posedă soluțiuni bune care nu au fost încă publicate.

| No. problemei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1] | | Rezolvată [2] |
|---|---|---|---|
| 1729 | 440 | (XVI) | NR |
| 1733 | 463 | „ | NR |
| 1734 | 463 | „ | |
| 1735 | 464 | „ | NR |
| 1753 | 80 | (XVII) | NR |
| 1764 | 120 | „ | NR |
| 1773 | 160 | „ | |
| 1878 | 199 | „ | |
| 1782 | 200 | „ | |
| 1790 | 240 | „ | |
| 1799 | 280 | „ | |
| 1807 | 320 | „ | |
| 1823 | 400 | „ | |
| 1831 | 439 | „ | |
| 1835 | 440 | „ | |
| 1840 | 466 | „ | |
| 1858 | 78 | (XVIII) | |
| 1876 | 119 | „ | NR |
| 1882 | 120 | „ | NR |
| 1884 | 158 | „ | NR |
| | 200 | „ | |
| 1891 | 160 | „ | 218 |
| 1892 | 160 | „ | |
| 1898 | 199 | „ | |
| 1905 | 200 | „ | NR |
| 1906 | 200 | „ | NR |
| 1911 | 239 | „ | |
| 1914 | 239 | „ | NR |
| | 280 | „ | |
| 1922 | 278 | „ | |
| 1929 | 279 | „ | NR |
| 1933 | 280 | „ | |
| 1934 | 280 | „ | |
| | 320 | „ | |
| 1937 | 318 | „ | |
| 1944 | 319 | „ | NR |
| 1945 | 320 | „ | |
| 1948 | 358 | „ | |
| 1949 | 358 | „ | NR |
| 1958 | 359 | „ | |
| 1959 | 360 | „ | NR |
| 1968 | 399 | „ | |
| 1969 | 399 | „ | |
| 1973 | 400 | „ | |
| | 461 | „ | |
| 1976 | 431 | „ | |
| 1979 | 431 | „ | NR |
| 1983 | 432 | „ | |
| 1986 | 462 | „ | 261 |
| 1987 | 462 | „ | NR |
| 1991 | 38 | (XIX) | |
| 2003 | 40 | „ | NR |
| 2004 | 40 | „ | NR |
| 2016 | 79 | „ | NR |

| No. problemei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1] | | Rezolvată [2] |
|---|---|---|---|
| 2017 | 80 | (XIX) | NR |
| 2018 | 80 | „ | |
| 2024 | 118 | „ | |
| 2025 | 119 | „ | |
| 2031 | 120 | „ | |
| 2032 | 120 | „ | NR |
| 2035 | 159 | „ | |
| 2038 | 159 | „ | |
| 2048 | 198 | „ | |
| 2055 | 200 | „ | |
| 2056 | 200 | „ | |
| 2058 | 200 | „ | |
| 2063 | 238 | „ | |
| | 280 | „ | |
| 2065 | 239 | „ | |
| 2070 | 240 | „ | NR |
| 2074 | 278 | „ | NR |
| 2079 | 279 | „ | |
| 2081 | 279 | „ | |
| 2083 | 280 | „ | |
| 2091 | 319 | „ | |
| 2096 | 320 | „ | 140 |
| 2097 | 320 | „ | 307 |
| 2106 | 358 | „ | |
| 2108 | 359 | „ | |
| 2110 | 359 | „ | |
| 2111 | 360 | „ | NR |
| 2112 | 360 | „ | NR |
| 2116 | 398 | „ | |
| 2117 | 398 | „ | |
| 2118 | 399 | „ | |
| 2129 | 438 | „ | |
| 2130 | 460 | „ | |
| 2133 | 439 | „ | |
| 2138 | 439 | „ | 343 |
| 2144 | 461 | „ | |
| 2145 | 462 | „ | |
| 2147 | 462 | „ | |
| 2170 | 119 | (XX) | NR |
| 2176 | 120 | „ | |
| 2187 | 160 | „ | |
| 2191 | 197 | „ | |
| 2194 | 197 | „ | |
| 2197 | 198 | „ | |
| 2203 | 199 | „ | |
| 2217 | 239 | „ | |
| 2222 | 240 | „ | |
| 2227 | 279 | „ | |
| 2233 | 280 | „ | |
| 2234 | 280 | „ | |
| 2235 | 280 | „ | |
| 2240 | 318 | „ | |
| 2247 | 320 | „ | |
| 2248 | 320 | „ | |

| No. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 2249 | 320 (XX) | |
| 2250 | 320 „ | |
| 2263 | 359 „ | |
| 2264 | 360 „ | |
| 2265 | 360 „ | |
| 2266 | 360 „ | |
| 2274 | 398 „ | |
| 2278 | 399 „ | 54 |
| 2281 | 400 „ | |
| 2282 | 400 „ | |
| 2284 | 439 „ | |
| 2289 | 439 „ | |
| 2290 | 439 „ | |
| 2295 | 461 „ | |
| 2298 | 462 „ | |
| 2300 | 462 „ | |
| 2301 | 462 „ | |
| 2302 | 462 „ | |
| 2308 | 39 (XXI) | |
| | 80 „ | |
| 2311 | 40 „ | |
| 2318 | 79 „ | |
| | 160 „ | |
| 2320 | 79 „ | |
| 2329 | 118 „ | |
| 2330 | 118 „ | |
| 2332 | 119 „ | |
| 2337 | 120 „ | |
| 2338 | 120 „ | |
| 2343 | 157 „ | |
| 2344 | 158 „ | |
| 2346 | 158 „ | |
| 2347 | 158 „ | NR |
| 2353 | 159 „ | NR |
| 2354 | 198 „ | |
| 2356 | 199 „ | |
| 2357 | 199 „ | |
| 2358 | 199 „ | |
| 2359 | 199 „ | |
| 2360 | 199 „ | |
| 2365 | 200 „ | |
| 2370 | 239 „ | |
| 2375 | 240 „ | |
| 2377 | 240 „ | 142 |
| 2380 | 278 „ | 462 |
| 2381 | 278 „ | |
| 2382 | 278 „ | |
| 2383 | 278 „ | |
| 2386 | 279 „ | |
| 2390 | 280 „ | |
| 2391 | 280 „ | 465 |
| 2392 | 280 „ | NR |
| 2394 | 318 „ | |
| 2395 | 318 „ | 466 |

| No. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 2396 | 319 (XXI) | |
| 2397 | 319 „ | |
| 2398 | 319 „ | |
| 2402 | 320 „ | |
| 2405 | 320 „ | |
| 2408 | 359 „ | NR |
| 2414 | 360 „ | NR |
| 2416 | 360 „ | |
| 2421 | 399 „ | |
| 2422 | 399 „ | NR |
| 2423 | 399 „ | |
| 2428 | 439 „ | 468 |
| 2430 | 439 „ | NR |
| 2431 | 439 „ | |
| 2434 | 440 „ | NR |
| 2435 | 440 „ | |
| 2436 | 440 „ | |
| 2439 | 440 „ | NR |
| 2440 | 459 „ | NR |
| 2443 | 459 „ | NR |
| 2444 | 459 „ | NR |
| 2448 | 460 „ | NR |
| 2456 | 31 (XXII) | NR |
| 2458 | 32 „ | |
| 2459 | 32 „ | 307 |
| 2461 | 32 „ | NR |
| 2462 | 62 „ | NR |
| 2466 | 63 „ | NR |
| 2469 | 63 „ | NR |
| 2471 | 64 „ | 345 |
| 2477 | 95 „ | NR |
| 2478 | 95 „ | |
| 2479 | 95 „ | NR |
| 2481 | 96 „ | NR |
| 2484 | 96 „ | NR |
| 2487 | 120 „ | NR |
| 2497 | 144 „ | |
| 2500 | 144 „ | NR |
| 2501 | 167 „ | NR |
| 2502 | 167 „ | NR |
| 2503 | 167 „ | NR |
| 2510 | 191 „ | NR |
| 2511 | 191 „ | NR |
| 2524 | 240 „ | NR |
| 2529 | 262 „ | NR |
| 2537 | 287 „ | |
| 2539 | 288 „ | NR |
| 2543 | 311 „ | NR |
| 2544 | 311 „ | NR |
| 2545 | 312 „ | NR |
| 2546 | 312 „ | NR |
| 2552 | 47 (XXIII) | |
| 2553 | 47 „ | |
| 2555 | 48 „ | NR |

| No. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | | Rezolvată [2] |
|---|---|---|---|
| 2556 | 48 | (XXIII) | NR |
| 2560 | 72 | „ | NR |
| 2566 | 120 | „ | |
| 2569 | 120 | „ | NR |
| 2571 | 144 | „ | NR |
| 2573 | 144 | „ | |
| 2575 | 168 | „ | |
| 2577 | 168 | „ | NR |
| 2578 | 168 | „ | NR |
| 2580 | 192 | „ | NR |
| 2585 | 215 | „ | |
| 2586 | 216 | „ | |
| 2587 | 216 | „ | NR |
| 2591 | 240 | „ | NR |
| 2593 | 264 | „ | NR |
| 2596 | 288 | „ | NR |
| 2597 | 288 | „ | NR |
| 2598 | 288 | „ | |
| 2599 | 288 | „ | NR |
| 2602 | 16 | (XXIV) | NR |
| 2605 | 31 | „ | |
| 2607 | 31 | „ | NR |
| 2608 | 32 | „ | NR |
| 2609 | 32 | „ | |
| 2610 | 160 | „ | |
| 2623 | 80 | „ | NR |
| 2631 | 112 | „ | |
| 2635 | 112 | „ | |
| 2638 | 127 | „ | NR |
| 2640 | 128 | „ | |
| 2641 | 128 | „ | |
| 2643 | 128 | „ | NR |
| 2645 | 143 | „ | NR |
| 2647 | 143 | „ | NR |
| 2651 | 176 | „ | |
| 2654 | 176 | „ | |
| 2655 | 191 | „ | NR |
| 2656 | 191 | „ | NR |
| 2658 | 191 | „ | NR |
| 2660 | 191 | „ | |
| 2661 | 192 | „ | |
| 2664 | 24 | (XXV) | |
| 2665 | 24 | „ | NR |
| 2669 | 24 | „ | NR |
| 2671 | 48 | „ | NR |
| 2674 | 63 | „ | |
| 2675 | 63 | „ | |
| 2682 | 64 | „ | |
| 2683 | 79 | „ | |
| 2684 | 80 | „ | NR |
| 2686 | 80 | „ | NR |
| 2688 | 80 | „ | |
| 2689 | 80 | „ | |
| 2692 | 108 | „ | NR |

| No. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | | Rezolvată [2] |
|---|---|---|---|
| 2694 | 108 | (XXV) | |
| 2695 | 109 | „ | NR |
| 2696 | 109 | „ | NR |
| 2701 | 141 | „ | |
| 2705 | 142 | „ | |
| 2709 | 142 | „ | NR |
| 2713 | 143 | „ | NR |
| 2717 | 143 | „ | NR |
| 2719 | 144 | „ | 262 |
| 2727 | 168 | „ | NR |
| 2731 | 191 | „ | |
| 2735 | 192 | „ | NR |
| 2738 | 192 | „ | NR |
| 2745 | 216 | „ | NR |
| 2758 | 56 | (XXVI) | NR |
| 2764 | 78 | „ | 220 |
| 2766 | 79 | „ | 55 |
| 2769 | 79 | „ | NR |
| 2773 | 80 | „ | |
| 2778 | 104 | „ | NR |
| 2780 | 104 | „ | NR |
| 2789 | 135 | „ | NR |
| 2792 | 137 | „ | |
| 2795 | 159 | „ | |
| 2796 | 159 | „ | |
| 2799 | 159 | „ | 58 |
| 2803 | 160 | „ | |
| 2809 | 192 | „ | NR |
| 2814 | 192 | „ | NR |
| 2818 | 216 | „ | |
| 2820 | 216 | „ | |
| 2822 | 216 | „ | |
| 2827 | 247 | „ | |
| 2828 | 248 | „ | |
| 2829 | 248 | „ | NR |
| 2835 | 279 | „ | 102 |
| 2837 | 279 | „ | |
| 2838 | 279 | „ | |
| 2841 | 280 | „ | 384 |
| 2850 | 335 | „ | |
| 2851 | 335 | „ | |
| 2856 | 38 | (XXVII) | |
| 2860 | 39 | „ | |
| 2861 | 40 | „ | |
| 2864 | 40 | „ | 143 |
| 2865 | 70 | „ | NR |
| 2872 | 71 | „ | |
| 2879 | 102 | „ | |
| 2886 | 104 | „ | NR |
| 2888 | 104 | „ | |
| 2889 | 104 | „ | NR |
| 2891 | 143 | „ | |
| 2895 | 143 | „ | |
| 2898 | 144 | „ | |

| No. problemei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 2899 | 183 (XXVII) | |
| 2902 | 183 „ | 469 |
| 2906 | 184 „ | |
| 2909 | 221 „ | NR |
| 2910 | 221 „ | 103 |
| 2912 | 222 „ | NR |
| 2913 | 222 „ | |
| 2915 | 222 „ | |
| 2916 | 223 „ | NR |
| 2918 | 224 „ | |
| 2920 | 262 „ | |
| 2922 | 263 „ | |
| 2926 | 264 „ | NR |
| 2929 | 303 „ | |
| 2931 | 303 „ | 263 |
| 2932 | 304 „ | |
| 2936 | 343 „ | NR |
| 2946 | 375 „ | |
| 2947 | 376 „ | NR |
| 2950 | 416 „ | 222 |
| 2953 | 416 „ | |
| 2955 | 416 „ | |
| 2956 | 416 „ | NR |
| 2959 | 448 „ | |
| 2960 | 448 „ | |
| 2961 | 448 „ | 346 |
| 2965 | 38 (XXVIII) | |
| 2969 | 39 „ | |
| 2971 | 39 „ | |
| 2972 | 40 „ | |
| 2974 | 40 „ | 104 |
| 2977 | 79 „ | |
| 2978 | 79 „ | |
| 2980 | 79 „ | |
| 2983 | 79 „ | |
| 2985 | 80 „ | |
| 2986 | 80 „ | |
| 2991 | 119 „ | |
| 2993 | 119 „ | |
| 2994 | 119 „ | 225 |
| 2995 | 120 „ | NR |
| 2996 | 120 „ | |
| 2998 | 120 „ | |
| 3000 | 120 „ | |
| 3003 | 159 „ | |
| 3005 | 159 „ | NR |
| 3007 | 159 „ | |
| 3013 | 199 „ | |
| 3017 | 300 „ | |
| 3019 | 200 „ | NR |
| 3021 | 239 „ | |
| 3024 | 239 „ | |
| 3030 | 240 „ | 265 |
| 3031 | 278 „ | |

| No. probelmei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 3034 | 279 (XXVIII) | 108 |
| 3040 | 280 „ | 309 |
| 3041 | 319 „ | |
| 3042 | 319 „ | 470 |
| 3045 | 319 „ | NR |
| 3046 | 320 „ | |
| 3047 | 320 „ | 60 |
| 3052 | 359 „ | |
| 3053 | 360 „ | 63 |
| 3054 | 360 „ | |
| 3055 | 360 „ | 350 |
| 3056 | 360 „ | 184 |
| 3059 | 360 „ | |
| 3060 | 360 „ | 351 |
| 3062 | 398 „ | |
| 3067 | 438 „ | |
| 3069 | 400 „ | NR |
| 3070 | 400 „ | |
| 3071 | 439 „ | |
| 3073 | 439 „ | |
| 3075 | 439 „ | |
| 3078 | 440 „ | |
| 3081 | 479 „ | |
| 3082 | 479 „ | |
| 3083 | 480 „ | |
| 3084 | 480 „ | |
| 3085 | 480 „ | |
| 3086 | 480 „ | |
| 3089 | 480 „ | NR |
| 3090 | 480 „ | |
| 3091 | 39 (XXIX) | |
| 3092 | 39 „ | |
| 3093 | 40 „ | 389 |
| 3095 | 40 „ | |
| 3096 | 40 „ | |
| 3097 | 40 „ | 112 |
| 3098 | 40 „ | |
| 3100 | 40 „ | 310 |
| 3102 | 79 „ | 390 |
| 3104 | 79 „ | |
| 3105 | 79 „ | 392 |
| 3107 | 80 „ | NR |
| 3108 | 80 „ | |
| 3109 | 80 „ | |
| 3110 | 80 „ | |
| 3111 | 118 „ | 146 |
| 3112 | 119 „ | |
| 3113 | 119 „ | |
| 3114 | 119 „ | NR |
| 3115 | 119 „ | |
| 3117 | 120 „ | 23 |
| 3118 | 120 „ | |
| 3121 | 159 „ | 148 |
| 3122 | 159 „ | |

| No. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 3126 | 159 (XXIX) | |
| 3127 | 159 „ | NR |
| 3128 | 160 „ | 149 |
| 3129 | 160 „ | |
| 3131 | 199 „ | 393 |
| 3133 | 199 „ | |
| 3134 | 199 „ | NR |
| 3135 | 200 „ | 64 |
| 3136 | 200 „ | |
| 3138 | 200 „ | 66 |
| 3139 | 200 „ | 24 |
| 3140 | 200 „ | NR |
| 3141 | 238 „<br>438 (XXX) | |
| 3144 | 239 (XXIX) | |
| 3145 | 239 „ | |
| 3147 | 239 „ | 186 |
| 3148 | 240 „ | 188 |
| 3149 | 240 „ | 69 |
| 3150 | 240 „ | NR |
| 3151 | 279 „ | 70 |
| 3152 | 279 „ | 269 |
| 3153 | 318 „ | |
| 3155 | 279 „ | |
| 3156 | 279 „ | 71 |
| 3157 | 280 „ | |
| 3158 | 280 „ | 272 |
| 3159 | 280 „ | 28 |
| 3160 | 280 „ | NR |
| 3161 | 318 „ | NR |
| 3162 | 318 „ | |
| 3163 | 319 „ | |
| 3164 | 319 „ | 227 |
| 3165 | 319 „ | |
| 3167 | 320 „ | |
| 3168 | 320 „ | 32 |
| 3169 | 320 „ | NR |
| 3170 | 320 „ | 151 |
| 3171 | 358 „ | |
| 3172 | 358 „ | 229 |
| 3173 | 358 „ | |
| 3174 | 359 „ | |
| 3175 | 359 „ | 352 |
| 3176 | 359 „ | 311 |
| 3177 | 359 „ | |
| 3178 | 360 „ | |
| 3179 | 360 „ | |
| 3180 | 360 „ | NR |
| 3181 | 399 „ | 72 |
| 3182 | 399 „ | |
| 3183 | 399 „ | 33 |
| 3184 | 399 „ | 312 |
| 3185 | 399 „<br>70 (XXX) | |

| No. Problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 3186 | 400 (XXIX) | |
| 3187 | 400 „ | |
| 3188 | 400 „ | 74 |
| 3189 | 400 „ | |
| 3190 | 400 „ | 473 |
| 3191 | 439 „ | 394 |
| 3192 | 439 „ | NR |
| 3193 | 439 „ | 75 |
| 3194 | 439 „ | NR |
| 3195 | 439 „ | |
| 3196 | 439 „ | 191 |
| 3197 | 440 „ | |
| 3198 | 440 „ | |
| 3199 | 440 „ | |
| 3200 | 440 „ | |
| 3201 | 479 „ | 152 |
| 3202 | 479 „ | |
| 3203 | 479 „ | 425 |
| 3204 | 480 „ | 114 |
| 3205 | 480 „ | 193 |
| 3206 | 480 „ | |
| 3207 | 480 „ | 274 |
| 3208 | 480 „ | NR |
| 3209 | 480 „ | |
| 3210 | 480 „ | |
| 3211 | 39 (XXX) | 115 |
| 3212 | 39 „<br>159 „ | |
| 3213 | 39 „ | 231 |
| 3214 | 39 „ | |
| 3215 | 40 „ | NR |
| 3216 | 40 „ | |
| 3217 | 40 „ | 232 |
| 3218 | 40 „ | |
| 3219 | 40 „ | |
| 3220 | 40 „ | NR |
| 3221 | 79 „ | |
| 3222 | 79 „ | |
| 3223 | 79 „ | |
| 3224 | 79 „ | 275 |
| 3225 | 80 „ | 194 |
| 3226 | 80 „ | NR |
| 3227 | 80 „ | |
| 3228 | 80 „ | NR |
| 3229 | 80 „ | 427 |
| 3230 | 80 „ | NR |
| 3231 | 119 „ | 195 |
| 3232 | 119 „ | NR |
| 3233 | 119 „<br>198 „ | |
| 3234 | 119 „ | 354 |
| 3235 | 119 „ | 428 |
| 3236 | 119 „ | |
| 3237 | 120 „ | 430 |

| No. problemei | Pagina la care a fost: Propuse [1] | | Rezolvată [2] |
|---|---|---|---|
| 3238 | 120 | XXX | NR |
| 3239 | 120 | „ | |
| 3240 | 120 | „ | NR |
| 3241 | 159 | „ | |
| 3242 | 159 | „ | |
| 3243 | 159 | „ | 474 |
| 3244 | 160 | „ | |
| 3245 | 160 | „ | |
| 3246 | 160 | „ | 431 |
| 3247 | 160 | „ | 234 |
| 3248 | 160 | „ | |
| 3249 | 160 | „ | NR |
| 3250 | 160 | „ | |
| 3251 | 198 | „ | 314 |
| 3252 | 198 | „ | |
| 3253 | 199 | „ | |
| 3254 | 199 | „ | |
| 3255 | 199 | „ | NR |
| 3256 | 199 | „ | |
| 3257 | 200 | „ | NR |
| 3258 | 200 | „ | NR |
| 3259 | 200 | „ | |
| 3260 | 200 | „ | NR |
| 3261 | 238 | „ | 432 |
| 3262 | 238 | „ | NR |
| 3263 | 238 | „ | |
| 3264 | 239 | „ | NR |
| 3265 | 239 | „ | 354 |
| 3266 | 239 | „ | |
| 3267 | 239 | „ | |
| 3268 | 240 | „ | |
| 3269 | 240 | „ | NR |
| 3270 | 240 | „ | NR |
| 3271 | 278 | „ | |
| | 358 | „ | |
| 3272 | 278 | „ | NR |
| 3273 | 278 | „ | |
| 3274 | 279 | „ | |
| 3275 | 279 | „ | |
| 3276 | 279 | „ | NR |
| 3277 | 280 | „ | |
| 3278 | 280 | „ | NR |
| 3279 | 280 | „ | NR |
| 3280 | 280 | „ | 395 |
| 3281 | 318 | „ | 435 |
| 3282 | 318 | „ | NR |
| 3283 | 319 | „ | |

| No. Problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | | Rezolvată |
|---|---|---|---|
| 3284 | 319 | XXX | NR |
| 3285 | 319 | „ | |
| 3286 | 319 | „ | |
| 3287 | 320 | „ | |
| 3288 | 320 | „ | NR |
| 3289 | 320 | „ | |
| 3290 | 320 | „ | |
| 3291 | 358 | „ | NR |
| 3292 | 359 | „ | NR |
| 3293 | 359 | „ | |
| 3294 | 359 | „ | NR |
| 3295 | 359 | „ | |
| 3296 | 359 | „ | NR |
| 3297 | 359 | „ | |
| 3298 | 359 | „ | NR |
| 3299 | 360 | „ | |
| 3300 | 360 | „ | NR |
| 3301 | 398 | „ | NR |
| 3302 | 398 | „ | NR |
| 3303 | 399 | „ | NR |
| 3304 | 399 | „ | NR |
| 3305 | 399 | „ | NR |
| 3306 | 399 | „ | |
| 3307 | 400 | „ | NR |
| 3308 | 400 | „ | NR |
| 3309 | 400 | „ | NR |
| 3310 | 400 | „ | NR |
| 3311 | 438 | „ | NR |
| 3312 | 439 | „ | NR |
| 3313 | 439 | „ | NR |
| 3314 | 439 | „ | NR |
| 3315 | 439 | „ | NR |
| 3316 | 439 | „ | NR |
| 3317 | 440 | „ | NR |
| 3318 | 440 | „ | NR |
| 3319 | 440 | „ | NR |
| 3320 | 440 | „ | NR |
| 3321 | 478 | „ | NR |
| 3322 | 478 | „ | NR |
| 3323 | 478 | „ | NR |
| 3324 | 479 | „ | NR |
| 3325 | 479 | „ | NR |
| 3326 | 479 | „ | NR |
| 3327 | 479 | „ | NR |
| 3328 | 480 | „ | NR |
| 3329 | 480 | „ | NR |
| 3330 | 480 | „ | NR |

## H. EXERCIŢII. [1])

*Aritmetica.* 1 (36); 2 (36); 3 (36); 12 (77); 13 (77); 14 (77); 19 (116); 20 (116); 21 (117); 27 (156); 28 (156); 29 (156); 36 (196); 37 (197); 38 (197); 39 (197); 43 (235); 44 (135); 45 (135); 46 (135); 54 (276); 55 (276); 56 (276); 57 (276); 58 (276); 59 (276); 62 (317); 63 (317); 64 (318); 65 (357); 66 (357); 68 (396); 69 (396); 70 (396); 74 (436); 75 (436); 76 (437); 77 (437); 81 (475); 82 (476); 83 (476);

*Geometria.* 4 (37); 5 (37); 15 (77); 16 (78); 30 (157); 40 (197); 41 (197); 42 (198); 47 (236); 48 (236); 50 (237); 60 (276); 79 (437); 84 (476);

*Algebra.* 7 (37); 8 (38); 9 (38); 10 (38); 22 (117); 24 (118); 67 (358); 71 (397); 72 (397); 80 (438); 85 (477); 86 (477).

*Trigonometria.* 6 (37); 17 (78); 18 (78); 23 (117); 25 (118); 31 (157); 32 (157); 33 (158); 34 (158); 49 (236); 51 (237); 52 (237); 53 (238); 61 (276); 73 (398); 78 (437).

*Geometria analitică.* 11 (39); 26 (118); 87 (478).

*Analiza.* 35 (159).

## I. TABLOUL NUMELOR.


Abason E. 56, 60, 63, 80, 102, 113, 160, 240, 320, 322, 323.
Abramescu N. 5, 6, 32, 101, 328, 334.
Adam M. 20, 22, 23, 26, 27, 28, 32, 33, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 70, 71, 76, 103, 104, 105, 106, 112, 114, 116, 117, 147, 148, 181, 184, 186, 187, 192, 193, 211, 229, 231, 232, 233, 256, 261, 264, 274, 275, 312, 314, 332, 354, 391, 397, 398, 420.
Adolf M. 233.
Alaci V. 6, 22, 53, 140, 306.
Aldea Gh. 142.
Amărăscu G. 60.
Anastasiu V. 194.
Andrieşescu G. 112.
Angelescu A. 6, 41, 165, 240, 258, 301, 328, 440.
Angelescu T. 24, 26, 66, 96, 112, 148, 157, 174, 200, 274, 323, 374, 391, 480.
Angheluţă T. 6, 46, 65, 89, 120, 149, 183, 184, 185, 240, 280, 321, 360, 418, 430, 440.
Antoniu I. 55, 104, 105, 145, 264, 269.
Arcadian N. 24, 26, 28, 30, 36, 37, 69, 73, 74, 103, 104, 112, 147, 188, 229, 233, 234, 314, 468.
Arghir V. 28.
Arnold Alfred 142.
Augustin R. 142.
Avramescu C. 6.

Bădescu R. 427.
Baidaff Ig. 6, 143.
Balaban A. 145, 183.
Ballan E. 58, 60, 63, 105, 106, 112, 227.
Banciu I. 6.
Barbălatt B. 22, 23, 54, 55, 56, 57, 63, 78, 103, 104, 109, 112, 118, 193, 227, 274, 311, 374, 380.
Bârsu I. 57.
Basacov G. 24, 69, 74, 75.
Beimbardt R. 28.
Beleş I. 6, 14.
Bercovici E. 27, 69, 103, 113.
Berdan C. 71, 74, 76, 103, 104, 113, 145, 185, 261, 274.
Berlinblum H. 142.
Bernstein M. 114, 194, 237, 319.
Beschea N. 114, 195, 274.
Blaha N. 245, 319, 346, 352, 354.
Bleiweiss P. 28, 31, 36, 54, 66, 73, 113, 194, 195, 197, 229, 230, 234, 274, 317, 391, 426, 431.
Blumen N. 234.
Blumenfeld D. 24, 26, 31, 69, 103, 113, 145, 157, 224, 323, 391.
Bogdan G. 23, 28, 64, 69, 113, 396, 477.
Bogan M. 31, 104, 113.
Bogdan C. M. 26.
Bojenescu G. 104.
Boju R. 27.
Bolgiu O. 23, 65, 69, 113, 194, 195, 351, 391.
Borneanu G. 5, 6, 92, 141, 320, 375.
Boroş R. 317.
Borş D. 357.
Botea N. 23, 27, 28, 31, 36, 54, 65, 70, 72, 74, 77, 113, 114, 146, 160, 186, 192, 194, 195, 229, 272, 274, 276, 314, 317, 351, 354, 357, 359, 360, 391, 394, 426, 429, 431, 466, 474.
Botez M. 74, 114.
Brădeţeanu C. 395.


1) Numerele din paranteză indică pagina, iar cele din afară numărul ce poartă exerciţiul.

Braiester O. 36, 114, 156, 192, 194, 230, 394.
Brătescu-Danubiu M. 24, 27, 33, 69, 103, 112, 230, 274.
Bratu G. 6, 328.
Brener A. 142.
Bruckner V. 6.
Brüll L. 26, 31, 54, 60, 66, 113, 194, 230, 234, 317, 391, 426, 431, 474.
Bucur A. 142.
Budeanu I. 6.
Buga I. 431.
Buicliu G. 5, 6, 40, 64, 79, 80, 118, 135, 149, 152, 159, 174, 181, 200, 212, 213, 222, 239, 256, 265, 269, 312, 319, 346, 350, 379, 380, 399, 427, 439, 474, 475, 479.
Bunescu Al. 6.
Bungetzianu D. 321.
Buradescu T. 6.
Burstin O. 23, 26, 31, 64, 113, 187.
Buşilă A. 55, 63, 103, 104, 105, 113, 227, 239.
Buşilă C. 6.
Buşilă I. 6, 14.

Cădere R. 23, 26, 64, 69, 113.
Căldăraru L. 23, 28, 31, 65, 74, 76, 113, 114, 187, 192, 194, 195, 233, 274, 431.
Călin G. 323, 432, 474.
Cambureanu V. 6.
Cantacuzino I. 55, 390.
Capriel D. 7.
Capriel I. 7.
Caragheorghe C. 60.
Caraman E. 7.
Cazacincu V. 194.
Cazacu C. 7, 263, 469.
Cazan G. 27, 113.
Cernat V. 142.
Chiricuţă A. 7.
Chiţulescu I. 7, 322.
Cioc M. 7.
Cioceanu H. 142.
Ciorănescu I. C. 24, 26, 31, 33, 60, 63, 71, 74, 75, 76, 78, 103, 105, 114, 115, 119, 186, 192, 194, 195, 197, 199, 229, 231, 233, 234, 236, 276, 278, 314, 319, 322, 352, 357, 394, 399, 428, 431, 474, 475.
Ciorănescu N. 57, 143, 280, 306, 335, 464, 466.
Codreanu St. 464, 469.
Cojoc Gh. 114, 194.
Comănescu Al. 187, 230.
Constantinescu I. 26, 104, 105, 106.
Constantinescu N. N. 28.
Constantinescu Tancred 7.
Constantinescu Th. 57.
Corozel T. 142.
Coşereanu I. 23, 60, 63, 104, 158, 214, 269, 464.
Cosmovici G. 26, 69, 152, 187.
Coşniţă I. 69, 103.
Coşniţă V. 24, 27, 58, 105, 194, 233, 274, 320.
Costăchescu I. 28.
Costinescu D. 7.
Cristea A. 220, 233.
Cristea P. 195, 234.
Cristescu I. 435.
Cristescu V. 5, 7, 25, 39, 51, 60, 107, 176, 198, 200, 214, 225, 234, 239, 322, 354, 380, 385, 389.
Cronberg V. 142.

Dâmboianu Gh. 79, 119.
Dan V. 104, 145.
David G. 36, 54, 97, 113, 149, 192, 230, 235, 314, 391, 476.
Davidescu M. 142.
Deleanu D. 142.
Demetrescu G. 323.
Dermer M. 395.
Diaconescu T. 24, 114, 230, 274.
Dinulescu A. 104.
Dobrescu-Băbici 60, 213, 390.
Dordea T. 56, 104.
Dorneanu V. 28, 114, 186, 194, 195, 230, 233, 234, 274, 357, 395, 427, 428, 431, 474.
Drăgănescu E. 105, 227.
Drăghicean M. 314.
Drăghiceanu I. 36.
Dragomir I. 26, 28, 104, 391.
Dumitrescu Ad. 113.
Dumitrescu Al. 28, 392.
Dumitrescu D. 66, 69.
Dumitrescu Arg. D. 7.
Dumitrescu G. 142.
Dumitrescu I. G. 7, 49, 130, 322.
Dumitrescu M. 27, 38, 103, 230, 233.
Dumitriu I. 23.
Dumitriu V. 60, 63.

Emanoil G. G. 438.
Emanoil D. 302, 305.
Ene A. 28.
Epure Şt. 24, 26, 30, 60, 65, 69, 113, 152.

Fântâneanu I. 104.
Fedeleş C. 114.
Felix C. 7, 234, 322, 377.
Filipescu G. 5, 7, 92, 375.
Florea Al. 354, 427, 431, 474.
Florescu Al. 142.
Florescu I. 55, 104, 112, 145, 262, 263.
Florescu O. 24, 192, 194, 229, 274.
Foca I. 436, 476.
Focşăneanu L. 57.
Focşeneanu M. 28, 54, 75, 76, 105, 134, 160, 185, 194, 227, 240, 272, 354, 385, 387, 388, 389, 431, 479.
Froim M. 28.

Gabrielescu R. 7.
Gabrielescu V. 23.
Gaiu E. 194, 230, 277.
Gâlcă T. 7.
Gataianţu B. 114, 116, 230, 274.
Gâtan M. 57, 104, 262.
Genazzini L. 36, 229, 230.
Georgescu C. 24, 70.
Georgescu Eug. 24, 28, 31, 114, 186, 229, 275, 431, 474.
Georgescu E. C. 40, 69, 389.
Georgescu F. C. 60.
Georgescu I.C. 36, 39, 53, 55, 60, 61, 63, 103, 104, 105, 112, 145, 149, 158, 227, 264, 385, 387, 388, 389.
Georgescu D. 41.
Georgescu Fl. 104, 145.
Georgescu G. 142.
Georgescu I. 114, 194, 229, 262.
Georgescu M. 24, 26, 31, 71, 114, 115, 186, 194, 195, 229, 314, 323, 427.

Georgescu N. 317.
Georgescu I. N. 7.
Georgescu N. N. 7.
Georgescu-Chiriac I. 186, 437.
Georgescu-Gorjan St. 104.
Georgescu Pion 253.
Georgescu-Racoviţă I. 195, 218, 275, 277, 294, 330, 395, 431, 478.
Georgescu-Roegen N. 57, 104, 144, 262.
Georgescu-Val I. 24, 113, 474.
Ghelber M. 26, 74, 160, 230, 234.
Gheorghiu I. 7.
Gheorghiu M. 7.
Gheorghiu Ş. 183, 261, 307, 343.
Ghermănescu M. 7, 70, 71, 80, 108, 112, 175, 187, 253, 258, 262, 274, 279, 351, 352, 359, 398, 465, 480.
Ghimicescu Gh. 24, 26, 230, 274.
Ghimuş D. 8.
Ghinsberg E. 113.
Ghiţescu V. 63, 103, 104, 105, 113, 194, 195, 391.
Giurumescu C. 24, 26, 31, 71, 114, 186, 192, 194, 229, 233, 274, 275, 427, 431, 474.
Goilav C. 60, 104.
Goldstein F. 24, 28, 30, 114, 194, 230, 231, 233, 274,275,357,391, 393,394.
Goldstein I. 60, 113.
Goldstein M. 24, 28, 66.
Gorovei G. 468.
Gorovei S. 113.
Grădiny G. 27.
Grigorescu C. 8.
Grigorescu E. 141, 142, 262.
Grigorescu I. 24, 28, 233, 314.
Grigorescu V. 218, 262.
Grofşoreanu G. 19, 28, 63, 74, 75, 229.
Grünbaum M. 54, 58, 63, 170, 225, 239, 299, 311, 312, 359, 385, 387, 388, 439, 479.
Grünberg S. 142.
Grünstein E. 395.
Gulian E. 26, 390, 391.
Gutzu A. 60, 64, 186, 309.
Gutzu V. 8.

Hahn L. 142.
Hann C. 195.
Harnagea G. 374.
Hartular G. 357.
Horaţiu H. 142.
Horrovitz L. 55.
Huber I. 104.
Huzuneanu G. 24, 26, 31.

Ianculescu O. 24, 274.
Ianculescu R. 8, 183.
Iliescu D. 24, 28, 56, 71, 74, 113, 222, 314.
Iliescu E. 33, 55, 104, 105, 145, 194, 264.
Iliescu Gh. 5, 8, 321, 322, 375.
Iliescu I. 24, 104.
Iliescu M. 194, 195.
Iliescu P. 117.
Iliescu V. 230.
Iliuţă I. 317, 357.
Ioachimescu A. 8, 322.
Ioanovici A. 8.
Ionescu A. 26, 75, 104, 195, 274, 277, 396, 431.
Ionescu C. 234. 426.
Ionescu V. D. 8, 63, 64, 120, 151, 152, 345.
Ionescu G. 142.
Ionescu I. 5, 8, 18, 22, 33, 35, 39, 50, 54, 74, 79, 81, 93,102, 115, 116, 119, 131, 140, 152, 160, 170, 172, 191, 195, 198, 210, 234, 238, 254, 255, 261, 280, 294, 315, 317, 318, 322, 323, 329, 337, 350, 359, 376, 383, 392, 395, 400, 416, 422, 423, 432, 435, 436, 438, 440, 451, 461, 478.
Ionescu I. I. 26.
Ionescu V. I. 142.
Ionescu Longin 104, 113.
Ionescu P. 24, 26, 31, 38, 53, 60, 64, 69, 74, 76, 78, 103, 105, 114, 115, 149, 156, 157, 192, 194, 195, 227, 229, 230, 231, 233, 274, 276, 314, 352, 357, 389, 394, 431, 474.
Ionescu-Brezuica I. 26, 56, 60, 103, 113, 146, 476.
Ionescu-Bujor C. 70, 71, 75, 114, 131, 194, 230, 233, 317, 322, 437.
Ionescu-Zane G. 24, 28, 31, 66, 113, 230, 234, 391.
Iorgulescu C. 104.
Isărescu St. 114.
Istinie C. 317.

Jijie A. 8.
Jojea N. 114, 230, 431.
Jujescu G. 104.

Kahane Arno 114, 194, 229, 233, 237.
Kahane L. 142. 192.
Kanner A. 103.
Kassvan D. D-ra 142, 466.
Katz L. 194.
Katz P. 24, 54, 104, 113, 145, 264, 269, 276, 464, 469.
Katz S. 26, 75, 114, 115, 194, 195, 197, 235, 276, 314, 317, 330, 431.
Kaufmann N. 8, 141, 262, 400.
Kivovicz I. 262.
Kohn H. 194, 229.

Lalescu Tr. 8, 41, 45, 140, 183, 253, 305, 351, 322.
Lazăr C. 262.
Lăzărescu E. D-ra 112.
Lăzărescu I. 142, 464, 466.
Lăzărescu J. 24, 60.
Lăzărescu Şt. 24, 27, 28, 54, 60, 64, 69, 74, 103, 104, 113, 274, 310, 374, 390, 391.
Lăzărescu V. 26, 230.
Lepădatu V. 26, 114, 230, 233, 357, 474.
Lerner A. 132.
Linteş I. 5, 8, 39, 51, 53, 71, 102, 135, 146, 148, 159, 200, 211, 231, 232, 269, 272, 279, 297, 310, 311, 359, 378, 425, 427, 439, 456, 470, 473, 474, 479.
Liteanu G. 5, 8, 23, 28, 231, 253, 321, 478.
Livada M. 231.
Losner J. 55.
Lungu V. 142.

Macrineanu Şt. 61.
Malcoci C. 8, 321.
Manafu V. 114, 194, 229, 274, 275, 300, 357, 480.
Mănciulescu O. 113.
Manolescu E. 55.
Marcovici A. 195, 431.
Marcovici H. 194, 229, 394.
Mărculescu J. 104, 145.

Marcus F. 113, 114.
Marcus M. 293.
Mareş G. 194.
Mareş T. 8.
Margulies I. 218.
Marinescu I. 26, 31, 230.
Marini P. 75, 427.
Masoler E. 234.
Massler E. 195.
Mateescu C. 8, 309, 322, 400.
Mateescu G. 24, 104, 105, 113, 227, 390.
Mateescu N. 187.
Maxim N. 142.
Mayer O. 218, 261.
Melas P. 142, 218, 262.
Mendelsohn M. 24, 27.
Mihăescu C. 75, 77, 104, 193, 374.
Mihăescu N. 395.
Mihăilescu C. 64, 275, 357, 431.
Mihăilescu N. 230.
Mihăilescu R. 24, 28, 66, 113, 149.
Mihalopol C. 9.
Mihoc G. 24, 28, 69, 227, 229, 272, 346, 349, 391, 393.
Milculescu D. 194, 195.
Mirea St 9, 181, 183, 218, 261, 262, 307, 465, 466.
Mirescu P. 27, 30, 60, 113, 145, 194, 431.
Mitescu D. 149.
Mititelu C. 9, 321.
Mititelu I. 9.
Miu I. 24, 28, 33, 36, 37, 71, 72, 75, 114, 194, 230, 233, 235, 274, 323, 395, 440.
Mladenovici Al. 28, 64, 71, 75, 114, 195, 230, 231, 232, 255, 274, 317, 395.
Mladenovici M. 33.
Mocanu A. 104.
Moisil Gr. 38, 58.
Motoi I. 9.

Nădejde I. 94.
Năsturaş D. 9.
Nathansohn I. 104.
Neamţu N. 142.
Negretzu F. 24, 60, 104, 112, 113, 160, 392, 423.
Negretzu I. 9.
Negulescu V. 142.
Neicu V. 142.
Nestor D. 194, 195.
Nichifor G. 5, 9, 321.
Nicolau A. 145, 262.
Nicolau C. 142, 400, 415, 450, 464, 466.
Nicolau M. 9.
Nicolescu N. 27, 73, 75, 230, 274.
Niculescu A. 58, 64, 104, 105, 185, 227, 269.
Niculescu C. 9.
Niculescu D. 24, 28, 66, 112, 142.
Niculescu M. 58, 159.
Niculescu N. 31.
Niculescu S. 142.
Noech H. 142.
Novac A. 24, 26, 28, 31, 64, 71, 113, 114, 187, 194, 233, 234, 274, 275, 431, 474.

Olteanu G. 142.
Onicescu O. 9, 102, 140, 282, 305, 322.
Opran A. 24, 28, 234, 431.
Oprescu A. 66.
Oprescu G. 26.
Oprişanu E. 104.
Orănescu O. 40, 79, 102, 142, 199, 360, 462, 466.
Orăşanu C. 9, 205, 327.
Orăşanu Gr. 9.
Orăscu G. 77.
Orăscu N. 77.

Pălărieru E. 24, 33, 36, 114, 115, 192, 194, 229, 230, 231, 272, 314, 391, 393.
Pamula A. 55, 104.
Panaitescu A. 24, 25, 69, 113.
Panaitescu Sc. 9, 253.
Pantazi A. 262, 380.
Pantoleon I. 142.
Paşcanu S. 9.
Păsculescu R. 77.
Partenie A. 464.
Patriciu T. 9.
Pătroianu M. 24, 26, 54, 64, 69, 71, 74, 75, 76, 113, 186, 192, 194, 195, 229, 230, 231, 233, 274, 276, 352, 395, 431.
Păunescu T. 194, 195.
Penenjchevici L. 18, 91.
Perieţeanu D. 60.
Petreanu P. 229, 423.
Petrescu A. 183.
Petrescu D. 194, 431.
Petrovici I. 104, 105.
Petteu R. 142.
Philipide M. 9.
Pintilescu V. 142, 464, 466, 469.
Pompeiu D. 125, 126, 305.
Pop A. 195, 230, 431.
Pop E. 28.
Popa I. 75, 93, 114, 194, 195, 230, 231, 274, 275, 357, 427, 431, 474, 475.
Popa T. 104, 105, 106, 227.
Popea O. 26, 31, 39, 54, 64, 68, 69, 70, 71, 74, 76, 104, 105, 106, 108, 113, 114, 146, 149, 151, 185, 194, 227, 229, 231, 233, 272, 274, 276, 310, 313, 314, 359, 380, 394, 417, 431, 473.
Popescu A. 142.
Popescu Corneliu 74, 114, 156, 194, 195, 229, 234, 274, 314, 323, 391, 431, 474.
Popescu Dorin 26, 31, 69, 70, 71, 113, 187, 229, 231, 234, 274, 311.
Popescu F. 391.
Popescu G. 9.
Popescu D. G. 40, 68, 80, 101, 108, 109, 112, 232, 459, 470.
Popescu I. 9.
Popescu G. I. 262.
Popescu M. 24, 26.
Popescu N. 24, 274.
Popescu Sp. 194.
Popovici A. 142, 431.
Popovici C. 114, 115, 186, 192, 194, 195, 229, 233, 274, 275, 317, 354, 393, 394, 399, 427, 428, 431.
Popovici D. 230, 300, 395.
Popovici I. 24, 25, 31, 37, 69, 74, 103, 104, 113, 194, 230, 233, 262, 274.
Popovici M. 474.
Popoviciu T. 55, 60, 62, 64, 94, 104, 105, 109, 151, 227, 261, 279, 374, 462, 470, 472.
Predescu G. 194, 195.
Protopopescu E. 142, 466.
Puşcă T. 395.

Rabinovici F. 113.
Rabinovici S. 71.
Radev Ath. 195, 234, 239, 279, 354, 357.
Radu M. 9.
Rădulescu M. 24.
Rădulescu S. 24.

Rădulescu T. 390.
Răuţ C. 391.
Reinhorn A. 330.
Reinhorn B. 24, 27, 31, 113, 114, 146, 229, 391, 395, 431.
Reinhorn M. 142, 464, 466.
Revici T. 9.
Ringler S. 24, 27, 113.
Rizescu G. 142.
Rizescu I. 55, 262.
Roco M. 10.
Roder C. 104.
Rosenberg G. 142, 466.
Rosenfeld L. 58.
Roşianu D. G. 307, 343.
Roşu A. 114, 194, 195, 230.
Roşu V. 10.
Rotaru C. 141.
Rovinaru C. 145.
Rusu E. 24, 28, 60, 69, 113, 188, 311, 374.

Saligny A. 5, 10, 92, 375, 401.
Saligny M. 10.
Samoilă D. 28, 37, 71, 113, 274.
Săpunaru G. 10.
Sarian M. 56, 102.
Săvescu M. 104.
Sburlan D. 142.
Schächter A. 274.
Schächter I. 26, 74, 75, 114, 115, 194, 230, 274, 306, 391, 431, 474.
Schächter O. 24, 28, 54, 71, 113, 114, 115, 230, 234, 272, 274, 275, 314, 317, 323, 436, 474, 475.
Schapira H. 142.
Schileru D. 104, 145, 306.
Schlifca E. 24.
Schönfeld C. 24, 69, 108, 113, 145, 224, 375.
Şcodrano A. 104.
Scoruşanu E. 104.
Segârceanu N. 24, 194, 234, 274, 391, 431.
Şerbănescu I. 104, 105, 112, 113, 145, 227.
Şerbănescu V. 10.
Sergescu P. 10, 101, 128, 176, 188, 306, 373, 467.
Sergheiev I. 24, 64, 391.
Sevastre D. 194.
Sfinţescu C. 10.
Silberman J. 142.
Simionescu G. 24, 26, 31, 64, 71, 74, 75, 119, 186, 192, 194, 227, 230, 231, 232, 233, 274, 276, 314, 352, 354, 357, 391, 394, 431.
Simionescu M. 24, 28, 113.
Smântânescu A. 10.
Smărăndescu D. 148.
Solacoglu S. 262.
Solacolu S. 113, 392.
Solomon A. 104.
Solomon D. 60, 77, 278, 318.
Solomon W. 24, 60, 64, 105, 113, 114, 227, 329, 375, 392, 467.
Spacu P. 26, 75, 113, 195, 274, 431.
Spathy R. 194, 195, 230, 317, 395, 474.
Scripcă H. 317.
Stamatescu I. 10.
Stamatescu V. 194, 233.
Stamatiu M. 24, 26, 192, 230.
Stan D. 10.
Stancu G. 104.
Stănculescu C. 24, 36.
Stănciulescu G. 26, 27, 74, 113.
Stănculescu I. 113.
Stănescu N. 104.
Stavrat M. 28.
Ştefan M. 24, 25, 26, 28, 30, 31, 54, 69, 71, 76, 96, 103, 104, 105, 108, 113, 146, 148, 171, 174, 186, 200, 233, 236, 238, 264, 274, 279, 454.
Ştefănescu C. 358, 464.
Ştefănescu E. 30, 31, 33, 50, 55, 60, 71, 79, 103, 104, 113, 117, 118, 119, 132, 148, 156, 159, 185, 196, 198, 200, 210, 230, 237, 238, 252, 278, 358, 373, 374, 390, 393, 394, 440, 477.
Ştefănescu M. 31.
Stoenescu I. 70, 104.
Stoica A. 28, 73, 74, 116, 183, 194, 218, 230, 234, 274, 395, 431, 475.
Stoicescu T. 317.
Stroescu G. 149, 274, 314.
Suchăr I. 142.
Şuselescu I. 26, 390.

Tailer G. 149, 156, 159, 198, 231, 232, 314, 417, 453.
Tailer N. 224.
Ţânţăreanu P. 274.
Tauber A. 23, 26, 30, 36, 54, 56, 64, 69, 71, 104, 113, 146, 147, 152, 229, 256, 274, 375, 391, 393, 432, 474.
Teleman A. 145.
Teodor I. 373.
Teodoreanu V. 10.
Teodorescu D. 24, 27, 61, 70, 113, 187.
Teodorescu I. 24, 28, 74, 104, 160, 192, 229, 233, 431.
Teodorescu N. 10.
Teodorescu N. 24, 74, 195, 230, 231, 232, 234, 274, 318, 393, 394, 399, 431.
Teodoru N. 104.
Theodoridis T. 76, 114.
Thierrin G. 10, 321.
Ţigoiu I. 36, 73, 80, 194, 229.
Timotin A. 218.
Ţino O. 5, 10, 321, 394.
Ţiţeica G. 5, 10, 179, 180, 322, 324.
Tomescu A. 28.
Triandaf A. 142.
Trifescu Gr. 466.
Trofimov P. 120.
Tudorache G. 26.
Tudorache S. 31, 233.
Tunaru Tr. 28.

Udrisky T. 24, 28, 40, 105, 113, 227, 229, 322, 352, 374.
Ulescu A. 10.
Urzică A. 26.

Vainfeld T. 229.
Vâlcovici V. 102, 120, 287, 305.
Vardala I. 10.
Vârlan V. 24, 26, 71, 114, 187, 194, 229, 233, 234, 274, 357, 427, 431, 474.
Vasilache S. 197.
Vasilescu F. 261.
Vasilescu Gr. 10.
Vasilescu I. 10, 321.
Vasilescu M. 24, 27, 66, 69, 145.
Vasiliu G. 74, 196, 230, 357, 396, 398, 439.
Vasiliu I. 24, 26, 54, 59, 60, 64, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 103, 104, 105, 113, 114, 115, 146, 149,

156, 171, 175, 192, 194, 195, 227, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 274, 275, 295, 296, 298, 306, 314, 317, 322, 352, 357, 389, 390, 391, 394, 395, 399, 429, 431, 432, 437, 474.
Vasiliu M. 104, 262.
Vasiliu N. 229.
Velea M. 234, 431.
Velan A. 142.
Vlădea I. 187, 194, 230.
Vlădescu A. 307.
Vlaţiu L. 24, 26, 75, 113.
Vogel D. 464.
Vulpanovici B. 24, 28, 113, 274.

Warenberg A. 142.
Weinrauch M. 218.
Weiss L. 24, 26, 54, 61, 69, 75, 76, 102, 104, 112, 113, 136, 139, 192, 264, 274, 306, 323, 351, 438, 470, 475.
Weiss S. 26, 27, 54, 64, 66, 105, 118, 133, 146, 194, 195, 217, 227, 234, 278, 295, 313, 314, 354, 391, 474.

Zagher V. 28.
Zahareanu Al. 469.
Zahareanu N. 469.
Zaidman I. 142.
Zamfirescu A. 24, 28.
Zamfirescu G. 11, 262.
Zamfirescu M. 74.
Zane G. 431.
Zapan Gh. 5, 11, 40, 80, 321, 364, 445.
Zapan Gr. 5, 11, 55, 56, 120, 131, 145, 199, 235, 320, 461.
Zuckerman B. 64.

## J. UVRAGE CITATE.

Pag.

*Gazeta Matematică.* 5, 7, 12, 13, 14, 19, 21, 24, 25, 30, 31, 32, 41, 46, 50, 51, 52, 54, 56, 58, 59, 60, 81, 91, 92, 93, 94, 111, 132, 133, 140, 146, 147, 152, 157, 159, 171, 174, 175, 181, 183, 185, 211, 212, 213, 222, 245, 253, 256, 262, 314, 324, 330, 331, 332, 352, 357, 365, 373, 376, 379, 380, 389, 390, 417, 418, 438, 441, 446, 454, 461, 467.
Culegere de Probleme — Aritmetica . . . . . 14, 54, 390, 454, 472
*B. Niewenglowschi.* Cours d'Algèbre . . . . . 21, 22
Culegere de Probleme — Algebra . . . . . 21, 118, 157, 258, 397, 419
Culegere de Probleme — Trigonometria 29, 31, 78, 96, 213, 236, 308, 331, 355
*F. G. — M.* Exercices de Géométrie 31, 244, 330, 353, 420, 428, 429
*E. Goursat.* Analyse . . . . . 42, 43, 163
Mathesis . . . . . 51, 176, 298, 385, 388, 389
Relations entre les éléments d'un triangle . . . . . 54
*F. G. — M.* Exercices de Mécanique . . . . . 58
Culegere de Probleme . . . . . 65, 331
Revista Matematică din Timişoara . . . . . 70, 71, 331, 420
*Cr. Orăşanu şi C. S. Popescu.* Manual de Aritmetică . . . . . 93
*Eliade Rădulescu.* Aritmetica . . . . . 93
*Zemplén Gh.* Mathematekai és Fizikai Lapok . . . . . 94
Jurnal matematic . . . . . 94
*Rouché et de Combe-rousse.* Traité de Géomètrie, Géomètrie plane 107, 298, 312 346, 385, 386, 387, 388
*Aubert şi Papelier.* Ex. de Anal. . . . . 118, 470
*Tr. Lalescu.* Geometrie Analitică . . . . . 129
*P. Appell.* Eléments d'Analyse mathématique . . . . . 135
Foaia Matematică . . . . . 159
*Collignon.* Statique . . . . . 183
Culegere de Probleme — Geometria . . . . . 213
*N. Blaha.* Proprietăţi din Geometria Triunghiului . . 245, 354
*Lt.-Col. Georgescu-Pion.* Studiul gurilor de foc . . . . . 253
*Lt.-Col. D. Petrovan.* Pulberi şi Explosivi . . . . . 253
*Căpit. C. Verdeş.* Ridicările topografice ale artileriei şi erorile topografice ale ridicărilor artileriei . . . . . 253
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences . . . . 258, 328
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine . . . . . 281
Annales de Gergonne . . . . . 306
*Niewenglowski.* Algèbre . . . . . 322

| | | Pag. |
|---|---|---|
| *M. d'Ocagne.* | Principes de géométrie pure et appliquée | 322 |
| *Tr. Lalescu.* | Calculul algebric | 322 |
| *I. Ionescu.* | Nomografia şi Lucrările publice la Romani sub Împăratul Traian | 322 |
| *Comberousse.* | Algèbre | 322 |
| *Papelier.* | Géometrie analytique | 322 |
| *Abason.* | Exerciţii de Mecanică | 322, 332 |
| *I. Ionescu.* | Maşinile de calcul | 322 |
| *F. J.* | Exercices de géométrie | 322 |
| *E. Duporcq.* | Principes de géométrie moderne | 322 |
| *I. Ionescu.* | Un nou metod pentru studiul trigonometriei plane | 322 |
| *Wittenbauer.* | Mechanik (Aufgaben) | 323 |
| *Vogt.* | Mathématiques générales | 323 |
| *G. Demetrescu.* | Distanţele cereşti | 323 |
| *I. Ionescu.* | Momente statice polare | 323 |
| *Papelier.* | Mécanique | 323 |
| *C. Bourlet.* | Trigonométrie | 323 |
| Natura | | 323 |
| *I. Ionescu.* | Comparaţia rădăcinilor ecuaţiilor de gradul II | 323 |
| *Salmon.* | Sections coniques | 323 |
| *Papelier.* | Géométrie Descriptive | 323 |
| *G. Demetrescu.* | Distanţele cereşti | 323 |
| *I. Ionescu.* | Geometrografia | 323 |
| *Appel.* | Mécanique | 323 |
| *Guichard.* | Géométrie | 323 |
| *I. Ionescu.* | Momente statice absolute | 323 |
| *Hadamard.* | Géométrie | 323 |
| *Papelier.* | Algèbre | 323 |
| *I. Ionescu.* | O dedicaţie a unui matematician Neapolitan către Alexandru Ypsilante | 323 |
| Nouvelles Annales | | 328 |
| *Demartres* | Géométrie infinitésimale | 334 |
| *Einstein.* | La Théorie de la Relativité restreintre et généralisée (trad. Rouvière) | 362 |
| *Bergson.* | Durée et simultanéité | 362 |
| *Maritaine.* | Nouveaux débats einsteiniens | 362 |
| *Charles Nordmann.* | Einstein ou Bergson | 362 |
| *Haag.* | Cours complet de mathématiques spéciales | 374 |
| *Vivanti.* | Théorie des groupes | 374 |
| *Lebon.* | Henry Poincaré | 374 |
| *Jordan, Poincaré, Picard.* | Oeuvres de G.—H. Helphen | 374 |
| *Darboux.* | Principes de géométrie analytique | 374 |
| *Petersen.* | Théorie des équations algébriques | 374 |
| *Lebon.* | Gaston Darboux | 374 |
| *P. Boutroux.* | Principes de l'analyse mathématique | 374 |
| *Borel.* | Eléments de la théorie des probabilités | 374 |
| *Lebon.* | Emile Picarde | 374 |
| *Goursat.* | Cours d'analyse mathématique | 374 |
| *Picard.* | Discours et mélanges | 374 |
| *Lambert.* | L'astronomie | 374 |
| *Pillet.* | Géométrie descriptive | 374 |
| *Hadamard.* | Sur la méthode en géométrie | 374 |
| *Brahy.* | Exercices de calcul différentiel | 374 |
| *Borel.* | Introduction à quelques théories physiques | 374 |
| *Chatelet.* | Théorie des nombres | 374 |
| *Tannery.* | Leçons d'algèbre et d'analyse | 374 |
| *Appell.* | Cours de mécanique | 374 |

Pag.

*Poirée.* Méthodes pour les problèmes de géométrie . . 347
*Silberstein.* Algèbre vectorielle et annalyse vectorielle . . . 375
*Picard.* Traité des vecteurs. . . . . 375
*Haag.* Géométrie descriptive et trigonométrie . . . . 375
*Apell.* Théorie des vecteurs . . . . . 375
*Haag.* Mécanique . . . . . 375
*Salmon.* Leçons d'algèbre supérieure . . . . . 375
*J. Neuberg.* Sur les projections et contre projections d'un triangle fixe . . . . . 432
*Poincaré.* Science et Méthode . . . . . 444
*Bergson.* Essai sur les données immediates de la conscience . 444
Revista de matematicas y fisicas elementales . . . . . 475
Foaia matematică . . . . . 475

Afară de uvrajele de mai sus, sunt citate:
30 Matematici diverse. . . . . 18, 50, 93
10 Geometrii diverse . . . . . 131
10 Algebre dievrse. . . . . 170
20 Analize diverse . . . . . 210, 294
30 Feluri de calcul . . . . . 254, 329, 375
10 Trigonometrii diverse . . . . . 415
10 Aritmetici diverse . . . . . 450

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Adam M.* (2795); *Bleiweiss P.* (3301); *Brezuica Istinie* (3282, 301); *Brüll Leon* (3266); *Cojoc Gh.* (3301); *Cristescu I.* (3282, 301, C, P); *Felix Const.* (3291, 93, 301); *Foca Ilie* (3282, 301, P); *Focșăneanu M.* (P); *Gaiu Em.* (3282, 301); *Grünstein E.* (3286, 89); *Iacob Eug.* (3289, 301, E); *Iliuță I.* (3282, R); *Ionescu-Bujor Andrei* (3266); *Ionescu-Bujor Const.* (3266); *Katz L.* (3266, 82, 301, R); *Leescu P.* (3222, 90); *Manafu V.* (P); *Marcovici H.* (3218, 66, 89); *Massler Eug.* (3266, 301); *Miu I.* (2298, 3245, 53, R); *Nestor G. D.* (3266, 301); *Nicolau-Dobridor I.* (3301); *Nicolau V. Gh.* (3222, 301); *Novacu Valeriu* (3301); *Popea O.* (N, R); *Popovici Const.* (3289, P, R); *Popovici Dan* (2861, 3218, 32); *Scripcă L.* (3239); *Sevastre D.* (3266, 82); *Segall L.* (3173, 202); *Spathy R.* (3301); *Stoica A.* (2972, 78); *Tailer G.* (P); *Vasiliu C. I.* (3271); *Vlădea I.* (3222, 89, 90); *Zamfir I.* (3301).

---

*Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus, a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2991, 3083, 84, 90, 93, 101, 04, 11, 13, 36, 67, 74, 78, 82, 200, 06, 19, 21, 28, 33, 38, 40, 42, 43, 48, 58, 59, 62, 64, 69, 72, 73, 74, 77, 83, 84, 85, 86, 95, 97, 99, 303, 06, 12 și 14 nu au fost încă examinate de redactori cărora le-au fost repartizate.

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

## 29 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 2000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 100 lei, afară de volumele: I, IV, X, XV, XVI, XIX, XX, XXI, XXV și XXVI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Lecțiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 . . . . Lei 80,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

6. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu . (Sub presă).*

9. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. (Epuizată).

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 60 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: Ing. **G. Borneanu,** (adresa: Str. Sf. Constantin, 31, București).

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.**